تقدير معالم توزيع ريلاي المعمم في حالة البيانات المراقبة

On Parameters Estimation of Generalized Rayleigh Distribution in case of Censoring Data

أ.د. محمد توفيق البلقيني
أستاذ الرياضيات والإحصاء الإكتواري
كلية التجارة – جامعة المنصورة

د.هشام محمد المنجى
مدرس الإحصاء التطبيقي
كلية التجارة – جامعة المنصورة

خديجة عثمان حسب النبي الأشرم
طالبة ماجيستير بقسم إحصاء تطبيقي
كلية التجارة – جامعة المنصورة

الملخص

تهتم الرسالة بدراسة خصائص توزيع ريلاى المعمم ذي المعلمتين لأنه يعد أحد التوزيعات الاحتمالية المستمرة الهامة في مجالات اختبارات الحياة ، نظراً لكونه يحظى بالعديد من الخواص الإحصائية المناسبة ، وتقدير هذه المعالم بإستخدام طريقة الإمكان الأكبر، واستخدام بيانات العينات الكاملة والعينات المراقبة من النوع الثاني. وأظهرت نتائج المقارنة بينهما أن إستخدام العينات المراقبة من النوع الثاني أفضل من العينات الكاملة، والتي من خلالها نستطيع التوصل إلى نتائج واتخاذ قرارات في زمن أقصر مع مشاهدات أقل دون الحاجة إلى متابعة التجربة حتى فناء آخر مشاهدة .

Abstract

In this paper, we consider the statistical properties of Two-parameter Generalized Rayleigh distribution; one of the important continuous probability distributions in life testing. The Maximum likelihood estimation is used to estimate its parameters. Both Complete sample and Type-II Censored sample data are used and compared. Results reveal that Type-II Censored samples outperform complete samples, by which we can gain our results and make our decisions in a shorter time with less number of observations with no need for carrying on the experiment till last observation fails.

١- مقدمــة

أصبح مجال التحليل الإحصائى لبيانات اختبارات الحياة في الآونة الأخيرة موضع إهتمام الإحصائيون والمهندسين والمهتمين بالإحصاءات الحيوية والطبية في العديد من مجالات البحث والدراسة؛ فغالبية الدراسات الخاصة بتجميع البيانات تركز لُبّ اهتمامها على تحليل بيانات زمن الحياة Lifetime ، وزمن البقاء Survival time ، وزمن الفشل Failure time، ومنها على سبيل المثال لا الحصر دراسة Lawless (١٩٨٢). وتلعب هذه دوراً بارز في كل مجالات الطب والهندسه والعلوم الحيوية المختلفة. ففي مجال الهندسة، يمكن احتساب زمن الحياة من بداية استخدام جهاز ما حتى فشل تشغيله على النحو الصحيح. وفي مجال الطب، يمكن احتساب هذا الزمن بداية من ولادة شخص ما حتى وفاته؛ وكذا في حالة الحمل من بدايته وحتى عملية الوضع. ويمكن الحصول بسهولة على البيانات الخاصة بهذه الأزمنة من خلال اجراء اختبارات الحياة والتي على أساس ملاحظة نتائجها التجريبية يمكن اختيار الشكل التوزيعي وطريقة التقدير لمعالم ذلك التوزيع.

وكانت باكورة الدراسات المعنية بهذا الأمر تلك الدراسة التي قام به كلّ من Sobel &Epstein (١٩٥٣) والتي لاحظا من خلالها أنه إذا تم سحب عينة عشوائية مكونة من n عنصر من عناصر مجتمع ما محدد تحديداً تاماً كاللمبات الكهربائية، والبطاريات، والأجهزة الكهربائية، وغيرها... ثم أخضعت

تلك العينة لاختبار الحياة فإنه مع توالي فشل كل عنصر من هذه العناصر الواحد تلو الأخرعند زمن يتم تحديده وتسجيله على الترتيب $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ - ابتداءً من X_1 وهو زمن الفشل للعنصر الأضعف فيما بينهم، يليه X_2 وهو الزمن الذي يفشل عنده العنصر الضعيف الذي يليه، وهكذا... انتهاءً بزمن فشل العنصر الأخير المتبقي X_n - فإنه يمكن اعتبار النتائج التجريبية المسجلة آنذاك زمن الحياة للعنصر X ، والذي تظهر خلاله عناصر العينة كإحصاءات ترتيبية Order statistics، الأمرالذي يقودنا في النهاية إلى إدراك أهمية نظرية الإحصاء ودورها في تحليل بيانات اختبارات الحياة من حيث تلخيص الخصائص الرئيسية للتوزيع الذي تتبعه هذه البيانات كالوسيط أو المئويات. وبشكل عام فإن لبيانات اختبارات الحياة خاصيتين مميزتين: (١) أن هذه الأزمنة ليست قيماً سالبة ذات توزيعات ملتوية بذيل طويل، (٢) أن بعض المفردات قد تبقى حية حتى بعد انتهاء المدة المخصصة للدراسة. الأمر الذي يجعل أزمنة الفشل الحقيقية غير معلومة بالنسبة لنا، وبالتالي فإن متابعة هذه الإختبارات وإكمالها حتى ظهور آخر مشاهدة يعد أمراً غير عملي.

تعد إطالة الزمن المستغرق خلال هذه الإختبارات، أو كبر حجم العينة بشكل ملحوظ، أو عظم التكاليف اللازمة لإجرائها، أو التعرض لفقدان مفاجئ في العناصر المستخدمة في هذه الاختبارات أسباباً من شأنها أن تحول دون

معلومية أزمنة الفشل بشكل تام، ومن ثم فإن أسلوب العينات المراقبة يعد أمراً مفيداً بل وضرورة مُلحة في مثل هذه الحالات، والتي اتسع مجال تطبيقها في مجالات الصلاحية واختبارات الحياة والدراسات ذات الصلة في حالة عدم استطاعة القائم بالتجربة ملاحظة أزمنة الحياة لجميع وحدات الاختبار وهو ما أشار إليه Abdel-Hamid & Al-Hussaini (٢٠١٤) من خلال توصلهما إلى نتائج واتخاذ قرارات في زمن أقصر بمشاهدات أقل دون الحاجة إلى متابعة التجربة حتى فناء آخر مشاهدة من المشاهدات محل الدراسة.

وهنا ينبغي الفصل بين العينات المراقبة ونظيرتها المبتورة؛ فعملياً يتم إنهاء اختبار الحياة بجزء من المعلومات المتوفرة دون الحصول على بيانات الأعمار لجميع وحدات التجربة، بمعنى أن عدد الوحدات الحية التي تقاوم إنهاء الاختبار معلوم وهنا تسمى العينة مراقبة Censored sample ؛ بينما إذا كان عدد هذه الوحدات غير معلوم نظراً لبتر الاختبار بعد فشل عدد ثابت من الوحدات لتكن r أو بعد انقضاء زمن ثابت وليكن T فتسمى العينة المبتورة Truncated sample. ومن البديهي أنه إذا كانت المعاينة دون إحلال أو استبدال ، أي إذا ما تم اختبار جميع الوحدات n حتى فشلها، فإنه لا يطلق على العينة آنذاك مبتورة أو مراقبة.

تمكن كل من Lawless(١٩٨٢) & Darweesh (٢٠٠٤) من تقسيم العينات المراقبة Censored Samples إلى نوعين اثنين: (١) عينات

المراقبـة المنفـردة Single Censoring. (٢) عينـات المراقبـة المزدوجـة Doubly Censoring. ثم قام Khfagy(2014) بدوره بتقسيم العينـات المراقبة إلى ثلاث أنواع رئيسية: (١) العينات المراقبة المفردة (أحادية المراحل) Single (one stage) Censored Sample. (٢) العينات المراقبة التتابعية (متعددة المراحل) Progressive (multi stage) Censored Sample. (٣) العينات المراقبة الفترية Interval Censored Sample . و تجدر الإشـارة إلـى أن تحديـد نـوع العينـة المراقبـة يقوم علـى الشـروط التـى يحددها الباحث مسبقاً وكذلك على حصر الدراسات السابقة.

وطبقاً للدراسات السابقه فإنه لم يتم حتى الوقت الحالي (وذلك على حد علم الباحثة) استخدام العينات المراقبة من النوع الثاني في طرق التقدير. وفي هذا الصدد، كان إدراج بيانات واقعية عبارة عن أزمنة الحياة لجزء من الماكينة يدعى رومان البلي ذات التجويف العميق Deep grove ball bearing بهدف تحسين جودة النموذج محل الاهتمام في هذه الدراسة.

– أساليب المراقبة Censoring Schemes

تتنوع أساليب المراقبة للعينات المراقبة فيما بين:

أولاً: المراقبـــــــــة مـــــــــن النــــــــــوع الأول

Type I Censoring

في بعض التجارب المتعلقة باختبارات الحياة تتم ملاحظة عينة من المفردات لفترة زمنية محددة سلفاً يرمز لها بالرمز L في. وبالتالي فإن المدة حتى وقوع الحدث محل الاهتمام (Lifetime) تصبح معلومة تماماً للمفردات التي وقع لها الحدث قبل نهاية التجربة أي حتى انتهاء الزمن L . وعامة، إذا كانت n ترمز لعدد المفردات الخاضعة للتجربة وكانت T_i ترمز لوقت الحياة للمفردة رقم i وكانت ترمز L_i لوقت البتر المحدد للوحدة رقم i حيث أوقات الحياة $T_i\,,\; i = 1,2,\dots,n$ هي متغيرات عشوائية مستقلة ذات نفس التوزيع (iid) ، ولها نفس دالة الاحتمال $f(t)$ ودالة الموثوقية $R(t)$. وعند تحقيق أوقات الحياة المشاهدة الشرط $t_i \le L_i\,, i = 1,\dots,n$ ، فإن تمثيل البيانات بعدد من الأزواج للمتغيرات العشوائية (t_i, δ_i) يصبح كالتالي:

$$t_i = \min\{T_i\,, L_i\} \quad \text{and} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & T_i \le L_i \text{ إذا كانت} \\ 0 & T_i > L_i \text{ إذا كانت} \end{cases}$$

حيث:

δ_i تشير إلى ما إذا كان وقت الحياة T_i معلوم أو غير معلوم وهذا يعني أن:

$T_i = t_i$ إذا كان T_i معلوم أي $T_i \le L_i$

$T_i \neq t_i$ إذا كان T_i غير معلوم (بسبب البتر) أي $T_i > L_i$

وتكون لدينا دالة الاحتمال الآتية:

$$f(t_i,\delta_i) \propto [f(t_i)]^{\delta_i}[R(L_i)]^{1-\delta_i}$$

وإذا كانت الأزواج $(t_i , \delta_i) , i = 1 , \dots , n$ مستقلة فإن دالة الإمكان ستكون كالآتي:

$$L_1 \propto \prod_{i=1}^{n}\left[\{f(t_i)\}^{\delta_i}\{R(L_i)\}^{1-\delta_i}\right]$$

ثانيـاً: المراقبة من النوع الثاني

Type II Censoring

في هذا النوع لا تنتهي التجربة عند نقطة زمنية محددة سلفاً وإنما عندما يصل عدد المفردات التي وقع عليها الحدث إلى عدد معين محدد سلفاً ونرمز له بالرمز m وهو أقل من أو يساوي عدد الوحدات موضوعة تحت الاختبار n أي أن $(1 \le m \le n)$. وهنا يكون الزمن حتى إنهاء التجربة متغيراً عشوائياً. فعلى سبيل المثال: يتم إنهاء التجربة في اختبار الحياة عند وقت فشل الوحدة رقم m بدلا من الاستمرار حتى فشل جميع وحدات التجربة، مما يوفر وقتاً وجهداً وتكلفة للباحث. وفي هذه الحالة تتكون البيانات من أوقات حياة عددها m وبشكل مرتب لتمثل الاحصاءات الترتيبية الصغرى Smallest order statistics $T_{[1]} \le T_{[2]} \le \dots \le T_{[m]}$ الناتجة عن عينة حجمها n. وعليه تكون لدالة كثافة الاحتمال المشتركة الصيغة التالية:

تعد مشكلة تقدير المعالم المجهولة في التوزيعات الإحصائية المستخدمة في دراسة ظاهرة ما واحدة من أهم المشكلات التي تواجه باستمرار أولئك المهتمين بمجال الإحصاء التطبيقي. وخلال القرن الماضي تكثفت الدراسات حول اقتراح أنواع جديدة من النماذج في كثير من الدراسات العلمية المختلفة من خلال إجراء تعديلات على النماذج الحالية الخاصة بالتوزيعات المستمرة المختلفة ومنها توزيع ريلاي و تعميمه، والتي صاغها المهتمون بعلوم الإحصاء والرياضيات والهندسة بهدف وضع نموذج رياضي أو تمثيل السلوك المعين للظواهر المختلفة. لذا سعت الدراسة إلى إيجاد تقدير معالم توزيع ريلاي المعمم Generalized Raleigh distribution (GRD) ذي المعلمتين (معلمة الشكل α ومعلمة القياس β) في حالة البيانات الكاملة والبيانات المراقبة من النوع الثاني باستخدام طريقة الإمكان الأكبر Maximum Likelihood Estimation (MLE)، واستخدام أسلوب المحاكاة العددية للتقدير، وإيجاد كلا من التباين (Var) Variance ومتوسط مربع الخطأ Mean Square Error (MSE) ، ثم إجراء مقارنة فيما بينهما لكل معلمة لتقييم آداء المقدرات.

درس كل من Kundu & Raqab (٢٠٠٥، ٢٠٠٦) العديد من طرق التقدير المختلفة لتقدير معالم توزيع ريلاي المعمم GRD. فيما ناقش

Wu & Tsai(٢٠٠٦) مسألة هامة تختص بخطة معاينة القبول Acceptance Sampling Plan لاختبار الحياة Life testing للعينات المبتورة عندما تتبع بيانات الحياة توزيع ريلاي المعمم GRD. في حين تناولت دراسة Madi & Raqab (٢٠٠٩) توزيع ريلاي الأسي Exponentiated Rayleigh distribution باستخدام طريقة التقدير ببيز Bayesian Estimation.

وفي الوقت الذي قام فيه Raqab & Madi (٢٠١١) بتقدير معالم توزيع ريلاي المعمم GRD والتنبؤ ببيانات الوحدات المستبعدة غير الملحوظة في العينات المراقبة التتابعية من النوع الثاني (متعدد المراحل Multi-stage) باستخدام طريقتي التقدير الإمكان الأكبر وبييز، سعى Lio *et al*. (٢٠١١) إلى تقدير معالم توزيع ريلاي المعمم ذي المعلمتين، ولأول مرة، باستخدام بيانات المراقبة التتابعية الفترية من النوع الأول . كما استخدمت في تلك الدراسة طرق التقدير المختلفة : طريقة الامكان الأكبر MLE ، وطريقة العزوم Method of moment (MOM) ، وطريقة تعيين الاحتمالات بالرسم Probability Plot . وأظهرت نتائج المقارنة بين هذه الطرق تفوق طريقة الإمكان الأكبر MLE على غيرها من الطرق؛ إذ كان المقدر أكثر دقة عن غيره من المقدرات – بناءً على نتائج أسلوب المحاكاة العددية المستخدم في

إجراء المقارنة بين طرق التقدير الثلاث عن طريق خوارزم التدنية المتوقعة Expectation Minimization (EM) Algorithm.

- خصائص توزيع ريلاي المعمم في وجود معلمتين GRD (α; β)

١- داله الكثافة الاحتمالية (أنظر شكل (١))

$$f(x;\alpha,\beta) = 2\alpha\,\beta^2 x\, e^{(-\beta x)^2}\left(1 - e^{-(\beta x)^2}\right)^{\alpha-1} \qquad x,\alpha,\beta > 0$$

(1-1)

حيث:

α معلمة الشكل

β معلمة القياس.

٢- دالة التوزيع التراكمية

$$F(x;\alpha,\beta)\left(1 - e^{-(\beta x)^2}\right)^{\alpha} \qquad x,\alpha,\beta\ > 0$$

(2-1)

٣- دالـة البقـاء (الموثوقية)

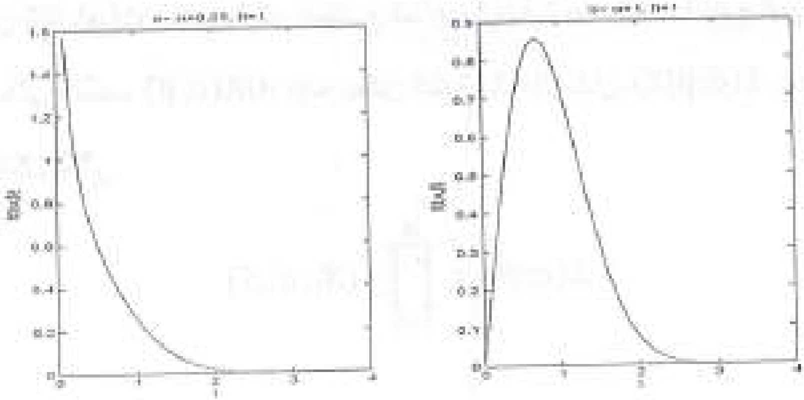
$$S(x;\alpha,\beta) = 1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^2}\right)^{\alpha} \qquad (3-1)$$

٤- دالـة المخاطرة

$$h(x;\alpha,\beta) = \frac{f(x;\alpha,\beta)}{1-f(x;\alpha,\beta)} = \frac{2\alpha\,\beta^{2} x\, e^{(-\beta x)^{2}}\left(1-e^{-(\beta x)^{2}}\right)^{\alpha-1}}{1-\left(1-e^{-(\beta x)^{2}}\right)^{\alpha}}$$

(4-1)

إذا كانت $\alpha < 1/2$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ريلاي المعمم GRD (α; β) هي دالة تناقصية، أحادية المنوال، و ملتوية جهة اليمين لجميع قيم $\alpha < 1/2$. وعليه يمكن أن تكون دالة المخاطرة إما bathtub أو تزايدية اعتماداً على معلمة الشكل α التي تتخذ شكل bathtub إذا كانت $\alpha \leq 1/2$ ، وتكون تزايدية في حالة $\alpha > 1/2$



شكل (١) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ريلاي المعمم GRD (α; β)

- تقدير معالم توزيع ريلاي المعمم ذي المعلمتين$(\alpha; \beta)$ GRD في حالة البيانات الكاملة Complete samples بطريقة الإمكان الأكبر MLE

إن المقدرهو إحصاءة يتحدد معها كيفية استخدام بيانات العينة لتقدير المعالم المختلفة للمجتمع محل الدراسة. ويعد التقدير بطريقة الإمكان الأكبر الطريقة الأوسع استخداماً لتقدير معالم توزيع ريلاي المعمم GRD. إن مقدرات الإمكان الأكبر لمعالم أي توزيع هي تلك القيم التي تعظم لوغاريتم دالة الإمكان.

بفرض أن لدينا عينة عشوائية $x = (X_1, X_2, \ldots \ldots, X_n)$ حجمها n من المشاهدات مسحوبة من مجتمع تجارب أزمنة الحياة الكاملة يتبع توزيع ريلاي المعمم $GR(\alpha, \beta)$، فإنه يمكن كتابة دالة الإمكان $L(\alpha, \beta|X)$ على الشكل التالي

$$L(\alpha; \beta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \alpha, \beta)$$

$L(\alpha;\beta) = [2\alpha\beta]^n \prod_{i=1}^{n} X_i e^{-\beta x_i^2} \prod_{i=2}^{n}\left(1 - e^{-\beta x_i^2}\right)^{\alpha-1}$

(5-1)

$$lnL(\alpha;\beta) = nln(2\alpha) + +nln\beta + \sum_{i=1}^{n} lnx_i - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} ln\left(1-e^{-\beta x_i^2}\right)$$

(6-1)

وبمفاضلة لوغاريثم دالة الإمكان $lnL(\alpha,\beta)$ بالنسبة لمعالم التوزيع α، β ثم مساواة هذه المشتقة بالصفر نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر لكل من α، β كما مايلي

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial(\alpha)} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} ln\left(1 - e^{-\beta X_i^2}\right) \quad (7-1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial(\beta)} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2 e^{-\beta X_i^2}}{1-e^{-\beta X_i^2}}$$

(8-1)

معلومـة فيشـر

بفرض أن لدينا n من المشـاهدات المسـحوبة من مجتمـع تجـارب لأزمنـة الحيـاة الكاملـة $(X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_n)$ ، فـإن التفاضـلات الثانيـه لدالـه الإمكان الأكبر بالنسبة لمعالم التوزيع محل الدراسـة (α, β) تعطـى بالعلاقـة التالية

$$\frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = \frac{-n}{\alpha^2} \tag{8-1}$$

$$\frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2} = \frac{-n}{\beta^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha-1)X_i^2\left\{-X_i^2 e^{-\beta x_i^2}\left(1-e^{-\beta x_i^2}\right)-\left(e^{-\beta x_i^2}\right)\left(X_i^2 e^{-\beta x_i^2}\right)\right\}}{\left[1-e^{-\beta x_i^2}\right]^2} \tag{9-1}$$

$$\frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 e^{-\beta x_i^2}}{1-e^{-\beta x_i^2}} \tag{10-1}$$

وعليه، يتم استخدام مصـفوفة المعلومات الخاصـة بالعينة في التحليل العددي والمحددة على النحو التالي

$$I(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 lnL(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}$$

وبمساواة المشتقة الأولى بالصفر فإننا نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر $\hat{\alpha}_{mle}$ و$\hat{\beta}_{mle}$ كما يلي

$$\hat{\alpha} = \frac{-n}{\sum ln\left(1-e^{-\beta x^2}\right)} \quad (11-1)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum x^2+(1-\hat{\alpha})\sum\frac{x^2 e^{-\beta x^2}}{1-e^{-\beta x^2}}} \quad (12-1)$$

- **تقدير معالم توزيع ريلاي المعمم ذي المعلمتين (α; β) GRD في حالة البيانات المراقبة من النوع الثاني Type-II Censored samples بطريقة الإمكان الأكبر MLE**

وفقاً لعينة المراقبة من النوع الثاني فإن دالة الإمكان تعطى على النحو التالي

$$L(\alpha,\beta,t) = \frac{n!}{(n-k)!}\prod_{i=1}^{k} f(t_i)[1-F(t_k)]^{n-k}$$

$$L(\alpha,\beta,t)=\frac{n!}{(n-k)!}\prod_{i=1}^{k}2\alpha\beta t_i e^{-\beta t_i^2}\left(1-e^{-\beta t_i^2}\right)^{\alpha-1}\Big[1 - \left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{\alpha}\Big]^{n-k}$$

(13-1)

$$lnL(\alpha,\beta)=lnn!-ln(n-k)!+kln(2\alpha\beta)+\sum_{i=1}^{k}\ln t_i - \beta\sum_{i=1}^{k}t_i^2+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{k}ln\left(1-e^{-\beta t_i^2}\right) + (n-k)kln\left[1-\left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{\alpha}\right]$$

(14-1)

بمفاضلة لوغاريثم دالة الإمكان $lnL(\alpha,\beta)$ بالنسبة للمعالم α,β نحصل على

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial(\alpha)}=\frac{k}{\alpha}+k(\alpha-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{k}ln\left(1-e^{-\beta t_i^2}\right) - (n-k)\frac{\left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{\alpha}ln\left(1-e^{-\beta t_k}\right)}{1-\left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{\alpha}}$$

(15-1)

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial(\beta)} = \frac{k}{\beta} - \sum_{i=1}^{k} t_i^2 + (\alpha-1)^k \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^2 e^{-\beta t_i^2}}{1-e^{-\beta t_i^2}} - (n-k)\frac{t_k \alpha \left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta t_k}}{1-(1-e^{-\beta t_k})^{\alpha}}$$

(16-1)

بمساواة المشتقة الأولى لكل منهما بالصفر نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر α_{mle}وβ_{mle} . وبحل معادلتي التفاضل في كل من (15-1) و (16-1) نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر، علماً بأنه لا يوجد حل مغلق (حل صريح explicit solution) لنظام المعادلات التفاضلية السابق.

ويتم مفاضلة دالة الإمكان الأكبر تفاضلاً ثانياً بالنسبة للمعالم α, β كما يلي

$$\frac{\partial^2 \ln(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} = \frac{-k}{\alpha^2} + k(k-1)(\alpha-1)^{k-2} \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1-e^{-\beta t_i^2}\right) - (n-k)\ln(1-e^{-\beta t_k}) \left[\frac{\left(1-\left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{\alpha}\right)\left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{\alpha} + \left(1-e^{-\beta t_k}\right)^{2\alpha}}{[1-(1-e^{-\beta t_k})^{\alpha}]^2}\right]$$

(17-1)

$$\frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2} = \frac{-k}{\beta^2} - (\alpha-1)^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^2\left[t_i^2 e^{-\beta t_i^2}\right]}{\left(1-e^{-\beta t_i^2}\right)^2} - \alpha(n-k)$$

$$\cdot \frac{\left[\left(1-(1-e^{-\beta t_k})^{\theta}\right)(1-e^{-\beta t_k})^{\theta-1} e^{-\beta t_k}(-t_k) + e^{-\beta t_k}(\theta-1)(1-e^{-\beta t_k})^{\theta-2}(e^{-\beta t_k})(t_k)\right] - (1-e^{-\beta t_k})^{\theta-1}(e^{-\beta t_k})\left(\theta(1-e^{-\beta t_k})^{\theta-1}(e^{-\beta t_k})(t_k)\right)}{[1-(1-e^{-\beta t_k})^{\theta}]^2}$$

(18–1)

$$\frac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha}$$
$$= k(\alpha-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^2 e^{-\beta t_i^2}}{1-e^{-\beta t_i^2}}$$
$$-\Bigg(n$$
$$- k\frac{\left[1-(1-e^{-\beta t_k})^{\theta}\right]\left[(1-e^{-\beta t_k})^{\theta-1}(t_k)(e^{-\beta t_k}) + [ln(1-e^{-\beta t_k})](1-e^{-\beta t_k})^{\theta-1} e^{-\beta t_k(t_k)}\right]}{[1-(1-e^{-\beta t_k})^{\theta}]^2}\Bigg)$$
$$+ \frac{[ln(1-e^{-\beta t_k})](1-e^{-\beta t_k})^{2\theta-1} e^{-\beta t_k(t_k)}}{1}$$

(19–1)

وذلك لاستخدامهما في حساب مصفوفة المعلومات الخاصة بالعينة في التحليل العددي والمحددة بالشكل التالي

$$I(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2 lnL(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2 ln(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2} \end{bmatrix}$$

٣- المنهج التطبيقي

يعرض البحث فى الجزء التالي آلية استخدام دالة الإمكان الأكبر للحصول على مقدرات الإمكان الأكبر لمعالم التوزيع $(\alpha;\beta)$ GRD، نظراً لعدم امكانية تقدير قيمتيهما تحليلياً إلا من خلال حلها بالطريقة العددية واستخدام أسلوب المحاكاة لهذا الغرض. وتقوم الباحثة بتوليد بيانات توزيع ريلاي المعمم ذو المعلمتين من خلال وضع قيم إفتراضية لكل من α,β ثم إجراء المقارنة فيما بينهما باستخدام برنامج *MathCAD 2001*.

وفي حالة العينات الكاملة Complete samples، استخدمت الباحثة برنامج (*MathCAD* 2001) لتوليد معالم المجتمع $(\alpha;\beta)$ GRD)محل الدراسة على مجموعة مختلفة من أحجام العينة $n = 10,20,30,50,100$، تم بتكرار العملية عدد $N = 1000$ مرة لقيم مختلفة لمعالم التوزيع محل الدراسة α,β، تم احتساب بعض الخصائص الهامة مثل التحيز Bias ، والتحيز المطلق النسبي (RAB) Relative Absolute Bias ، ومتوسط مربع الخطأ MSE ، ومتوسط مربع الخطأ النسبي (RMSE) Relative MSE ، والتباين .Var .

جدول (١) ملخص لجميع قيم α, β التقديرية حسب تقدير الإمكان الأكبر الناتجة من إستخدام برنامج ***MathCAD 2001*** في حالة البيانات الكاملة

Table (1): Estimates, Bias, RAB, Var., MSE & RMSE. The MLEs based on complete samples for $\alpha = 4/8$, $\beta = 9/8$, n=10, 20, 30, 50, 100

n	parameters	Estimate	Bias	R A B	VAR	MSE	RMSE
10	$\alpha = 0.5$	$\hat{\alpha} = 0.516$	0.516	0.016	6.014×10^{-3}	6.259×10^{-3}	0.013
	$\beta = 1.125$	$\hat{\beta} = 1.842$	0.717	0.637	1.367	1.881	1.672
20	α=0.5	=0.516$\hat{\alpha}$	0.016	0.031	6.014×10^{-3}	6.259×10^{-3}	0.013
	β=1.125	$\hat{\beta} = 1.326$	0.201	0.178	0.071	0.111	0.099
30	α=0.5	=0.543$\hat{\alpha}$	0.043	0.085	0.017	0.019	0.038
	β=1.125	$\hat{\beta} = 1.428$	0.303	0.269	0.227	0.319	0.284
50	α=0.5	=0.53$\hat{\alpha}$	0.03	0.061	8.867×10^{-3}	9.791×10^{-3}	0.02
	β=1.125	$\hat{\beta} = 1.363$	0.238	0.212	0.106	0.162	0.144
100	α=0.5	=0.509$\hat{\alpha}$	9.349×10^{-3}	0.019	3.906×10^{-3}	3.994×10^{-3}	7.987×10^{-3}
	β=1.125	$\hat{\beta} = 1.31$	0.185	0.165	0.047	0.081	0.072

جدول (٢) ملخص لجميع قيم α, β التقديرية حسب تقدير الإمكان الأكبر الناتجة من إستخدام برنامج *MathCAD 2001* في حالة إستخدام البيانات المراقبة من النوع الثاني

Table (2): Estimates, Bias, RAB, Var., MSE & RMSE. The MLEs based on Type-II Censored samples for α=4/8, β=9/8, n= 10, 20, 30 ,50, 100

N	paramaters	Estimate	Bias	R A B	VAR	MSE	RMSE
10	$\alpha = 0.5$	$\hat{\alpha} = 1.662$	1.162	2.323	8.062	1.35	2.7
	$\beta = 1.125$	$\hat{\beta} = 3.469$	2.344	2.084	6.599	12.095	10.751
20	$\alpha = 0.5$	$\hat{\alpha} = 1.78$	1.28	2.561	1.293×10^{-3}	1.639	3.279
	$\beta = 1.125$	$\hat{\beta} = 2.83$	1.705	1.516	1.484	4.392	3.904
30	$\alpha = 0.5$	$\hat{\alpha} = 1.334$	1.334	2.668	4.049×10^{-3}	1.78	3.559
	$\beta = 1.125$	$\hat{\beta} = 2.712$	1.587	1.411	0.876	3.395	3.017
50	$\alpha = 0.5$	$\hat{\alpha} = 1.885$	1.385	2.771	1.065×10^{-3}	2.054	3.839
	$\beta = 1.125$	$\hat{\beta} = 2.622$	1.497	1.331	0.4	2.642	2.349
100	$\alpha = 0.5$	$\hat{\alpha} = 1.933$	1.433	2.866	1.492×10^{-3}	2.238	4.108
	$\beta = 1.125$	$\hat{\beta} = 2.555$	1.43	1.271	0.192	1.92	1.989

مناقشـة النتائـج :

بعد عرض نتائج المحاكاة ، توصلت الباحثة باستخدام *MathCAD 2001* وإدراجها في جدول البيانات الكاملة المشار إليه بجدول (١) وفي جدول البيانات المراقبة من النوع الثاني المشار إليه بجدول (٢)،إلى الاستنتاجات التالية:

١- تزداد بشكل عام دقة المقدرات بازدياد حجم العينة.

٢- كلما زاد حجم العينة كلما قل التحيز (وبالتالي التحيز المطلق النسبي) ومتوسط مربع الخطأ MSE، وهكذا نتحقق من صحة خاصية الإتساق Consistency لجميع المعالم.

٣- وفقاً لجدول (١) فقد وجدنا أنه عندما زاد حجم العينه من n=10 إلى n=100 قل متوسط مربع الخطأ.

٤- وفقاً لجدول فقد وجدنا أنه عندما زاد حجم العينة من n=10 إلى n= 100 قل متوسط مربع الخطأ.

٥- يتفوق أداء مقدرات الإمكان الأكبر عن أداء متوسط مربعات الخطأ وذلك من حيث التحيز و متوسط مربعات الخطأ.

ووفقاً للجداول السابقة (١) ، (٢) فإن أداء مقدرات الامكان الأكبر لمعلمتي التوزيع $(\alpha;\beta)$ GRD تتفوق في حالة البيانات المراقبة عن نظيرها في حالة البيانات الكاملة نظراً لتمتع قيم هذه المقدرات بخاصية

Consistency. مـــن هنـــا نـــرى أن توزيـــع ريـــلاي المعمـــم ذي المعلمتين$(\alpha;\beta)$ GRD هو الأنسب لهذا النوع من البيانات.

- عينـة الدراسـة على أساس بيانـات حقيقيـة

في هذا الجزء نعرض تحليل البيانات. حيث استخدمت الباحثة مجموعة البيانات الحقيقية الواردة في دراسة Sanku Dey (٢٠١٤)، وهي عبارة عن بيانات كاملة وبيانات المراقبة من النوع الثاني خاصة بأوقات فشل عينة حجمها 23 رومان بلي مرتبة بحسب تحملها الحياة.

وقبل تحليل البيانات المتولدة من مجموعة البيانات الأصلية الخاصة برمان البلي، قسمت الباحثة بيانات العينة العشوائية محل الدراسة إلى 23 من البيانات الكاملة و18 من البيانات المراقبة من النوع الثاني بهدف عقد المقارنة بينهم للوصول إلى أفضل آداء للمقدرات. وتم إجراء الحسابات العددية المطلوبة واحتساب مقدرات الإمكان الأكبر للمعالم المجهولة – بعد إفتراض قيمتيهما β,α في عملية المحاكاة باستخدام برنامج *MathCAD 2001*، ويعرض جدولي (٣) ، (٤) بعض النتائج التي توصلت إليها الباحثة لنوعين من البيانات: البيانات الكاملة والبيانات المراقبة من النوع الثاني بناءً على قيم لوغاريثم دالة الإمكان.

جدول (٣) تقدير المعالم بطريقة MLE في حالة البيانات الكاملة

Parameters	Estimate
α	1.198
β	1.712

جدول (٤) تقدير المعالم بطريقة MLE في حالة البيانات المراقبة من النوع الثاني

Parameters	Estimate
α	1.821
β	1.67

بناءً على ما سبق فإن توزيع ريلاي المعمم ذي المعلمتين (α; β) GRD يناسب بيانات العينات المراقبة من النوع الثاني عن بيانات العينة الكاملة. وبالتالي، فإن تباين مقدرات الإمكان الأكبر لكل من معلمتي الشكل والقياس في حالة البيانات الكاملة هو $Var(\hat{\alpha})=1.198$ و $Var(\hat{\beta})=1.712$ على التوالي. بينما في حالة البيانات المراقبة من النوع الثاني هو $Var(\hat{\alpha})=1.821$ و $Var(\hat{\beta})=1.67$ على التوالي.

وجدت الباحثة وفقاً لجدول (٣) وجدول (٤) أن قيم مقدرات الامكان الأكبر في حالة البيانات المراقبة من النوع الثاني تتفوق عن نظيراتها في حالة البيانات الكاملة. ومن هنا يبدو أن توزيع ريلاي المعمم ذي المعلمتين GRD (α; β) هو الأنسب لمثل هذا النوع من البيانات.

النتائج:

- تناولت الدراسة خصائص توزيع ريلاى المعمم GRD وتبين أنه يتميز بالمرونة، الأمر الذى أكسبه أشكالاً متنوعة تلائم وضعه كنموذج لوصف بيانات لها أنواع مختلفة من دوال معدل المخاطرة سواء المتزايدة ، أوالمتناقصة ، أوذات شكل bathtub المقلوب.
- تمكنت الدراسة من تقدير معالم توزيع ريلاى المعمم فى حالة وجود معلمتين $(\alpha; \beta)$ GRD بطريقة الإمكان الأكبر في حالة البيانات الكاملة والبيانات المراقبة من النوع الثاني.
- أظهرت تجربة المحاكاة أنه كلما زاد حجم العينة كلما قل التحيز (وبالتالي التحيز المطلق النسبي) ومتوسط مربع الخطأ MSE، وهكذا نتحقق من صحة خاصية الإتساق Consistency لكل معالم التوزيع.
- تبين أيضاً من خلال المحاكاة أن التقدير فى حالة البيانات المراقبة من النوع الثاني أفضل منه في حالة البيانات الكاملة.
- من خلال التجربة التطبيقية فإنه عند تقدير معالم التوزيع محل الدراسة بطريقة الإمكان الأكبر في حالتي العينات الكاملة والعينات المراقبة من النوع الثاني ووضع قيم إفتراضية لمعالم التوزيع يكون التقدير في حالة العينات المراقبة من النوع الثاني أفضل من نظيرتها في حالة العينات الكاملة.

التوصيــات:

وهنا توصي الباحثة بتقديرالمعالم بطريقة بييز وبالتطبيق على العينات التتابعية من النوع الثاني وعلى بيانات مجموعة وبيانات مراقبة وذلك لتوزيع ريلاي المعمم.

أبحاث مستقبلية مقترحة :

- تقترح الباحثة استخدام طريقة بييز عند تقدير معالم توزيع ريلاي المعمم والمقارنة فيما بين طرق التقدير المختلفة.