ETUDE FACTORIELLE D'UNE CORRESPONDANCE SEMI-DEGENEREE TERNAIRE

IBRAHIM HAMOUDA KAMAL ELDIN*

(RESUME)

L'étude factorielle d'une mésure de probabilité continue ternaîre de forme quelconque nécessite à son approchement (par des méthodes mathematiques usuelles d'approximation) l'étude factorielle soit pour;

- Une mésure de probabilité ternaîre dégénérée de rang finite de la form

$$P_E = \Sigma A_i(x).B_i(y).C_i(z) \quad \text{pour } 0 < x,y,z \leq 1$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$

déja étudié

Ou

- Une mésure de probabilité térnaíre semi-dégénérée de range finie de la forme

$$P_E(x,y,z) = \sum_{i=1}^{r} C_i(z).T_i(x,y) \quad \text{pour } 0<x,y,z<1$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$

(actuellement presentée)

d' ou l'importance de cet article.

(*) Dep. de Mathematique Faculté de Sciences, Université du Cairo.

INTRODUCTION

- Suppasons ζ une mésure de probabilité continue ternaîre notée par $P_E(x,y,z) \geq 0$ set donné sur le cube $[0,1]$ dans l'èspace. Le triple de fonction $(\phi_1(x), \phi_2(y), \phi_3(z))$ tel que.
- $\phi_1(x)$ soit mésurable, definie sur l'éspace $L^2(E_x)$ de la mésure de probabilité $T_1(x)$ de densité $d\nu_x$
- $\phi_2(y)$ soit mésurable, definie sur l'éspace $L^2(E_y)$ de la mésure de probabilité $T_2(y)$ de densité $d\nu_y$
- $\phi_3(z)$ soit mesurable, definite sur l'éspace $L^2(E_z)$ de la mésure de probabilité $T_3(z)$ de densité $d\nu_2$.

Ce triple de fonctions est consideré comme un facteur de la correspondance $P(x,y,z)$ associé à la valeur propre $\lambda_1 \in \lambda$ Ce triple est determiné par le systême d'équations integrales suivant [1]

$$\forall (x,x') \in E_x \; ; \qquad (y,y') \in E_Z \; ; \qquad (z,z') \in E_z$$

$$\lambda \phi_1(x') = \int_{E_2} \frac{P_{E_1 \times E_2}(x',y)}{P_{E_1}(x').P_{E_2}(y)} . \phi_2(y) d\nu_y + \int_{E_3} \frac{P_{E_1 \times E_2}(x',z)}{P_{E_1}(x').P_{E_3}(z)} . \phi_3(z)\, d\nu_2$$

$$\lambda \phi_2(y') = \int_{E_1} \frac{P_{E_1 \times E_2}(x,\tilde{y})}{P_{E_2}(y').P_{E_1}(y)} . \phi_1(x) d\nu_x + \int_{E_3} \frac{P_{E_2 \times E_3}(y',z)}{P_{E_2}(y').P_{E_3}(z)} . \phi_3(z)\, d\nu_2$$

$$\lambda \phi_3(z') = \int_{E_1} \frac{P_{E_1 x E_3}(x,z)}{P_{E_3}(z).P_{E_1}(x)} \cdot \phi_1(x) d\nu_x + \int_{E_3} \frac{P_{E_2 x E_3}(y,z')}{P_{E_2}(y').P_{E_3}(z)}$$

$$\cdot \ \phi_2(y)\ d\nu_y \quad \ldots (I)$$

Où on à designé par ($P_{E_1 x E_2}(x,y)$, $P_{E_1 x E_3}(x,z)$, $P_{E_2 x E_3}(y,z)$, les lois marginates binaires déduites par la mésure de probabilité $P_E(x,y,z)$ sur les principaux faces du cube $[0,1]^3$.

($P_{E_1}(x)$,$P_{E_2}(y)$, $P_{E_3}(z)$) les lois marginates binaires deduites par la projection de la mésure de probabilité $P_E(x,y,z)$ sur les principaux axes du cube $[0,1]^3$[3].

($d\nu_x$,$d\nu_y$,$d\nu_z$) son les mésures de probabilites definies par ($P_{E_1}(x)$, $P_{E_2}(y)$, $P_{E_3}(z)$).

1-2 Considersons le cas ou la mésure de probabilité $P_E(x,y,z)$ est definie sur le cube $[0,1]^3$ dans l'éspace par la formule

$$P_E(x,y,z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} C_i(z) \cdot T_i(x,y) & \text{pour } 0<x,y,z<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

de range fini, les $C_i(z)$ sont lineairment independants, $T_i(x,y)$ est suppose positif ou nul de plus elles sont toutes bornées sur le cube.
Designons par

$$\int_{E_2} T_i(x,y)\,dy = A_i(x) \quad ; \quad \int_{E_1} A_1(x)dx = a_i$$

$$\int_{E_1} T_i(x,y)\,dx = B_i(y) \quad ; \quad \int_{E_2} B_i(y)\,dy = b_i$$

$$\int_{E_3} C_i(z)\,dz$$

$$\alpha_i = b_i.c_i \quad ; \quad \beta_i\ c_i.a_i \quad ; \quad \gamma_i = a_i - b_i$$

$$i = 1,2,\dots,r \qquad (2)$$

danc, on a $\sum^{r} a_i b_i c_i = 1$

- Les trois lois marginales binaires obtenues par la mésure $P_E(x,y,z)$ sont données par

$$P_{E1xE2}(x,y) = P'_1(x,y) = \sum_{i=1}^{r} C_i T_i(x,y) \qquad \text{pour } 0<x,y\leq 1$$

$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

$$P_{E1xE3}(x,z) = P'_2(x,z) = \sum_{i=1}^{r} A_i(x).C_i(z) \qquad \text{pour } 0<x,y<1$$

$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

$$P_{E2xE3}(x,z) = P'_3(y,z) = \sum_{i=1}^{r} B_i(y).C_i(z) \qquad \text{pour } 0<y,z<1$$

$$= 0 \qquad \text{sinon} \qquad (3)$$

par l'introduction des expressions (3) et (4) dans le systeme (1). Ce systeme s'est reduit a

$\forall\ (x,x') \in E_1 \qquad (y,y') \in E_2 \qquad (z,z') \in E_3$

$$\lambda P_1(x').\phi_1(x') = \sum_{i=1}^{r} C_i \int_{E_2} T_i(x',y).\phi_2(y)dy + \sum_{i=1}^{r} A_i(x')$$

$$.\int_{E_2} C_i(z) \; . \; \phi_3(z)dz$$

$$\lambda P_2(y').\phi_2(y') = \sum_{i=1}^{r} C_i \int_{E_1} T_i(x,y').\phi_1(x)dx + \sum_{i=1}^{r} B_i(y)$$

$$.\int_{E_3} C_i(z) \; . \; \phi_3(z)dz$$

$$\lambda P_3(z').\phi_3(z') = \sum_{i=1}^{r} C_i \int_{E_1} A_i(x).\phi_1(x)dx + \sum_{i=1}^{r} C_i(y') \; .$$

$$.\int_{E_3} B_i(y) \; . \; \phi_2(y)dz \qquad (5)$$

de la dernière équation du systéme(5). On voit que la fonction inconnue $\theta_3(z)$ definie sur $[0,1]$ est rationelle de la forme simple

$$\phi_3(z) = \frac{\sum_{i=1}^{r} N_i.C_i(z)}{\sum_{i=1}^{r} a_i.C_i(z)} \qquad (6)$$

où les parameters inconnus $(N_i|i=1,2,\ldots,r)$ seront détèrminer de l'équation integrale homogène suivante.

$$\lambda \phi_3(z).P_3(z) = \int_{E_3} \{ \int_{E_1 x E_2} \frac{P(x,y,z').P(x,y,z')}{P_{E_1 x E_2}(x,y)} dx.dy)$$

$$.\phi_3(z)dz \qquad (7)$$

En introduisant l'expression (6) dans l'équation (7) d'âprès des calculs penible on aura le système lineare homogène aux r parametres inconnus $(N_s \mid s=1,2,\ldots,r)$ suivant

$$N_s = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} w_{sj} \; u_{ji} \right) . N_i , \qquad S=1,2,\ldots,r \tag{8}$$

Où on a designe

$$W_{sj} = \int_{E_2 \times E_3} \frac{T_s(x,y) . T_i(x,y)}{\sum_{k=1}^{r} c_k . T_k(x,y)} \, dxdy , \quad \forall \; s,j = 1,2,\ldots,r$$

.

$$u_{ij} = \int_{E_3} \frac{C_j(z) \; . C_i(z)}{\sum_{k=1}^{r} \gamma_k . C_k(z)} \; . \; dz \qquad , \forall \; i,j = 1,2,\ldots,r \tag{9}$$

$$j = \int_{E_3} \frac{C_j(z) \; . \; C_i(z)}{\sum_{k=1}^{r} \gamma_k . \; C_k(z)} \; . \; dz \quad , \forall \; i,j = 1,2,\ldots,r \tag{9}$$

Le système (8) peut-être reécrit en terme de mat comme suit

$$\lambda \bar{N} = W(rxr) \; . \; U(rxr) \; . \; \bar{N} \tag{10}$$

où W(rxr) et U(rxr) sont simplement de matrices symétrique positives definies pur (9)

supposons que $\int_{E_3} C_i(z) \; . \; \phi(z) \; dz = M_i \quad ,i=1,2,\ldots r$ (10)

Pour détèrminer $\phi_1(x)$ et $\phi_2(y)$; Introduisons l'éxpression (6) de $\phi_3(z)$ dëja obtenue dans le système d'équation (5). nous aurons.

$$\lambda P_1(x').\phi_1(x') = \sum_{i=1}^{r} M_i A_i(x') + \sum_{i=1}^{r} C_i \int_{E_2} T_i(x',y).\phi_2(y)dy \qquad (11)$$

$$\lambda p_2(y').\phi_2(y') = \sum_{i=1}^{r} M_i\ B_i(y') + \sum_{i=1}^{r} C_i \int_{E_1} T_i(x,y').\phi_1(x)dx \qquad (12)$$

l'élimination de $\phi_2(y)$ parmiles deux dernières équation integrate ramène à l'équation integrale de Voltera de deuxieme type, pour $\phi_1(x)$ la suivante, $v(x,x')\in E_1$

$$\lambda^2.P_1(x').\phi_1(x') = \sum_{i=1}^{r} M_i A_i(x') + \sum_{i=1} C_i \int_{E_2} T_i(x',y) . \frac{(\sum_{j=1} M_j.B_j(y))}{P_2(y)}\, dy$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \int_{E_1} (\int_{E_2} \frac{C_i\, C_j T_i(x',y).T_j(x'y)}{P_2(y)})\phi_1(x)dx \qquad (13)$$

$$\lambda'.P_1(x').\phi_1(x') = \sum_{i=1}^{r} M_i\ A_i(x') + \sum_{i=1}^{r} C_i F_i(x') + \sum_{i=1}^{r} \int_{E_1} D_i(x',x).\phi_1(x)dx \qquad (14)$$

Où on a designe par

$$F_i(x') = \sum_{j=1}^{r} \int_{E_2} \frac{T_i(x',y).B_j(y)}{P_2(y)}\, dy \quad , \ i=1,2,\dots,r$$

$$D_i(x',x)= \sum_{j=1}^{r} \int_{E_2} C_i C_j \frac{T_i(x',y) . T_j(x,y)}{P_2(y)} dy, \quad i=1,2,\ldots,r \tag{15}$$

Evidement, on établit de façon analague, l'équation inte grate réalisée par la fanction $\phi_2(y)$. Designons par

$$G_i(y') = \sum_{j=1}^{r} \int_{E_1} \frac{T_i(x',y) . B_j(x)}{P_1(x)} dx \quad ,i=1,2,\ldots,r$$

$$D_i'(y',y) = \sum_{j=1}^{r} \int_{E_1} C_i C_j \frac{T_i(x,y') . T_j(x,y)}{P_1(x)} dx \quad ,i=1,2,\ldots,r \tag{16}$$

par conséquent l'équation intégrale de Voltera réalisée par la fonction proper recherchée $\phi_2(y)$ est la suivante

$$\forall \quad y,y' \in E_2$$

$$\lambda' . P_2(y') . \phi_2(y') = \sum_{i=1}^{r} M_i B_i(y') + \sum_{i=1}^{r} C_i G_i(y') + \sum_{i=1}^{r} \int_{E_1} D_i'(y',y) . \phi_2(y) dy \tag{17}$$

Ce raîsonnement conduit au théorème suivant.

<u>Théorème</u>

Le triple de fonction propres $(\phi_1(x) . \phi_2(y) . \phi_2(z))$ associées à la valeur propre $\lambda_i \in \lambda$, définissant les focteurs de la corréspondance continue semi-dégénerée ternaire de la forme $P_E = \sum^{r} C_i(z) T_i(x,y) \quad v < 0 < x,\ y,\ z \leq 1$

sinon

Où les fonction $\mathcal{C}_i(z)$ sont linearment independants (toutes les fonctions $(C_i(z),T_i(x,y)|i=1,2,\ldots,r)$ sont bornées positive ou nulle).

Ce triple de facteurs est donné par

- $\phi_3(z)$ est une fanction rationelle de la forme:

$$\phi_3(z) = \frac{\sum_{i=1}^{r} N_i.C_i(z)}{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i.C_i(z)} \tag{6}$$

  dont les parmetres inconnus N_i sont donnés par le système homogène lineaire (8).

- $\phi_1(x)$ satisfait l'équation integeral de Voltera (14) (de même pour $\phi_2(y)$ satisfait l'équation (17) dont les terms le noyaux sont definis par (15) et (16) en fonction des lois marginales simples et binaires deduites de la mesure donnee.

Cas Particulier

Les resultats [4] obtenus pour la mesure de correspondance continue ternair dégènérée définie par

$$P_E = \Sigma\, A_i(x).B_i(y).C_i(z) \qquad 0 < x,y,z \leq 1$$

$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

voir [4] peuvent être découler du theorême précédent comme suit

$\phi_3(z)$ est un fanction rationelle de la forme:

$$\phi_3 = (z)_r = \frac{\sum_{i=1}^{r} N_i . C_i(z)}{\sum_{i=1} \gamma_i . C_i(z)}$$

$\phi_1(x)$ est rationelle soit par symetrie ou soit par le calcul de $F_i(x')$ et $D_i(x',x)$ d'abord et ensuite introduisons les valeurs de $F_i(x')$ et $D_i(x',x)$ dans l'équation intégeral de Voltera pour $\phi_1(x)$ comme suit.

$$F_i(x') = \sum_{j=1}^{r} \int_{E_2} \frac{T_i(x',y).B_j(y)}{P_2(y)} dy$$

$$F_i(x') = \sum_{j=1}^{r} \int_{E_2} \frac{A_i(x').B_i(y).B_j(y)}{\sum_{k=1} c_k \; a_k \; B_k(y)} dy$$

$$= A_i(x').\left(\sum_{j=1}^{r} \int_{E_2} \frac{B_i(y).B_j(y)}{\Sigma_k \; c_k \; a_k \; B_k(y)} dy\right)$$

$$F_i(x') = A_i(x') L_i \qquad , \quad i=1,2,\ldots,r \qquad (18)$$

Tandis que

$$D_i(x',x) = \sum_{j=1}^{r} c_i c_j \int_{E_2} \frac{T_i(x',y).T_j(x,y)}{P_2(y)} dy$$

$$= \sum_{i=1}^{r} c_i c_j \; A_i(x') A_j(x) \int_{E_2} \frac{B_i(y).B_j(y)}{\Sigma_k \, c_k \; a_k \; B_k(y)} dy$$

$$D_i(x',x) = c_i A_i(x') \sum_{j=1} c_j S_{ij} \; A_j(x) \qquad (19)$$

Ou on a designe par

$$L_i = \sum_{i=1}^{r} \int_{E_2} \frac{B_i(y) \,.\, B_j(y)}{P_2(y)} \, dy$$

$$S_{ij} = \int_{E_2} \frac{B_i(y) \,.\, B_j(y)}{P_2(y)} \, dy \quad , \forall \; i,j = 1,2,\ldots,n \tag{20}$$

Donc par l'introduction de valeurs de $F_i(x')$ et $D_i(x',x)$ dans l'équation integrate de Voltera satisfait par $\phi_1(x)$. Cette équation s'est reduite à la suivante

$$\lambda^2 P_1(x').\phi_1(x') = \sum_{i=1}^{r} M_i A_i(x') + \sum_{i=1}^{r} c_i A_i(x').L_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} c_i A_i(x').L_1 \Big(\sum_{i=1}^{r} c_j \int S_{ij} A_i(X).\phi_1(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} M_i A_i(x') + \sum_{i=1}^{r} c_i L_i A_i(x') + \sum_{i=1}^{r} c_i A_i(x'$$

$$\text{d' ou } \phi_1(x') = \frac{\sum_{i=1}^{r} O_i A_i(x')}{\sum \&_i \, A_i(x')} \tag{21}$$

$\phi_1(x')$ est une fonction rationelle aussi.

Analoguement le même raisonnement conduit au même resulta pour $\phi_2(y)$ donc ces resultats obtenus se caincident avec les resultats déja obtenus [4].

REFERANCES

[1] BENZECRI, J.B., "L'anatyse des Données. Volume 2 l'analyse des correspondances". DUNOD, 1973.

[2] BENZERCRI, J.P. & F., "Pratique de l'analyse des données", DUNOD, 1980.

[3] IBRAHIM HAMOUDA, K., "Lanalyse factoriette des correspondances continues entre une famille finie des espaces probabilité", Thése d'Etat, Un. de Paris VI, 1974.

[4] IBRAHIM HAMOUDA, K. & A.Y. YEHIA, "L'analyse factorielle d'une correspondance dégénérée ternaire", 18th Auunal Conference of statistics-Cairo University, Vol.2 Page Decembre (1983).

[5] NAOURI, J. CH., "L'analyse factorielle des correspondances (cas binaire)" Thése d'Etat, Un. de Paris VI 1971.