استخدام التوزيعات الاحتمالية المدمجة في تسعير التأمين
"دراسة تطبيقية على السوق السعودي"

د/ محمد مصطفى شهاب الدين
مدرس الإحصاء التطبيقي
بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة – جامعة المنصورة

د/ محمود عبد العال مشعال
أستاذ الرياضيات والتأمين
كلية التجارة – جامعة المنوفية
والأستاذ المشارك بقسم الاقتصاد والتمويل
كلية إدارة الأعمال - جامعة الطائف

2024

المستخلص:

تستخدم شركات التأمين الأساليب الكمية والإحصائية في تسعير منتجاتها التأمينية لتحديد قسط الخطر، حيث تستند شركات التأمين إلى نظرية الخطر والتأمين والتي تعتمد على أن تحقق الخطر وما قد يترتب علية من خسائر مالية إنما يخضع لتوزيع احتمالي معين، بمعنى آخر إذا تحقق الخطر فإن الخسائر الناجمة عنه تخضع لتوزيع احتمالي معين، كما أن هذا التوزيع الاحتمالي للخسارة قد يكون توزيعا منفصلاً أو توزيعاً متصلاً.

والتوزيعات الاحتمالية المستخدمة في تسعير التأمين هى التوزيعات الاحتمالية البسيطة (ذات معلمة أو معلمتين) أو التوزيعات الاحتمالية المركبة (متعددة المعالم).

وتعتبر التوزيعات الاحتمالية المركبة من النماذج الإحصائية حديثة الاستخدام وهى الأفضل لشركات التأمين لما توفره من مزايا في التكلفة التأمينية للوثائق المركبة أو القضاء على بعض الصعوبات التي تواجه شركات التأمين مثل الفصل في التعويضات بسبب مبدأ السبب القريب. كما أن التوزيعات المركبة أكثر دقة من التوزيعات البسيطة في التسعير (لكثرة عدد معالم التوزيع المركب).

وفى هذا البحث تم بناء دالة احتمالية للتوزيع المركب وهو توزيع (بواسون – ثنائي الحدين السالب)، وتوزيع (جاما – الأسى)، وبعدها قمنا باستخدام التوزيعات المركبة السابقة في التوصل إلى توزيع مركب من عائلة بيرسون والذى تم استخدامه في تسعير الأخطار المركبة وهى خطر الحريق وأخطار السيارات، بالتطبيق على صناعة الحديد والصلب بالمملكة العربية السعودية، ولقد توصل البحث إلى نتائج مفيدة وهى أن تسعير خطرين معا لوثيقة مركبة يكون تكلفتها أقل من تسعير كل خطر على حدة في الوثيقة المفردة.

الكلمات الدالة:

سعر التأمين، الوثيقة المركبة، التوزيعات الاحتمالية المدمجة، خطر الحريق، أخطار السيارات

Abstract:

Insurance companies use quantitative and statistical methods to price their insurance products in order to determine the risk premium. These companies rely on the theory of risk and insurance, which is based on the assumption that the occurrence of a risk and the financial losses that may result from it follow a specific probability distribution. In other words, if the risk occurs, the resulting losses follow a certain probability distribution. This probability distribution of loss can either be discrete or continuous.

The probability distributions used in pricing insurance include simple probability distributions (with one or two parameters) or compound probability distributions (with multiple parameters). Compound probability distributions are considered modern statistical models, and they are particularly beneficial for insurance companies because they offer advantages in the cost of insurance policies or help address challenges faced by insurers, such as resolving claims under the principle of proximate cause. Moreover, compound

distributions are more accurate than simple distributions in pricing (due to the greater number of parameters in the compound distribution).

In this research, a probability function was constructed for the compound distribution, specifically the (Poisson – Negative Binomial) distribution, and the (Gamma – Exponential) distribution. Subsequently, these compound distributions were used to derive a compound distribution from the Pearson family, which was applied to price combined risks such as fire and vehicle risks in the steel industry in Saudi Arabia. The study concluded with useful results, namely that pricing two risks together in a combined policy results in lower costs compared to pricing each risk individually in separate policies.

Keywords:

Insurance price , Combined policy, Compound probability distributions, Fire risk, Vehicle risks

الإطار النظري للدراسة

أولا: مقدمة:

نظام التسعير في شركات التأمين له دور هام في نجاح واستمرار تلك الشركات في السوق، حيث تطورت عملية التسعير حاليا حتي تم استخدام الأساليب الكمية لتحديد سعر التأمين سواء كانت هذه الأساليب تتمثل في تحليل الانحدار الذي يعتمد علي العوامل المؤثرة في درجة الخطر (J. 1983 David , Cummins,)، أو التوزيعات الاحتمالية والتي فيها يتم الاعتماد علي القيمة المتوقعة لدالة التوزيع والانحراف المعياري الذي يمثل مخصص التقلبات المتوقعة (Michael A, 2001,p.174)، أو نماذج التوزيعات الإجمالية لبيرسون والتي تعتمد علي التعبير عن الظاهرة مرة واحدة بمعني أنه بدلا من الاعتماد في التوزيعات الاحتمالية علي توقع عدد الحوادث وحجم الخسارة، هنا يتم الحصول علي التوقع الإجمالي مباشرة (Andreev, A. ,kanto, A. and Malo, P.2005)

كل ما سبق الهدف منه هو الوصول إلى السعر الذى يتسم بالعدالة والكفاية والمعقولية المطلوبة والمتناسبة مع حجم الخسائر وخبرة التعويضات الحالية والمتوقعة.

وهناك مجموعه من الاعتبارات التي يجب أخذها في الحسبان عند حساب تكلفة الخدمة التأمينية وهى تمثل اعتبارات أساسية لتسعير التأمينات العامة وهى (Michael A, 2001,p.174):

١- أن يكون السعر كافياً لتغطية قيمة المطالبات.

٢- أن يكون السعر عادلاً بمعنى أن يتناسب طردياً مع درجة الخطر.

٣- أن يأخذ فى الاعتبار معدلات التقلبات فى الخسارة.

٤- وجود هامش ربح ومصروفات إدارية.

وعلى الرغم من تعدد طرق التسعير واختلاف الأساليب الكمية المستخدمة فى التقديرات الخاصة بحساب عناصر قسط التأمين إلا أنها تتفق جميعها فى محددات القسط الصافي وتنحصر فى عوامل ثلاثة هي (شاهين، ١٩٩٤، ص ٣٩):

- معدل تكرار الحوادث.
- المتوسط العام للخسارة.
- معدل الفائدة.

وتستند نظرية الخطر والتأمين إلى مفهوم أساسي وهو أن تحقق الخطر وما قد يترتب علية من خسائر مالية، إنما يخضع لتوزيع معين، وبمعنى آخر أنه في حالة تحقق الخطر فإنه يصاحبه توزيع احتمالي معين للخسائر الناجمة عن هذا الخطر (Hossack, I. B.,1999).

وفيما يتعلق باختيار التوزيعات المناسبة يكون الأقرب لعدد المطالبات هي توزيع بواسون وتوزيع ذو الحدين السالب، والتوزيعات الأقرب لقيم المطالبات (التعويضات) هي التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي وتوزيع

جاما (Nie, H , and Chen, H.,2007)، ويرجع استخدام التوزيعات الاحتمالية المدمجة الى أهميتها في تسعير التأمين، حيث أن كثرة عدد معالم التوزيع المدمج تؤدى إلى الدقة في التقدير وبالتالي الدقة في تسعير التأمين (Feller,1983) .

ثانيا: مشكله البحث:

تعتمد شركات التأمين في التسعير على أساس إيجاد القيمة المتوسطة المحسوب علي أساسها السعر لكل الأخطار الفردية المغطاة بوثيقة تأمين جميع الأخطار الصناعية، وهذه الأسعار قد لا تناسب ظروف السوق المحلى (لا يتناسب سعر التأمين مع درجات الخطر)، ولهذا الوضع تأثير سالب على نتائج شركات التأمين.

ثالثا: هدف البحث:

يهدف البحث إلى استخدام التوزيعات الاحتمالية المدمجة، وذلك في تسعير تأمينات الممتلكات بالتطبيق على صناعة الحديد، وبطريقة تتناسب مع درجة الخطورة، حتى نتمكن من تطبيق النموذج المقترح في سوق التأمين.

رابعا: أهمية البحث:

يفضل استخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة في تسعير وثائق التأمين المركبة لوجود عدة فوائد لا توجد في غيرها من الطرق العادية (التوزيعات البسيطة)، والتي يمكن إيجازها فيما يلى:

- كثرة عدد المعالم في التوزيع المركب وهو ما يؤدى إلى الدقة في نتائج تسعير الخطر.
- انخفاض التكلفة التأمينية للوثيقة المركبة لانخفاض المصاريف المرتبطة بإصدار الوثيقة (مثل المصاريف الإدارية والعمومية وتكاليف الإنتاج).

خامسا: مجتمع البحث وحدوده:

تشمل حدود البحث ما يلي:

١- قطاع الصناعات: سوف يتم التطبيق على صناعة الحديد في المملكة العربية السعودية.

٢- الفترة الزمنية: سيتم استخدام بيانات صناعة الحديد، وذلك خلال الفترة 2011- 2022 كفترة دراسة لهذا البحث.

٣- الأخطار المراد تسعيرها: يتم تسعير الأخطار المستقلة وهي خطر الحريق، وخطر السيارات.

سادسا: أسلوب البحث:

تقوم الدراسة على أساس التحليل العلمي لمفهوم وأهمية تطبيق التوزيعات الاحتمالية المدمجة وأساليبها المختلفة، كما تهتم الدراسة أيضاً بالجوانب التطبيقية بتسعير خطر الحريق وخطر السيارات، في صناعة الحديد مستخدما في ذلك التوزيعات الاحتمالية المدمجة.

سابعاً: النموذج المقترح:

النموذج المقترح هو التوزيعات الاحتمالية المدمجة وهي عبارة عن نموذج مدمج من توزعين احتماليين، ويشمل أسلوب الدمج ما يلى:

أ- هو دمج توزيع منفصل مع توزيع منفصل (قد يكون نفس التوزيع أو مختلف)، بمعنى دمج التوزيعات الممثلة لعدد الحوادث في الأخطار المختلفة لتكون توزيعاً واحداً.

ب- دمج توزيع متصل مع توزيع متصل (قد يكون نفس التوزيع أو مختلف) بمعنى دمج التوزيعات الممثلة لحجم الخسائر في الأخطار المختلفة لتكون توزيعاً واحداً.

ج- وسوف نصل إلى التوزيع المركب المقترح من خلال الدمج بين الخطوتين السابقتين، مستخدما في ذلك منحنيات بيرسون .

ثامناً : الدراسات السابقة :

١- قدم الباحث (إسماعيل) في عام ٢٠٠٥ بحثاً بعنوان" تسعير وثيقة التأمين الشاملة للفنادق والقرى السياحية" وفي هذه الدراسة اعتمد الباحث في تحديد السعر العادل للأخطار التي تشملها وثيقة التأمين الشاملة للفنادق والقرى السياحية علي استخدام نظرية المصداقية، واعتمد علي نماذج الخطر التجميعية ، وتم استخدام التحليل البيزي للبيانات في تقدير عدد المطالبات المتوقع علي مستوي محفظة التأمين ، وكذلك قيمة التعويضات المتوقعة ، وذلك من خلال التوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات ، والتوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات، ثم إيجاد التوزيع الاحتمالي الإجمالي لقيم المطالبات.

٢- قدم الباحث (الخواجة) في عام 2008 بحث بعنوان "تسعير وثائق التأمين المركبة باستخدام التوزيعات الاحتمالية "، وتوصل البحث الى وجود اختلاف بين الوثائق الفردية والوثائق المركبة ، فتحقق الخطر في الوثائق الفردية (التي تغطى خطر واحد) وما قد يترتب عليه من خسائر مالية إنما يخضع لتوزيع احتمالي بسيط (وهو وتوزيع احتمالي منفصل لعدد الحوادث لحساب معدل تكرار الحوادث، وتوزيع احتمالي متصل للخسارة لحساب متوسط الخسارة الواحدة)، في حين أن تحقق الخطر في الوثائق المركبة وما قد يترتب عليه من خسائر مالية إنما يخضع لتوزيع احتمالي مركب (وهو دمج توزيع منفصل مع توزيع منفصل ودمج توزيع متصل مع توزيع متصل ، أو دمج توزيع منفصل مع توزيع متصل).

٣- وفى دراسة أخرى للباحثان (أمين، النحاس) في عام ٢٠٢٢، بعنوان تسعير وثيقة التأمين البحري اجسام سفن " اللنشات" باستخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة في سوق التامين المصري- دراسة كمية"، حيث هدفت هذه الدراسة إلى وضع نموذج تسعير وثيقة التأمين البحري أجسام سفن

"اللنشات" باعتبارها أحد أنوع السفن التي تتوجد بكثرة في سوق التأمين المصري بالاعتماد على البيانات الفعلية للسوق المصري باستخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة.

٤- وفى دراسة، النصراوي، "التحويل التربيعي للتوزيع المركب الجديد (اسي- فريجت)"، عام ٢٠٢٢، تمّ بناء دالة احتمالي للتوزيع المركب وهو (اسي- فريجت) ذو الثلاثة معلمات معلمة شكل ومعلمتين قياس عن طريق دمج توزيعين هما التوزيع (الاسى) والتوزيع (فريجت) وينتج التوزيع المركب (اسي- فريجت).

٥- قدم الباحثان عام ٢٠١٦ (Qutb, N., & Rajhi, E) بحثا لتوزيع ويبل المركب وتمت دراسة الخصائص الرياضية وقدرت معالم التوزيع المركب(Weibull Compound) باستعمال طريقة العزوم ، بيز ، والإمكان الأعظم واثبتوا انه أكثر تناسقا من توزيع ويبل المفرد وطبق على بيانات تخص الكابلات الكهربائية.

٦- في دراسة أخرى عام ٢٠٠٤ (KOTZ, SARALEES) تضمن نموذجا احتماليا مركباً (بيتا- جامبل) ،حيث قام باشتقاق بعض الخصائص المتمثلة بدالة التوزيع الاحتمالي ودالة بحثا تضمن انموذجا أحتمالياً معدل الخطر والعزم وكذلك التوزيع المتقارب لإحصاءات الرتب المتطرفة وتمّ تقدير معالم النموذج بطريقة الإمكان الأعظم وتم تطبيق النموذج على بيانات في الجانب الهندسي.

تاسعاً: خطه البحث:

لتحقيق أهداف البحث ومنهجية البحث تم تنظيم البحث ليتضمن المباحث التالية:

الإطار العام للدراسة.

المبحث الأول: طرق التسعير

المبحث الثاني: التوزيعات الاحتمالية المدمجة وتسعير التامين

المبحث الثالث: التطبيق العملي للتسعير.

النتائج والتوصيات.

المبحث الاول
طرق التسعير

لقد مر التسعير بعدة مراحل، فقد يكون أساس التسعير الخطر الواحد أو مجموعه من الأخطار المتجانسة مع بعضها أو يكون أساسه وثيقة أو مجموعه من الوثائق المركبة من عدة أنواع من الأخطار أو الوثائق المتعلقة بمشروع معين، كما أن هذا التسعير قد يكون مع وجود خبرة كافية، أو مع وجود خبرة ولكنها دون مستوي الكفاية أو حتي قد يكون التسعير مع عدم وجود خبرة، وتطورت عملية التسعير حاليا حتي تم استخدام أساليب إحصائية لتحديد سعر التأمين سواء كانت هذه الأساليب تتمثل في تحليل الانحدار الذي يعتمد علي العوامل المؤثرة في درجة الخطر، أو التوزيعات الاحتمالية والذي يعتمد علي القيمة المتوقعة لدالة التوزيع والانحراف المعياري الذي يمثل مخصص التقلبات المتوقعة، أو نماذج التوزيعات الإجمالية لبيرسون والتي تعتمد علي التعبير للظاهرة مرة واحدة بمعني أنه بدلا من الاعتماد في التوزيعات الاحتمالية علي توقع عدد الحوادث وحجم الخسارة هنا يتم الحصول علي التوقع الإجمالي مباشرة. كل ما سبق الهدف منة هو الوصول إلى السعر الذي يتسم بالعدالة والكفاية والمعقولية المطلوبة والمتناسبة مع حجم الخسائر وخبرة التعويضات الحالية والمتوقعة.

لقد تطورت طرق التسعير في التأمين بصفة عامة وفي التأمينات العامة بصفة خاصة للوصول إلي طريقة مناسبة للتسعير، وسواء كان ذلك التسعير لخطر واحد أو لمجموعة من الأخطار المتشابهة أو لوثيقة واحدة أو لمجموعة وثائق أو وثيقة مركبة تغطي مجموعة أخطار في منشأة معينة، وقد يتم حساب السعر علي أساس الخبرة السابقة وقد يتم حسابه بطريقة أخري لا تعتمد علي الخبرة فقط، وسواء تم التسعير علي أساس الخبرة أو علي أساس أي طريقة أخري فإن هناك شروط يجب توافرها في التسعير، بمعني أن النظام الأساسي لأي تشريع تأمين يتطلب عادة أن يكون السعر محققا لعدة عناصر (مرجان ،١٩٧٣،ص ٨٧) هي: أن يكون السعر كافيا، أن يكون السعر معقولا، وأن يكون السعر وفقا لأسس عادلة.

وأهم طرق التسعير ما يلى:

أولاً: طريقة التسعير التحكمي (التقديري): تعتمد هذه الطريقة على الخبرة الذاتية التي يتمتع بها مقدورا الخسائر في شركات التأمين (الاكتواريون) .

ثانيا: طريقة التسعير حسب التعريفة المعدلة: أسعار التأمين بموجب هذه الطريقة تعدل من حين لآخر حسب الخبرة التي تظهر لشركة التأمين من سنة لأخرى. ومن أهم طرق التعديل ما يلى (شاهين ،١٩٩٤، ص ٣٩):

أ- طريقة الجداول الخاصة: تعتمد هذه الطريقة على الصفات النمطية للشيء موضوع التأمين، ويحدد السعر الأساسي طبقاً للارتفاع أو الانخفاض في درجة احتمال حدوث الخطر.

ب-طريقة الخبرة الخاصة: تستخدم في حالة التأمين على الأخطار الكبيرة وتعتمد على الخبرة السابقة للخسائر لكل مؤمن له على حده.

ج- طريقة التسعير بأثر رجعي: وفق هذه الطريقة تقوم شركة التأمين عند بداية مدة الوثيقة بتحصيل القسط في ضوء الخبرة الخاصة بحامل الوثيقة، ثم تقوم بإعادة حساب القسط في نهاية مدة الوثيقة على أساس الخسائر الفعلية، ثم عمل تسوية مالية بين الشركة والمؤمن لهم.

ثالثاً: التسعير الطبقي (عبده الديب، ١٩٩٢، ص٦):

تعرف هذه الطريقة بالتسعير الشامل للطبقات حيث تقسم الأخطار إلى طبقات حسب الصفات الرئيسية لكل قسم، ثم ينظم دليل أسعار لكل قسم من تلك الأقسام ليبين سعر التأمين لمجموعة الأخطار المتشابهة الواردة فيه، تعكس هذه الطريقة معدل الخسارة الفعلي للمجموعة وتستعمل بشكل واسع في التسعير لأنها تتضمن:

أ. الخسائر المتوقعة ومصاريف الخسارة المقدرة (القسط الصافي).

ب. المصاريف الطارئة والنفقات الإدارية (التحميلات).

وتقوم شركة التأمين بحساب قسط الخطر والذي يعتمد في حسابه علي مكونين رئيسيين وهما (Hossack , J. Pollardand B. Zehnairlh, 1983,p.122):

- معدل تكرار المطالبة
- متوسط قيمة المطالبة

وعلي ذلك فإن: -

قسط الخطر = معدل تكرار المطالبة × متوسط قيمة المطالبة.

ويطلق على قسط الخطر بالقسط الصافي، ثم تقوم الشركة بحساب القسط التجاري والذي يتكون من العناصر: -

أ- القسط الصافي ب- التحميلات

حيث تتمثل التحميلات في: عمولة الإنتاج، مصاريف الإصدار، المصاريف الإدارية والعمومية ومصاريف التحصيل، الأرباح.

بينما يتم تحديد القسط الصافي بعدة طرق وهي:

أولا: طريقة القيمة المتوقعة

طبقا لهذه الطريقة فإن نموذج القسط الصافي لوحدة الخطر يحسب على أساس إيجاد قيمة الخطر الصافي pure risk لوحدة الخطر، وذلك على أساس إيجاد القيمة المتوقعة لقيمة التعويضات ومن ثم يتم حساب القسط الصافي المتوقع من المعادلة الآتية:

$$p = E(y) \times E(x)$$

حيث: y عدد الحوادث ، x حجم الخسارة

ويعاب على هذه الطريقة أنها لا تأخذ فى الحسبان أي تقلبات مستقبلية في قيمة التعويضات ومن ثم لا تحسب أي انحرافات لقيمة التعويضات فى معادلة القيمة المتوقعة.

ثانيا: طريقة الانحرافات المعيارية:

طبقا لهذه الطريقة فإن القسط المحسوب يحسب على أساس تقدير جزأين فى معادلة حساب السعر وهما: القيمة المتوقعة لقسط الخطر الصافي وقيمة الانحرافات المتوقعة فى قيمة التعويضات:

$$m = E(p) + B\sqrt{\text{var}(p)}$$

حيث: B : مقدار ثابت

$E(p)$: القيمة المتوقعة للخطر الصافي

$\text{var}(p)$: تباين الخطر الصافي لمواجهه التقلبات المستقبلية فى قيمة التعويضات

وتتميز هذه الطريقة بأنها ملائمة للتأمينات العامة، ويحتوى هذا النموذج على جزء لمواجهه التقلبات فى قيمة التعويضات ممثلة فى الانحراف المعياري.

وعلى الرغم من تعدد طرق التسعير واختلاف الأساليب الرياضية والإحصائية المستخدمة فى التقديرات الخاصة بحساب عناصر قسط التأمين إلا أنها تتفق جميعها فى محددات القسط الصافي، وتتلخص فى عوامل ثلاث هى (J. David , Cummins, 1993,p.49)

أولاً: احتمال تحقق الخطر: ويطلق علية معدل تكرار الحوادث، ويتم حسابه من خلال قسمة عدد الوحدات المحققة خلال فترة الخبرة وعدد الوحدات المؤمنة كلها خلال فترة الخبرة.

ثانياً: المتوسط العام للخسارة الواحدة: ويطلق علية الخسارة ويتم حسابه من العلاقة، بأن حده الخسارة هى قسمة إجمالي الخسائر المحققة خلال فترة الخبرة، وعدد الوحدات التى أصابها الحادث خلال فترة الخبرة

ثالثاً: معدل الفائدة المستخدم: وهو له تأثير ملموس عند حساب القسط الصافي بالزيادة والنقصان كلما انخفض المعدل أو ارتفع.

المبحث الثاني

التوزيعات الاحتمالية المدمجة وتسعير التأمين

يعتمد التسعير على التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لتقدير متوسط عدد الحوادث (متوسط عدد المطالبات)، في حين يستخدم التوزيعات الاحتمالية المتصلة لتقدير متوسط حجم الخسارة (متوسط حجم المطالبات) وعلى ذلك يتم تحديد قسط وسعر التأمين، ويتم تحديد نوع التوزيع المناسب حسب طبيعة البيانات وقيمة P.value (Hossack , J. Pollardand B. Zehnairlh,1999).

في هذا المبحث سيتم إيضاح كيفية دمج توزيع بواسون مع توزيع ثنائي الحدين (للتوزيعات الاحتمالية المدمجة المنفصلة)، ودمج توزيع جاما مع التوزيع الأسى (التوزيعات الاحتمالية المدمجة المتصلة).

أولاً: دمج التوزيعات المنفصلة:

دمج توزيع بواسون مع توزيع ثنائي الحدين السالب (التوزيع المشترك لتوزيع بواسون مع توزيع ثنائي الحدين السالب):

نفرض أن x تتبع توزيع بواسون بدالة كتلة احتمالية:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \lambda > 0, \qquad x = 0,1,2\ldots$$

ونفرض أن y تتبع توزيع ثنائي الحدين السالب بدالة كتلة احتمالية:

$$P(y) = C_{r-1}^{r+y-1} P^{r} q^{y} \qquad r> 0 \ , \quad y = 0,1,2\ldots \ , \quad q = 1-p$$

إذا دالة الاحتمال المشترك للدالتين معا بافتراض أن x ، y مستقلان:

$$P(x,y) = p(x) \cdot p(y)$$

$$P(x,y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} * C_{r-1}^{r+y-1} p^{r} q^{y}$$

نفرض أن لدينا التحويل الأحادي $u = X$ ، $z = x + y$ ، وبإجراء التحويلات العكسية والتي تأخذ الشكل التالي:

$$Z = x + y \Rightarrow y = Z - x$$

$$U = x \Rightarrow x = u$$

وبذلك يكون حدود المتغيرين u , z كالتالي:

$$0 \le u \le z \le \infty$$

ولتحويل دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين x , y إلي المتغيرين u , z يتم ذلك كالآتي:

$$P(z,u) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{u}}{u!} * C_{r-1}^{r+z-u-1} p^{r} q^{z-u}$$

وإذا كان المطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي الهامشي(الحدي) للمتغير z يتم التجميع على حدود المتغير u كالتالي:

$$P(z) = \sum_{u=0}^{z} p(z,u)$$

$$P(z) = \sum_{u=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{u}}{u!} * C_{r-1}^{r+z-u-1} p^{r} q^{z-u}$$

$$P(z) = e^{-\lambda} p^{r} q^{z} \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1} \frac{q^{-u}\lambda^{u}}{u!}$$

$$P(z) = e^{-\lambda} p^{r} q^{z} \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1} \frac{(\lambda/q)^{u}}{u!}$$

نضع فى المعادلة السابقة $w = \frac{\lambda}{q}$

نحصل على دالة التوزيع الهامشى للمتغير z (والتي تمثل التوزيع المدمج لتوزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين السالب):

$$P(z) = e^{-\lambda} p^{r} q^{z} \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1} \frac{(w)^{u}}{u!}$$

ثانياً: دمج التوزيعات المتصلة:

دمج توزيع جاما مع التوزيع الأسى:

بفرض أن x، y متغيران مستقلان، حيث أن x متغير عشوائي يتبع توزيع جاما، y متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسى:

حيث أن:

$$f(x) = \frac{\theta^{n}}{\Gamma n} x^{n-1} e^{-\theta x}$$

$$f(y) = \alpha e^{-\alpha y}$$

لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين x ، y بافتراض أنهما مستقلان تكون:

$$P(x,y) = p(x) \cdot p(y)$$

$$f(x, y) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} x^{n-1} e^{-\theta x} * \alpha e^{-\alpha y}$$

وبفرض أن:

$$x = u \quad \rightarrow \quad x = u$$

$$z = x + y \rightarrow y = z - u$$

وبإجراء التفاضل الجزئي للمتغيرين x,y بالنسبة للمتغيرين z, u كالتالي :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(u, z) = f(y, x) |\mathcal{J}|$$

$$f(u, z) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} x^{n-1} e^{-\theta x} * \alpha e^{-\alpha y} |\mathcal{J}|$$

ثم بالتعويض في المعادلة السابقة عن قيمx,y تنتج المعادلة التالية:

$$f(u, z) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} u^{n-1} e^{-\theta u} * \alpha e^{-\alpha(z-u)} |\mathcal{J}|$$

ويتم إيجاد التوزيع الهامشي (الحدي) للمتغير z بإجراء التكامل علي حدود المتغير u.

$$g(z) = \int_0^z f(u, z) du$$

$$g(u, z) = \frac{\theta^n \alpha}{\Gamma n} \int_0^z u^{n-1} e^{-\theta u} * e^{-\alpha(z-u)} |\mathcal{J}|$$

وبفرض أن:

$$\mathcal{A} = \frac{\theta^n . \alpha}{\Gamma n}$$

$$g(z) = \mathcal{A} \int_0^z (u)^{n-1} e^{-[\theta . (z-u) + \alpha . u]} du$$

ثالثاً: التوزيع المركب:

لتحديد التوزيع الاحتمالي المركب تم استخدام العزوم المركزية حول الصفر للتوزيعات المتقطعة والمستمرة المدمجة، والتي منها تم حساب العزوم الاجمالية (المركبة) كالتالى (Han-Shiang Lau,1984,p.20-30)

ونرمز لعزوم حجم الخسائر Mx ، ولعزوم عدد الحوادث Mn ، العزوم الاجمالية ML

$$\mu L = \mu x \, \mu n$$

$$\mu 2(L) = \mu_x^2 \, \mu_2^{(n)} + \mu_n \, \mu_2^{(x)}$$

$$\mu 3(L) = \mu_x^3 \, \mu_3^{(n)} + \mu_n \, \mu_3^{(x)} + 3\mu_x \mu_2^{(x)} \, \mu_2^{(n)}$$

$$\mu 4(L) = \mu_x^4 \, \mu_4^{(n)} + \mu_n \, \mu_4^{(x)} + 4\mu_x \mu_3^{(x)} \, \mu_2^{(x)} + 6\mu_x^2 \, \mu_2^{(x)} [\mu_n \mu_2^{(n)} + \mu_3^{(n)}] + 3[\mu_2^{(x)}]^2 [\mu_n^2 - \mu_n + \mu_2^{(n)}]$$

ثم يتم إيجاد معامل الالتواء β_1 والتفرطح β_2 وبالتالي تحديد قيمة معامل بيرسون لتحديد نوع التوزيع الاحتمالي المركب المناسب من خلال المعادلة الآتية (Normal.L. Johnson, ١٩٧٠,p.9-15 ; Samuel, Kotz,):

$$K = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

ومن خلال قيمة k يمكن تحديد نوع التوزيع المركب. حيث

١- إذا كانت قيمة k أقل من صفر يكون لدينا توزيع بيتا

٢- وإذا كانت قيمة k أكبر من واحد يكون لدينا توزيع مقلوب جاما

٣- وإذا كانت قيمة k بين صفر وواحد يكون لدينا توزيع جاما على الصورة:

$$f(T) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} T^{n-1} e^{-\theta T}$$

ومعالم هذا التوزيع θ ، n

المبحث الثالث

التطبيق العملي للتسعير

حيث أمكن تحديد نوع التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لعدد الحوادث والتوزيعات المتصلة لحجم الخسائر، وبعد اختبار جودة المطابقة للتوزيعات الاحتمالية البسيطة التي نخضع لها بيانات الدراسة، تم تحديد التوزيع الاحتمالي النظري الأمثل والمناسب لتوزيع احتمالي معلوم من خلال اختبار جودة المطابقة للبيانات الفعلية، ولو البيانات تخضع لأكثر من توزيع احتمالي يتم المقارنة بين التوزيعين حسب أكبر قيمة P.Value .

ومن هنا فإن تسعير كل خطر على حدة كالتالي:

(١) تسعير كل خطر علي حدة:

تسعير خطر الحريق:

بإجراء اختبار جودة المطابقة لبيانات عدد الحواث وحجم الخسائر لخطر الحريق والموضحة في جدول (١) يتبين التالى:

جدول (١) عدد الحوادث وحجم الخسائر لخطر الحريق

السنة	عدد الحوادث	حجم الخسائر
2011	34	1100000
2012	21	3500000
2013	42	2700000
2014	35	1600000
2015	40	2000000
2016	52	3000000
2017	11	400000
2018	24	500000
2019	11	700000
2020	35	4300000
2021	32	2400000
2022	51	3000000

أن بيانات عدد الحوادث لخطر الحريق تتبع توزيع بواسون بمتوسط = 24.6 ، بينما تخضع بيانات حجم الخسارة لتوزيع جاما بمتوسط = ($2.547x10^5$)

وبالتالي فان القسط الصافي لخطر الحريق (حاصل ضرب توقع عدد الحوادث لتوزيع بواسون وهو E(N) في توقع حجم الخسارة لتوزيع جاما وهو E(x) :

$P = E(N) \cdot E(x) = 6265620$

والقسط التجاري لخطر الحريق GP:

القسط التجاري يتم تحديده من المعادلة الآتية (GeorgE . Rejda ,2000,p.6−10)

$$GP = \frac{P}{1-\pi} = \frac{P}{1-(a+b)}$$

حيث أن:

GP : القسط التجاري

a+b معدل عبء القسط حيث أن:

a متوسط معدل مصروفات العمولات وتكاليف الإنتاج والمصاريف الإدارية خلال فترة الدراسة وهى 0.175

b : نسبة هامش الربح تتراوح ما بين 2.5%، 5% من القسط التجاري

(د.السيد عبد المطلب، ١٩٨٤، ص ٤٤٥) : تم استخدام نسبة 5%

$GP = P / [1-(a+b)]$

$GP = 6265620 / [1-(0.175 + 0.05)]$

$= 6265620/0.775$

$= 8084670.97$

$$\text{وسعر التأمين } r = \frac{\text{القسط التجاري لخطر الحريق}}{\text{مجموع مبالغ التأمين خلال فترة الدراسة لخطر الحريق}}$$

$$r = \frac{732283}{7792344254} = 0.0104$$

(ب) تسعير خطر السيارات:

بإجراء اختبار جودة المطابقة لبيانات عدد الحوادث وحجم الخسائر لخطر السيارات والموضحة في جدول (٢) يتبين التالي:

جدول (٢) عدد الحوادث وحجم الخسائر لأخطار السيارات

السنة	عدد الحوادث	حجم الخسائر
2011	23	6500000
2012	13	4350000
2013	34	1250000
2014	12	2340000
2015	37	6320000
2016	10	5000000
2017	7	4750000
2018	9	3200000
2019	11	1780000
2020	15	3210000
2021	18	4360000
2022	22	5120000

أن بيانات عدد الحوادث لخطر السيارات تخضع لتوزيع ثنائي الحدين السالب بمتوسط قدره 20.29 بينما تخضع بيانات حجم الخسائر للسيارات إلى التوزيع الأسى بمتوسط قدره (4.55×10^{6})

إذا القسط الصافي لخطر السيارات:

$$P = 92319500$$

والقسط التجاري:

$$GP = 92319500 /0.775$$
$$= 119121935.5$$

وسعر تأمين السيارات r :

$$r = \frac{119121935.5}{7174708415} = 0.0166$$

(٢) تسعير الخطرين معا:

يمر تسعير الخطرين معا بالخطوات التالية:

يتم إيجاد القسط الصافي للخطرين معا من خلال المعادلة الآتية:

$$E(c) = \int_0^{E(y)} f(T)dT + \frac{1}{2}\Delta$$

Or:

$$E(c) = \int_0^{E(y)} f(T)dT + \alpha\Delta$$

حيث أن:

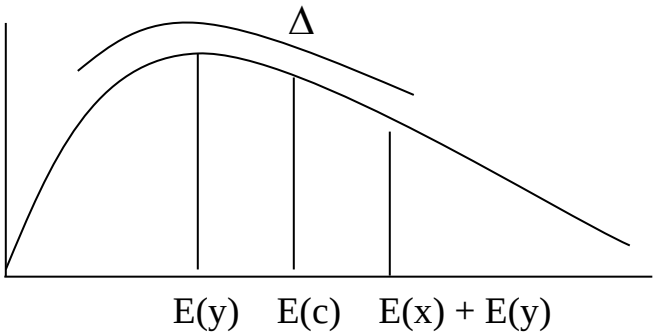
$$\Delta = \int_0^{E(x)+E(y)} f(T)dT - \int_0^{E(y)} f(T)dT$$

حيث تمثل $f(T)$ دالة احتمالية على شكل دالة جاما المركبة (لأن k وقعت قيمتها بين الصفر والواحد) (كما وضحنا سابقاً).

وتتمثل α بالوسط الحسابي المرجح ويحسب كالتالي:

$$\alpha = \frac{\text{القيمة المتوقعة للخطر (١) × معدل خسارته + القيمة المتوقعة للخطر (٢) × معدل خسارته}}{\text{القيمة المتوقعة للخطر (١) + القيمة المتوقعة للخطر (٢)}}$$

ويمكن توضيح ما سبق في الشكل التالي:



حيث أن :

E(y) : هو القسط الصافي الأكبر

E(y) + E(x) : هو مجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر على حدة

Δ : الفرق بين مجموع القسطين والقسط الأكبر

E(c) : القسط الصافي للخطرين معا ، والمطلوب تقديره والذى ينحصر بين E(y) ، E(x) +E(y)

تسعير خطري الحريق والسيارات معا:

حيث أن: E(x) هي القسط الصافي لخطر الحريق

E(y) هي القسط الصافي لخطر السيارات

$$\Delta = \int_{E(y)}^{E(y)+E(x)} f(T)dT = .027$$

$$E(c) = \int_0^{E(y)} f(T)dT + \frac{1}{2}.\Delta$$

Or:

$$= \int_0^{E(y)+E(x)} F(T)dT - \int_0^{E(y)} F(T)dT = 75.765x10^6$$

والخصم

$$d = 1 - \frac{E(c)}{E(x) + E(y)} = .23$$

إذاً قيمة الوفر فى الأقساط :

$$S = 0.23 \times 98585120 = 22674577.6$$

والقسط التجاري GP للخطرين معاً:

$$GP = \frac{P}{1-(a+b)}$$

$$GP = (75.765\times10^6)/.775$$
$$= 97761290$$

∴ سعر تأمين الخطرين معا:

$$= \frac{\text{القسط التجاري}}{\text{مجموع مبالغ تأمين الحريق السيارات معا}}$$

$$r = \frac{97761290}{14967052670} = .0065$$

النتائج والتوصيات

أولاً: النتائج

من خلال الدراسة تم التوصل إلى النتائج التالية:

١- أن بيانات عدد الحوادث لخطر الحريق تتبع توزيع بواسون بمتوسط = 24.6 ، بينما تخضع بيانات حجم الخسارة للحريق لتوزيع جاما بمتوسط = ($2.547x10^5$)

٢- أن بيانات عدد الحوادث لخطر السيارات تخضع لتوزيع ثنائي الحدين السالب بمتوسط قدره 20.29 بينما تخضع بيانات حجم الخسائر للسيارات إلى التوزيع الأسى بمتوسط قدره (4.55×10^6)

٣- تتميز التوزيعات الاحتمالية المدمجة في تسعير وثائق تأمين جميع الأخطار المستقلة بما يلى:

أ- كثرة عدد المعالم التي يحتويها التوزيع المدمج

ب- يأخذ التوزيع المدمج العوامل التي تؤثر على الظاهرة محل الدراسة في الحسبان، بمعنى القضاء على درجة التباين في درجة الخطر من سنة لأخرى

٤- تم إيجاد القيمة المتوقعة (القسط الصافي) لخطر الحريق: p = 6265620

٥- تم إيجاد القيمة المتوقعة (القسط الصافي) لخطر السيارات: P = 92319500

٦- نسبة الخصم التي يحققها المستأمن عند شراء الوثيقة المركبة كان 23%

٧- أن قيمة k والتي تعتمد على معاملى الالتواء والتفرطح تتراوح بين الصفر والواحد لذلك فإن التوزيع المركب الناتج هو توزيع جاما.

٨- سعر التأمين لخطرى الحريق والسيارات معا (r=0.0065) أقل من مجموع سعرى التأمين لكل خطر على حدة

ثانياً: التوصيات

بناء على النتائج التي تم التوصل إليها، يوصى الباحثان بالتوصيات التالية:

١- ضرورة العمل على تجميع الأخطار المتجانسة وضمها في تغطية واحدة مع الأخذ في الحسبان الشروط الفنية اللازمة للتطبيق.

٢- الاسترشاد بالأسعار المقترحة للتسعير الذى توصل إليها الباحثان.

٣- محاولة استخدام نماذج التوزيعات الاحتمالية المركبة فى حالة تعدد التغطيات لنفس القطاع (إذا كانت الأخطار مستقلة)، أو التوزيعات الاحتمالية المشتركة(اذا كانت الأخطار غير مستقلة).

٤- محاولة استخدام النماذج الخطية المدمجة في تسعير التأمينات العامة.

المراجع

المراجع العربية:

١- أحمد، ممدوح حمزة ، استخدام التوزيعات الاحتمالية فى تسعير التأمين مع التطبيق على تأمين السطو محلات تجارية، رسالة دكتوراه، كلية التجارة، جامعة القاهرة، ١٩٩٠ .

٢- إسماعيل، عماد عبد الجليل "تسعير وثيقة التأمين الشاملة للفنادق والقرى السياحية، رسالة دكتوراه، كلية التجارة، جامعة القاهرة، ٢٠٠٥ .

٣- الدش ، عفاف على ، " الاستدلال الإحصائي "، كلية التجارة، جامعة حلوان، ٢٠٠٦ .

٤- الحسيني، عصام خلف، "الاحتمالات والتوزيعات وتطبيقاتها في أكثر من متغير"، جامعة أسيوط ، كلية العلوم، الطبعة الثانية، ٢٠٠٢.

٥- الخواجة ،حامد عبد القوى، "تسعير وثائق التأمين المركبة باستخدام التوزيعات الاحتمالية "، رسالة دكتوراه في التامين، كلية التجارة، جامعة بورسعيد ،٢٠٠٨.

٦- المطرفي، بخيت مرزوق & جاهين، زينهم فكرى "مقدمة في نظرية الاحتمال – في أكثر من متغير"، مكتبة أنهار العلم، الطائف، السعودية،٢٠٠٦ .

٧- النصراوي، هدير سعدي ، "التحويل التربيعي للتوزيع المركب الجديد (اسي- فريجت)"، رسالة ماجستير في الإحصاء ، كلية الإدارة والاقتصاد ،جامعة كربلاء، ٢٠٢٢.

٨- أمين، أسامة ربيع ، النحاس، احمد حمدي ، "تسعير وثيقة التامين البحري أجسام سفن " اللنشات" باستخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة في سوق التامين المصري- دراسة كمية"، المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والإدارية، كلية التجارة ، مدينة السادات، ج ١٣، ع ١، ٢٠٢٢.

٩- الطويل، مجدى،" الاحتمالات – النظرية والتطبيق"، دار النشر للجامعات، مصر، القاهرة، ٢٠٠٠.

١٠- حسان ،محمد فؤاد ، " تصميم نموذج لتسعير خطر الحريق في قطاع الغزل والنسيج ،أسلوب كمي في ظل تكنولوجيا الوقاية ، رسالة دكتوراه، كلية التجارة بسوهاج، جامعة أسيوط ، ١٩٩٣.

١١- حمزة، ممدوح ، "استخدام التوزيعات الاحتمالية في تسعير التأمين مع التطبيق على تأمين السطو محلات تجارية"، رسالة دكتوراه ، كلية التجارة، جامعة القاهرة ، ١٩٩٠.

١٢- عبده الديب ،علي السيد ، " تسعير التأمين التكميلي للسيارات الخاصة في ج.م.ع وفقا للعوامل المؤثرة في درجة الخطر " ،رسالة دكتوراه ،كلية التجارة ، جامعة القاهرة ، ١٩٩٢.

١٣- ..... ، " التأمين – الأسس العلمية والقواعد العملية "، دار النهضة العربية، القاهرة، ١٩٩٤ .

١٤- عودة، أحمد، "مقدمة في النظرية الإحصائية" ، كلية العلوم الإدارية ،جامعة الملك سعود، ،.٢٠٠١.

١٥- شاهين، سامية سعد زغلول ،" نحو بناء نموذج لوثيقة تأمين ممتلكات شاملة "، رسالة دكتوراه ، كلية التجارة، جامعة المنصورة ، ١٩٩٤ .

١٦- شحاته، هشام، "حول بعض خواص عائلة توزيعات احتمالية ذات أربعة معالم"، رسالة ماجستير، معهد الدراسات والبحوث الإحصائية، جامعة القاهرة، ٢٠٠١.

١٧- عامر، ربيع زكي ، تحليل الانحدار ، أساليبه وتطبيقاته العلمية باستخدام البرنامج الجاهز SPSS " ، معهد الدراسات والبحوث الإحصائية ، جامعة القاهرة ،١٩٩٨ .

١٨- عاشور ، سمير كامل ، " الإحصاء باستخدام البرنامج الإحصائي SPSS " ، القاهرة، معهد الدراسات والبحوث الإحصائية، 2005 .

١٩- عطا ، محمد محمد ، د.على سيد بخيت ،" نموذج كمى لتسعير أخطار المسئولية المدنية بالتطبيق على قطاع الصناعات المعدنية "،مجلة البحوث التجارية المعاصرة ،كلية التجارة – جامعة سوهاج، المجلد العشرون، العدد الثاني، ٢٠٠٦.

٢٠- عبد المولى ،محمد & المهدى ،محمد ،سالم &محمود ،وأخرون، "تسعير أخطار الشركات الصناعية – دراسة تطبيقية"، مجلة التجارة والتمويل، كلية التجارة ، جامعة طنطا ،العدد الأول يناير ،٢٠٠٨.

٢١- .....،"تسعير أخطار الوثيقة المركبة – دراسة تطبيقية ،المجلة المصرية للدراسات التجارية ،كلية التجارة، جامعة المنصورة ،العدد الثاني، يوليو،٢٠٠٨.

٢٢- عبده، السيد عبد المطلب، " التأمين – الأسس العلمية والقواعد العملية " دار النهضة العربية ، ١٩٩٤.

٢٣- مرجان، إبراهيم محمد " دراسة تحليلية لطرق تسعير تأمين الحريق، رسالة ماجستير ، كلية التجارة ، جامعة القاهرة ، ١٩٧٣

٢٤- هرمز ،أمير حنا ، "الإحصاء الرياضى" ، جامعة الموصل، العراق، ١٩٩٠ .

المراجع الأجنبية:

1- Andreev, A. ,kanto, A. and Malo, P. , "Simple Approach for Distribution Selection in the Pearson System" The Journal of Risk and insurance , Vol., ٦٠ , No.١ 2005.

2- Berm´udez, L. and D. Karlis.”Bayesian multivariate poisson models for insurance ratemaking”. Insurance: Mathematics and Economics 48 (2), ,2012.

3- Dey, D. and Y. Chung ,“Compound Poisson distributions: properties and estimation”. Communications in Statistics-Theory and Methods 21 (11), 2002.

4- José María Sarabia and Emilio Gómez-Déniz, “Multivariate Poisson-Beta Distributions with Applications to Insurance Data” University of Piraeus July 10-12, 2007.

5- J. David , Cummins, " Statistical and financial models of insurance pricing and the insurance firm" The Journal of Risk and insurance , Vol., 68 , No.2 , 1983 .

6- GeorgE . Rejda " principles of Risk management and insurance " , Seven th Ed. , Addison . wesly , London , 2000.

7- Michael A. Bean. "Probability: the Science of uncertainty with Application to Investments, Insurance and Engineering, Univ. of Western, Books, call, 2001.

8- Vaugh , E.J ., " Fundamentals of Risk &Insurance " , New York : John Wiley & Sons , 1992.

9- Ronald E. Walpale, "Probability & Statistics for engineers , Scientists, "prentice-Hall, Inc, 2002.

10-Han-Shiang Lau, "An Effective Approach for Estimating the Aggregate loss of An Insurance portfolio," Journal of Risk and Insurance, Vol. 3, 1984.

11-Hossack , J. Pollardand B. Zehnairlh, " Introduction to statistics with applications in general insurance, " , Cambridge University , 1999, P.122.

12-Georg E . Rejda " principles of Risk management and insurance " , Seven th Ed. , Addison . wesly , London , 2000 .

13-Pizzutilo, F., "Use of the Pearson System of Frequency Curves for the Analysis of Stock Return Distributions: Evidence and Implications for the Italian Market", Economics Bulletin, Vol. 32, Issue 1, 2012.

14-Nie, H , and Chen, H.,"Lognormal Sum Approximation with Type IV Pearson Distribution", IEEE Communications Letters",Vol. 11, NO. 10, 2007.

15-Normal.L. Johnson, Samuel Kotz,"Continuous Univriate Distributions", A wiley interscience publication, John Wiley & Sons New York, 1970.

16-Qutb, N., & Rajhi, E. (2016). Estimation of the parameters of compound Weibull distribution. IOSR, 12(4).

17-Shakil, M. , Kibria, B. M. G., and Singh, J. N., "A New Family of Distributions Based on the Generalized Pearson Differential Equation with Some Applications", Austrian Journal of Statistics, Vol. 39, N. 3, 259-278. 2010.

18-Shabri, A. ,"A Comparison of Plotting Formulas for the Pearson type III distribution", Jurnal Teknologi, 36(C): 61–74, 2002 .

19-Jianyong Sun, Ata Kab, Jonathan M. Garibaldi," Robust mixture clustering using Pearson type VII distribution", Pattern Recognition Letters, 2010

20- Zaidi, S. M., Sobhi, M. M. A., El-Morshedy, M., & Afify, A. Z.(2021). A new generalized family of distributions: Properties and applications. Aims Math, 6..