دالة الإمكان التقريبية والبواقي المشوشة للنماذج المختلطة ARMA (p,q)

دكتور/ طارق محمد شمس الدين عبد اللطيف(*)

ملخص البحث:

من خلال دراسة النموذج المختلط ARMA(p,q) أمكن الحصول على دالة إمكان تقريبية ، وبالتالي مقدرات تقريبية . وبالرغم من أن دالة الإمكان التقريبية ، واختبارات مدى كفاءة النموذج تعد دراسة ناجحة تمامًا للمقدر ،إلا أنه في هذا التقريب لا نحتاج لحساب مصفوفة التحويلات في الشكل المضبوط (exact) . ومن خلال التقريبات الأخرى للنماذج البسيطة والتي سبق دراستها في أبحاث سابقة أمكن بناء دوال إمكان تقريبية مركزة ، بالإضافة إلى دوال الإمكان الأكبر المقيدة (restricted maximum likelihood(REML ، والتي تم الاعتماد على بعض نتائجها في هذه الدراسة للحصول على دالتي الإمكان التقريبية المركزة والمقيدة (المشروطة) للنموذج محل الدراسة ، كما أن هذه الدراسة ركزت على دراسة البواقي المشوشة remainder disturbance لبيانات مستقرة للنموذج المختلط ARMA(p,q) ، وفي هذه الدراسة تم افتراض قيم عددية لاستثمارات ٦ شركات لمدة ٣٦٠ يوم للبواقي المشوشة للنموذج ARMA(1,1) .

١ـ مقدمة:

تعد دراسة دالة الإمكان التقريبية للنموذج المختلط ARMA(p,q) الهدف الرئيسي للبحث، وذلك لتقديم طرق تقدير تقريبية للمعالم للحصول على مكونات التباين للنموذج محل الدراسة ، نظرًا لاستخداماتها في مجالات عديدة من

(*) كلية التجارة (بنين)- جامعة الأزهر

أهمها مجال الاقتصاد القياسي، كما أن هذه الدراسة تركز على البواقي المشوشة لبيانات مستقرة للنموذج المختلط ، علاوة على أنها تقدم دالة إمكان تقريبية، ودالة إمكان مقيدة للنموذج محل الدراسة ، ولقد تعددت الدراسات التي بها علاقة بموضوع البحث منها:

دراسة Searle., others 1992 :

تناولت هذه الدراسة مكونات التباين للنماذج البسيطة AR(1) , MA(1) , AR(2) في شكلها المضبوط .

دراسة Gillmour & others1995:

هذه الدراسة تناولت دالة الإمكان التقريبية ،وكذا دالة الإمكان التقريبية المقيدة للنموذج، وقدمت مصفوفة معلومات بشكل حسابي لتقدير مكونات التباين لنفس النموذج.ARMA(1,1)

دراسة Lillard and Weiss1979:

قدم الباحثان في هذه الدراسة مكونات التباين للنموذج AR(1) باستخدام دراسة الأخطاء لسلسلة زمنية لأجور العلماء الأمريكان خلال الفترة الزمنية من عام ١٩٦٠ وحتى عام ١٩٧٠.

دراسة **Balestera 1980:**

استخدم الباحث في هذه الدراسة أخطاء النموذج MA(1) في إيجاد مكونات التباين باستخدام طريقة التحويل.

دراسات **Beltagi and Li:**

قدما الباحثان ثلاث دراسات في الفترة من ١٩٩٢ وحتى ١٩٩٧ وذلك على الوجه التالي :

– في عام ١٩٩٢ قدما تطويرا للاختبار المشترك للارتباط التسلسلي للنماذج AR(1) , MA(1) .

– في عام ١٩٩٥ اشتقا الإحصاءات لنماذج الرتبة الأولى(1)AR(1) , MA لأخطاء الارتباط التسلسلي (أخطاء الارتباط بين سلسلتين زمنيتين).

– في عام ١٩٩٧ اقترحا تحويلاً بديلاً يتطلب فقط تقدير المعالم لنماذج(1)MA, (1)AR التي تجعل مجموع المربعات أقل ما يمكن ، وذلك باستخدام سلسلة البواقي .

وسوف يستخدم الباحث نتائج دراسة (Gillmour.,1995) للنموذج ARMA(1,1) للحصول على دالة إمكان مقيدة للنموذج ARMA(p,q).

ومما تقدم يتضح أن الدراسات السابقة لم تتناول مناقشة البواقي المشوشة لنماذج(ARMA(p,q لصعوبة بناء مصفوفة التحويل ، لذا سوف يتناول الباحث ذلك بالدراسة.

٢ـ الهدف من البحث:

في المنهج الكلاسيكي أمكن الحصول على معكوس مصفوفة التغاير باستخدام المعالم المقدرة للنماذج البسيطة AR(1) , MA(1) , AR(2) .

وعند دراسة النماذج MA(q), AR(P) ، والنموذج المختلط ARMA(p,q) يصعب تحليل هذه النماذج لصعوبة الوصول لشكل دالة الإمكان الأكبر في شكلها المضبوط ، وبالتالي يهدف البحث إلى تقديم أسلوب منهج تقريبي يمكن من خلاله تقدير المعالم ،كما يقدم أسلوبًا بديلاً عن حساب معكوس مصفوفة التغاير، كما يهدف البحث أيضًا إلى تقديم دالة الإمكان الأكبر المقيدة للنموذج المختلط ، ودراسة البواقي المشوشة لبيانات مستقرة لنفس النموذج .

٣ـ البواقي المشوشة لنماذج ARMA(p,q) وحساب معكوس مصفوفة التغاير التقريبية باستخدام الأسلوب الطيفي (spectrum approach).

قد يحدث تغيرات لسلسلة زمنية ما نتيجة لأحداث خارجية هامة (أحداث معترضة) تؤثر على المتغيرات التي نقوم بالتنبؤ بها . مثل الإجازات ، والإضرابات ، والحوافز التشجيعية ويطلق على تعريف تحليل السلاسل الزمنية الذي يقيس أثر الأحداث المعترضة اسم تحليل التدخل في السلاسل الزمنية (time series intervention analysis).ومن الجدير بالذكر أن استخدام نماذج للتدخل محفوف بخطر هام يجب التنويه عنه. فيجب استخدام متغيرات التدخل فقط عند وضع نموذج للأحداث المعروفة التي أثرت في البيانات ، بينما يجب عدم استخدامها لإزالة البواقي كبيرة القيمة . فيجب النظر إلى تلك البواقي على أنها مؤشرات تدل على عدم ملاءمة النموذج ومع ذلك قد تكون بعض هذه البواقي نتيجة لأحداث خارجية عن البيانات وهي ما تسمى بالبواقي المشوشة، وهي تقديرات لأخطاء مشوشة حدثت نتيجة لأحداث خارجية عن البيانات .

ومن الناحية الأخرى ، يستطيع الباحث تنقية البيانات ، أي يستطيع إزالة أثر التدخل . ويتم هذا بتحديد صيغة نموذج التدخل ، ثم حساب البواقي وتحليلها للتعرف على النموذج المستخدم وتقدير المعالم .

ليكن نموذج التدخل (التأثير) العشوائي التالي :

$$y_{kt} = x'_{kt}\beta + u_{kt} \quad \ldots \quad (1) \qquad t = 1,2,\ldots,T \quad ، \quad k = 1,2,\ldots,N \quad ،$$

حيث :

k : تشير إلى رقم الفرد (الشخص). ، t : الزمن .

u_{kt} : الأخطاء المشوشة . β : معاملات الانحدار .

y_{kt} : مشاهدات المتغير التابع عند الوقت t للفرد رقم k .

x_{kt} : مشاهدات المتغير المستقل عند الوقت t للفرد رقم k .

كما أن :

$$u_{kt} = \mu_k + v_{kt}$$

حيث :

μ_k : تدل على التدخل (التأثير) الشخصي (الفردي) غير المشاهد وهي متغيرات عشوائية لها توزيعًا طبيعيًا بمتوسط صفر وتباين σ_ε^2 .

v_{kt} : تمثل البواقي المشوشة .

وبفرض أن البواقي المشوشة v_{kt} للنموذج المختلط ARMA(p,q) تتمثل في العلاقة :

$$(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2-...-\varphi_p B^p)v_{kt}=(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-...-\theta_q B^q)\varepsilon_{kt} \quad ...(2)$$

حيث B هي معامل الإزاحة للخلف خطوة واحدة ، ε_{kt} متغيرات عشوائية لها توزيعًا طبيعيًا بمتوسط صفر وتباين σ_ε^2 .

وباستخدام تعريف معامل الإزاحة B يمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة :

$$v_{kt}-\varphi_1 v_{kt-1}-\varphi_2 v_{kt-2}-...-\varphi_p v_{kt-p}=\varepsilon_{kt}-\theta_1\varepsilon_{kt-1}-\theta_2\varepsilon_{kt-2}-...-\theta_q\varepsilon_{kt-q}$$

وعندما تكون البواقي المشوشة v_{kt} غير مشاهدة فإنه لا يمكن حساب مصفوفة التغاير مباشرة من البيانات ، وبالتالي يمكن النظر إلى البواقي المشوشة على النحو التالي:

$$\mathrm{v_k} = (v_{k1}, v_{k2}, ..., v_{kT})'$$

ومصفوفة تغايرها :

$$\sigma_\varepsilon^2\Sigma = E[v_k v_k']$$

حيث :

العدد k يشير إلى رقم الفرد الذي يؤثر في النموذج بتدخله (وقد يكون هذا الفرد شركة من الشركات).

Σ^{-1} تمثل معكوس مصفوفة التغاير.

ومكونات هذه المصفوفة تكون ضرورية لتقدير معالم النموذج .

ويمكن تبسيط الرموز حتى يسهل استخدامها كما يلي :

بوضع :

$A(\Theta)=\Sigma^{-1}$: تمثل معكوس مصفوفة التغاير ، Θ تمثل مجموعة معالم النموذج ARMA(p,q) وهي عبارة عن p+q من المعالم .

والحصول على معكوس مصفوفة التغاير أمرًا صعبًا مما جعلنا نفكر في استخدام الأسلوب الطيفي والذي استخدمه (Beran ,1994) في دراسته ، والتي يمكن الإفادة من نتائجها في دراستنا هذه .

ليكن $f_v(\lambda)$ تمثل الطيف لـ v_{kt} .

حيث :

$$f_v(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty} r_v(j)e^{-i\lambda j}, \qquad \lambda\in(-\pi,\pi)$$

حيث $r_v(j)$ تمثل التغاير الذاتي لـ v_{kt} عند وقت التأخر j .

ومن المعادلة (2) والمعادلة السابقة نحصل على :

$$f_v(\lambda)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}f_1(\lambda,\Theta) \quad \text{و} \quad f_1(\lambda,\Theta)=\left|\frac{1-\theta_1 e^{-i\lambda}-\ldots-\theta_q e^{-iq\lambda}}{1-\varphi_1 e^{-i\lambda}-\ldots-\varphi_p e^{-ip\lambda}}\right|$$

ومن خلال دراسة[Beran ,(1994), P.110,Lem 5.3] يمكن الحصول على عناصر المصفوفة $A(\Theta)$ من معادلة الأسلوب الطيفي التالية :

$$[\alpha(j-l)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_1(\lambda;\Theta)} e^{i(j-l)\lambda} d\lambda \quad \text{و} \quad j,l = 1,...,T. \qquad (3)$$

$$A(\Theta) = [\alpha(j-l)]$$

وفي حالة الحصول على مكونات معكوس المصفوفة $A(\Theta)$ حيث $A(\Theta) = \Gamma'\Gamma$ و Γ مصفوفة من الرتبة T×T فإنه يمكن تطبيق مصفوفة التحويل على البواقي المشوشة v_{kt}. وإذا كانت البواقي المشوشة مستقلة فإنه يمكن تطبيق مصفوفة التحويل لتقدير المعالم ، وهذا ممكن عمليًا لكنه غير ملائم .

في هذه الدراسة ليس هناك حاجة لحساب مصفوفة التحويل ، وفي الجزء التالي سوف يتناول البحث طريقة علمية لحساب مصفوفة معلومات تقريبية باستخدام التحليل العددي لبيانات الدراسة بديلة عن مصفوفة التحويل.

٤ـ دالة الإمكان المركزة مع معكوس المصفوفة $A(\Theta)$.

في نموذج الانحدار الكلاسيكي ذو المتغير الواحد يمكن كتابته على الصورة :

$$\underline{y} = \underline{x}\beta + (l_N \otimes l_T)\mu + \underline{v}$$

حيث :

$\underline{y}$: متجه من الرتبة $NT \times 1$. ، $\underline{v}$: متجه من الرتبة $NT \times 1$.

$\underline{x}$: مصفوفة من الرتبة $NT \times k$. ، k : عدد من المتغيرات التفسيرية.

$l_T = [1,...,1]'$ ، $\mu = [\mu_1,...,\mu_N]'$.

بوضع :

$$\sigma_\varepsilon^2 \Sigma = E[v_k v_k'] \quad ، \quad u = (l_N \otimes l_T)\mu + \underline{v}$$

فإن :

$$\underline{v} = E[uu'] = l_N \otimes v_k \qquad و \qquad v_k = E[u_k u_k'] = \sigma_\varepsilon^2 (\Sigma + \eta l_T l_T').$$

من **دراسة**(Searle.,1992) أمكن الحصول على :

$$v_k^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}[A(\Theta) - \frac{\eta}{1+\eta\tau} A(\Theta) l_T l_T' A(\Theta)]. \qquad و \qquad \eta = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\varepsilon^2}\ .$$

$$|v_k| = (\sigma_\varepsilon^2)^T |\Sigma| + \ln(1+\eta\tau). \qquad و \qquad \tau = l_T' \Sigma^{-1} l_T.$$

ولتبسيط الرموز نضع :

$$\gamma = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\tau\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2} = (1+\eta\tau)^{-1} \qquad و \qquad \frac{-\eta}{1+\eta\tau} = \frac{\gamma - 1}{\tau}$$

ويمكن الحصول على دالة الإمكان كما يلي :

$$L = (2\pi)^{\frac{-kNT}{2}} |\Sigma|^{\frac{-NT}{2}} (\gamma)^{\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - x_k\beta)'\right]$$

$$\times\left[\frac{\gamma}{2}(A(\Theta)l_T l_T' A(\Theta)) + \left(A(\Theta) - \frac{1}{\tau}A(\Theta)l_T l_T' A(\Theta)\right)\right](y_k - x_k\beta).$$

ومنها نحصل على لوغاريتم دالة الإمكان التالية :

$$\ln L = \text{constant} - \frac{NT}{2}\ln|\Sigma| + \frac{N}{2}\ln\gamma - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - x_k\beta)'$$

$$\times\left[\frac{\gamma}{2}(A(\Theta)l_T l_T' A(\Theta)) + \left(A(\Theta) - \frac{1}{\tau}A(\Theta)l_T l_T' A(\Theta)\right)\right](y_k - x_k\beta). \ (4)$$

ولوغاريتم دالة الإمكان المركزة يمكن الحصول عليها بحذف σ_ε^2 من المعادلة (4) كما يلي :

$$\ln L = \text{constant} \; -\frac{N}{2}\ln|\Sigma| + \frac{N}{2}\ln\gamma - \frac{NT}{2}\ln\frac{1}{NT}\sum_{k=1}^{N}(y_k - x_k\beta)' \quad (5)$$

$$\times\left[\frac{\gamma}{2}(A(\Theta)l_T l_T' A(\Theta)) + \left(A(\Theta) - \frac{1}{\tau}A(\Theta)l_T l_T' A(\Theta)\right)\right](y_k - x_k\beta).$$

ومن خلال دراسة (1994), Beran وتطبيق مجموع Riemann ، باستخدام التكرارات المتناسقة للمعادلة (3) نحصل على :

$$[\overline{\alpha}(j-l)] = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{f_1(\lambda_m;\Theta)}e^{i(j-l)\lambda_m}\frac{2\pi}{T}, \qquad (6)$$

حيث أن التكرارات المتناسقة λ_j عبارة عن :

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}, \qquad j = -M, -(M-1), \ldots, 0, \ldots, M.$$

أي أن :

j تطابق $(-\pi,\pi)$ ، $M = \frac{T}{2}$ إذا كانت T زوجية ، $M = \frac{T-1}{2}$ إذا كانت T فردية، وتم استبدال $d\lambda$ بـ $\frac{2\pi}{T}$.

وحيث أن v_{kt} مستقرة ، ومن دراسة (1994), Beran ، Priestly,(1981) نقدم التعريف التالي :

$$\frac{1}{T}\ln|\Sigma| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_1(\lambda)d\lambda = 0.$$

وبالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) وتقليد (1994), Beran نحصل على لوغاريتم دالة الإمكان المركزة التقريبي التالي :

(7)

$$\ln L_c \approx \text{constant} + \frac{N}{2}\ln\gamma - \frac{NT}{2}\ln\left\{\frac{2\pi}{NT}\sum_{k=1}^{N}\left[\gamma\frac{I_{uk}(\lambda_0)}{f_1(\lambda_0;\Theta)} + 2\sum_{j=1}^{M}\frac{I_{uk}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_j;\Theta)}\right]\right\}$$

حيث :

L_c : هى دالة الإمكان المركزة

$$I_{uk}(\lambda) = \left|w_{uk}(\lambda)\right|^2, \qquad w_{uk}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{i=1}^{T}u_{kt}e^{-i\lambda t}.$$

مع ملاحظة أن التقريبات لها العلاقات التالية :

$$\tau = 2\pi\sum_{j=-M}^{M}\frac{I_{ll}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_j;\Theta)} = \frac{T}{f_1(\lambda_0;\Theta)}$$

و

$$u_k' A(\Theta) l_T = 2\pi\sum_{j=-M}^{M}\frac{I_{ukl}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_j;\Theta)} = \frac{\sqrt{2\pi T}\,w_{uk}(\lambda_0)}{f_1(\lambda_0;\Theta)} = \frac{T\bar{u}k}{f_1(\lambda_0;\Theta)}.$$

حيث :

$$w_{uk}(\lambda_j) = w_{yk}(\lambda_j) - w_{xk}'(\lambda_j)\beta.$$

وعلى هذا يمكن كتابة مجموع Riemann لدالة الإمكان الأكبر التقريبية في المعادلة (7) على الشكل التالي :

$$\ln L_c \approx cons\tan t + \frac{N}{2}\ln\gamma - \frac{NT}{2}$$

$$\text{x}\ln\left\{\frac{2\pi}{NT}\sum_{k=1}^{N}\left[\gamma\frac{[w_{yk}(\lambda_0) - w_{xk}'(\lambda_0)\beta]^2}{f_1(\lambda_0;\Theta)} + 2\sum_{j=1}^{M}\frac{[w_{yk}(\lambda_j) - w_{xk}'(\lambda_j)\beta]^2}{f_1(\lambda_j;\Theta)}\right]\right\}$$

٥ـ دالة الإمكان المقيدة(المشروطة).

مـن دراسـة (Gillmour., & others 1995) يمكـن تعريـف التـأثيرات الشخصية والبواقي المشوشة في المتجه التالي :

$$\begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix} \approx N\left(0,\sigma_{\varepsilon}^{2}\zeta\right), \qquad \zeta = \begin{bmatrix} \eta I_n & 0 \\ 0 & I_n \otimes \Sigma \end{bmatrix}$$

حيث :

μ متجه من الرتبة $N\times 1$.

v متجه من الرتبة $NT\times 1$.

وباتباع خطوات نفس الدراسة السابقة أمكن الحصول على لوغاريتم دالة الإمكان المقيدة كما يلي :

$$ln\, L_R = -\frac{1}{2}(ln|C| + N\, ln\,\eta + (NT-K)\, ln\,\sigma_{\varepsilon}^{2} + {y'Py}/{\sigma_{\varepsilon}^{2}}),\ N \ln|\Sigma| = 0,$$

حيث :

L_R : دالة الإمكان المقيدة و

$$\eta = {\sigma_{\mu}^{2}}/{\sigma_{\varepsilon}^{2}}, \quad C = \begin{bmatrix} 2\pi \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=-M}^{M} \frac{I_{xk}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_j;\Theta)} & \left\{ {rTx_k}/{f_1(\lambda_0;\Theta)} \right\}_{k=1}^{N} \\ \left\{ {cTx_k^{1}}/{f_1(\lambda_0;\Theta)} \right\}_{k=1}^{N} & \left\{ {T}/{f_1(\lambda_0;\Theta)+\eta^{-1}} \right\} \end{bmatrix}.$$

$$\{ca_l\}_{l=1}^{N} = [a_1,\ldots,a_N]', \qquad \{ra_l\}_{l=1}^{N} = [a_1,\ldots,a_N].$$

بالإضافة إلى أن :

$$P = (I_N \otimes A(\Theta)) - (I_N \otimes A(\Theta))WC^{-1}W'(I_N \otimes A(\Theta))$$

وبالتالي :

$$y'Py = 2\pi\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\frac{I_{yk}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_j;\Theta)} - \left[2\pi\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\frac{I_{yk,xk}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_j;\Theta)}\sum_{k=1}^{N}\frac{T_{YK}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_0;\Theta)}\right]$$

$$\times C^{-1}\begin{bmatrix} 2\pi\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\frac{I_{yk,xk}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_j;\Theta)} \\ \sum_{k=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{T_{YK}(\lambda_j)}{f_1(\lambda_0;\Theta)} \end{bmatrix},$$

حيث :

$$W = \begin{bmatrix} x & I_N l_T \end{bmatrix}$$

وبعد الحصول على دالة الإمكان التقريبية نحتاج إلى تقدير المعالم، وبالتالي الحصول على تغاير تقريبي من خلال التوزيع التقريبي .

بفرض أن متجه المعالم هو $\phi = [\gamma, \beta, \Theta]'$. ويمكن الحصول على مصفوفة المعلومات التقريبية باستخدام التحليل العددي لبيانات الدراسة كما يلي :

$$I(\Phi) = -E\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma\partial\beta} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma\partial\Theta} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\gamma} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\Theta} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\Theta\partial\gamma} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\Theta\partial\beta} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\Theta^2} \end{bmatrix}$$

ويمكن أن نحصل على التوزيع التقريبي التالي :

$$\sqrt{NT}(\hat{\phi}-\phi) \to N\left[0, \frac{1}{NT}\left[I(\hat{\phi})\right]^{-1}\right]$$

ومن خلال هذا التوزيع التقريبي يمكن تقدير المعالم .

٦ـ المحاكاة واختبارات القوة لدالة الإمكان التقريبية:

لتوضيح مدى كفاءة النموذج وحساسيته لطول السلسلة الزمنية وقيم المعلمات المختلفة، واختبارات القوة لتقدير المعالم وتقييمها باستخدام لوغاريتم دالة الإمكان التقريبية يمكن محاكاة نموذج الانحدار الخطى العادي مع البواقي المشوشة التالي :

نموذج الانحدار الخطى مع البواقي المشوشة يمكن تمثيله بالعلاقة :

$$y_{kt} = \beta x_{kt} + \mu_k + v_{kt}.$$

حيث :

$$(1-\alpha B)v_{kt} = (1-\theta B)\varepsilon_{kt}. \quad , \quad k = 1,2,\dots,N. \quad ,$$

$$\mu_k \approx nid(0,1) \quad , \quad \varepsilon_{kt} \approx nid(0,1) \,.$$

وبوضع :

$$, \quad \theta = 0.3 \quad , \quad \beta = 1$$

$$\phi = 0.6$$

$N = 20$ **أي أن** $k = 1,2,3,\dots,20$

وعند أطوال سلسلة زمنية مختلفة

$$T = 200 \quad , \quad T = 100 \quad , \quad T = 50$$

أمكن الوصول إلى معامل التحديد الخاص بكل طول من أطوال السلسلة الزمنية السابقة وكانت نتائجه على الترتيب هي :

$$R^2 = 0.725 \quad , \quad R^2 = 0.921 \quad , \quad R^2 = 0.9975$$

وبمحاكاة نموذج الانحدار الخطي البسيط والبواقي المشوشة اتضح أن زيادة أطوال السلسلة الزمنية يؤدي إلى كفاءة النموذج عند نفس المعالم .

٧ـ دراسة عددية :

بتطبيق البواقي المشوشة للنموذج ARMA(1,1) لعدد (٦) شركات استثمارية ، وكانت y_{kt} تمثل نسبة العائد من استثمار الشركات التي عددها k خلال الوقت t ، y_{kt-1} نسبة العائد من أسهم تلك الشركات في السوق عند الوقت السابق ، v_{kt} تمثل البواقي المشوشة التي تحدث نتيجة لأحداث خارجية عارضة.وذلك لسلسلة زمنية يومية طولها ٣٦٠ يوم التالي :

$$y_{kt} = \mu_k + \beta y_{kt-1} + v_{kt}.$$

حيث :

$$t = 1,2,...,360 \quad , \quad k = 1,2,...,6$$

بشرط أن μ_k تمثل متغيرات عشوائية لنموذج تأثير عشوائي بمعنى أن :

$$\sum_{k=1}^{6} \mu_k = 0.$$

فإذا كانت قيمة $\beta = 1.171$ فإن النموذج المقدر الذي يمثل ذلك هو :

$$\hat{y}_{kt} = 1.171 y_{kt-1} + v_{kt}.$$

ومن خلال هذه المعادلة يمكن تقدير قيم v_{kt} والتي من خلالها يمكن الحصول على نموذج البواقي المشوشة المقدر للشركات الست بفرض أن قيمة $\alpha = 0.379,$ $\theta = 0.436$ كما يلي :

$$\hat{v}_{kt} = 0.379 v_{kt-1} + 0.4361 \varepsilon_{kt-1}.$$

حيث أنه من خلال المعادلة (2) يمكن القول بأن :

$$v_{kt} = \alpha v_{kt-1} + \theta \varepsilon_{kt-1}.$$

بشرط أن ε_{kt} تمثل متغيرات عشوائية لنموذج البواقي المشوشة بمعنى أن :

$$\sum_{k=1}^{6} \varepsilon_k = 0.$$

وقد أوضحت دراسة .Fogler, H. R. and Ganapathy, S. (1982) أنه إذا كان المعامل $\beta \geq 1.$ دل ذلك على أن البيانات مشوشة ولها تأثير فردي ، وإذا كان غير ذلك كانت البيانات غير مشوشة .

وطبقًا للدراسة العددية السابقة تشير إلى أن الاستثمارات مشوشة ولها تأثير فردي.

٨ـ نتائج الدراسة :

من خلال هذه الدراسة أمكن الحصول على دالة إمكان تقريبية للنموذج المختلط ومن خلالها يمكن تقدير المعالم للحصول على مكونات مصفوفة التغاير التقريبية للنموذج ، والتي تعد بديلا عن حساب مصفوفة التغاير المضبوطة ، كما أن هذه الدراسة ركزت على البواقي المشوشة لبيانات مستقرة للنموذج المختلط ، علاوة على أنها قدمت دالة إمكان مقيدة للنموذج المختلط. ويمكن اختبار التأثير الفردي من خلال قيمة المعلمة β كما أوضحت دراسة Fogler, H. R. and Ganapathy, S. (1982) .

٩ـ مراجع الدراسة:

1- BALTAGI, B. H. (2001) Econometric Analysis of Panel Data. New York: John Wiley & Sons Inc.

2- BALTAGI, B. H. and LI, Q. (1991) A joint test for serial correlation and random individual effects. Statistics and Probability Letters 11, 277–80.

3- BALTAGI, B. H. and LI, Q. (1995) Testing AR(1) against MA(1) disturbances in an error component model. Journal of Econometrics 68, 133–51.

4- BALTAGI, B. H. and LI, Q. (1997) Monte Carlo results on pure and pretest estimators of an error component model with autocorrelated disturbances. Annale D'Economie et de Statistique 48, 69–82.

5- BERAN, J. (1994) Statistics for Long Memory Processes. New York: Chapman & Hall, International Thompson, Inc.

6- BALESTRA, P. (1980) A note on the exact transformation associated with the first-order moving average process. Journal of Econometrics 14, 381–94.

7- FOGLER, H. R. and GANAPATHY, S. (1982) Financial Econometrics. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall.

8- GILMOUR, A. R., THOMPSON, R. and CULLIS, B. R. (1995) Average information REML: an efficient algorithm for variance parameter estimation in linear mixed models. Biometrics 51, 1440–50.

9- LILLARD, L. A. and WEISS, Y. (1979) Components of variation in panel earnings data: American scientists 1960–1970. Econometrica 47, 437–54.

10- LILLARD, L. A. and WILLIS, R. J. (1978) Dynamic aspects of earning mobility. Econometrica 46, 985–1012.

11- PRIESTLY, M. B. (1981) Spectral Analysis and Time Series. London: Academic Press.

12- SEARLE, S. R., CASELLA, G. and MCCULLOCH, C. E. (1992) Variance Components. New York: John Wiley & Sons Inc.