إسهامات دي مورجان في تأسيس نظرية العلاقات المنطقية
"دراسة تحليلية في المنطق الحديث"

أحمد عصام الدين عبد الجواد(*)

ملخص

تتناول الدراسة إسهامات دي مورجان في تأسيس نظرية العلاقات المنطقية التي تُعد إحدى الركائز الأساسية التي قام عليها المنطق الحديث، وذلك اعتمادًا على مؤلفات دي مورجان الأصلية، مما يوفر فهماً دقيقاً وعميقاً لأفكاره. إذ بدأت الدراسة بعرض مفهوم العلاقة المنطقية كما قدمها دي مورجان، مشيرًا إلى أنها تنشأ في العقل البشري عند الربط بين فكرتين، وليست موجودة في الطبيعة بشكل مستقل، مقسمًا إياها إلى نوعين: علاقات من الدرجة الأولى (تربط بين طرفين) وعلاقات من الدرجة الثانية (تربط بين العلاقات نفسها). بالإضافة إلى تمييزه بين العلاقات العكسية والعلاقات السالبة، وذلك خلال التركيز على المصطلحات الرمزية التي طورها لتمثيل العلاقات، ثم انتقلت الدراسة إلى مناقشة الرابطة المنطقية وشروطها الضرورية عند دي مورجان – المتمثلة في العكس والتعدي – لبناء استدلال منطقي سليم، إلى جانب المبادئ التقليدية (الهوية، عدم التناقض، الثالث المرفوع). كما توقفت الدراسة عند مفهوم دي مورجان للعلاقات المركبة والاحتواء بين العلاقات، إضافة إلى الإجراءات المنطقية التي تحكمها، ولم تغفل الدراسة سمات العلاقات والقائمة – عند دي مورجان – على العكس والسلب. قبل أن تُختتم بمناقشة قواعد التكافؤ المنطقي عند دي مورجان والمتمثلة في قانونا دي مورجان والمبرهنة k .

كلمات مفتاحية: دي مورجان؛ العلاقة المنطقية؛ الرابطة المنطقية.

(*) أستاذ مساعد بقسم الفلسفة – كلية الآداب – جامعة السويس.

P.O.Box: 43221, Suez, Egypt. Email:

ahmed.abdelgawad@arts.suezuni.edu.eg

مقدمة

يشيد مؤرخو المنطق والرياضيات – لوقت طويل – بجهود عالم المنطق والرياضيات الإنجليزي "أغسطس دي مورجان" Augustus De Morgan (١٨٠٦ – ١٨٧١) [١] وإسهاماته الرائدة؛ وفي مقدمتها نظرية العلاقات المنطقية، التي تُعد من أهم مكونات المنطق الحديث وأحدث نظرياته. ولذلك فقد حظيت دراسته بمكانة بارزة في صدارة البحوث المنطقية الغربية الحديثة والمعاصرة.

من ثم، فإن موضوع الدراسة الحالية هو "**إسهامات دي مورجان في تأسيس نظرية العلاقات المنطقية**". ورغم أهمية هذا الموضوع، فإنه – بقدر ما أتيح للباحث من معارف – لم يحظ بعناية البحث من قبل الباحثين العرب؛ إذ لم يُعثر إلا على دراستين فقط تناولتا – ضمن موضوعاتهما – نظرية العلاقات المنطقية عند دي مورجان بوجه عام، بما يتفق مع أهداف تلك الدراسات، وذلك اعتمادًا على المراجع الأجنبية وحدها، دون الرجوع إلى النصوص الأصلية التي كتبها دي مورجان[٢].

وبذلك تُعد الدراسة الحالية أول محاولة بحثية تتناول إسهامات دي مورجان في تأسيس نظرية العلاقات المنطقية بالاعتماد المباشر على مؤلفاته الأصلية، مما يتيح إمكانية الوقوف على فكر دي مورجان في صيغته الأولى، الأمر الذي يتيح فهمًا أكثر دقة وعمقًا للموضوع.

جدير بالذكر أن الدراسة الحالية لا تستهدف تقديم إحاطة كاملة بنظرية العلاقات المنطقية عند "دي مورجان"؛ إذ إن ذلك يخرجها عن وسعها؛ لتعدد جوانب هذه النظرية وتشعّب موضوعاتها، فضلًا عما يتطلبه التناول الكامل لها من تتبّع أصولها التاريخية السابقة على دي مورجان، ورصد تطوراتها الفكرية اللاحقة عليه، ولما كان ذلك كله يتطلب بحثًا موسعًا لا ينسجم مع غاية هذه الدراسة ولا مع حجمها المحدود، فقد آثر الباحث التركيز على جانب محدد – يُعد بمثابة الفرض الرئيس لها – وهو **تحليل إسهامات دي مورجان في تأسيس نظرية العلاقات المنطقية وبيان مدى أصالة هذه الإسهامات.**

وللتحقق من هذا الفرض، كان على الباحث مناقشة مجموعة من الفروض الفرعية المندرجة تحته، والتي تتخذ صيغة التساؤلات التالية:-

- ما مفهوم العلاقة المنطقية وأنواعها عند دي مورجان؟
- ما مفهوم الرابطة المنطقية وشروطها عند دي مورجان؟
- ما الإجراءات التي أدخلها دي مورجان على العلاقات؟
- ما السمات المنطقية للعلاقات المنطقية عند دي مورجان؟
- ما قواعد التكافؤ المنطقي بين العلاقات عند دي مورجان؟

وفي سبيل التحقق من الفرض الرئيس للدراسة، والإجابة عما ارتبط به من تساؤلات، اعتمد الباحث حسبما يتطلب سياق الدراسة على مؤلفات "دي مورجان"، بوصفها المصادر الرئيسة للدراسة. بالإضافة إلى الاعتماد على مؤلفات مجموعة من الباحثين الذين تناولوا نظرية العلاقات المنطقية عند "دي مورجان" بالتفسير والتأويل.

وفي السياق نفسه، انتهج الباحث منهجاً تحليلياً بالدرجة الأولى اقتضته طبيعة الدراسة لبسط وتحليل المفاهيم الرئيسة لنظرية العلاقات المنطقية، وتقديم تفسيرٍ لها.

أولًا: العلاقة؛ المفهوم والمصطلح الرمزي

أ – مفهوم العلاقة

قام دي مورجان بتعريف العلاقة Relation في عدد من مؤلفاته؛ فنجده في "المنطق الصوري" يعرفها بأنها:-

> **تشير إلى الفروض المستنتجة من مقارنة شيئين أو فكرتين؛ والمقسمة إلى لفظية verbal وواقعية real. ومن ثم، فإن علاقة الربح بالمربح تُعد لفظية، بينما علاقة الأب بالإبن، أو الأعلى بالأسفل تُعد واقعية** (٣).

ويعد هذا التمييز بين العلاقات اللفظية (القائمة على اللغة أو التعبير فقط) والواقعية (القائمة بين أشياء في الواقع)، أمرًا هامًا في فهم طبيعة العلاقة؛ فهو يساعد

على عدم الخلط بين ما هو مجرد وصف لغوي (الربح بالمربح) وبين ما هو ارتباط حقيقي في الواقع (الأب بالإبن).

في السياق نفسه، يعرفها دي مورجان في مقاله بعنوان "فهرست لنسق مقترح للمنطق" بأنها:-

نمط من التفكير في موضوعين من موضوعات الفكر معًا: سواء أكانت بينهما صلة أم لا تجمعهم صلة. أما إنكار denial العلاقة فهو علاقة أخرى، وكلاهما (أي اثبات العلاقة وانكارها) متضادان contraries[٤] [٥].

يرى دي مورجان أن موضوعين من موضوعات الفكر إذا جمعهما العقل – وفكر فيهما في الوقت نفسه – فهما في علاقة أو تربطهما علاقة. بمعنى آخر؛ لا يمكن التفكير في فكرتين معًا إلا خلال فكرة ما (ثالثة) تحتوي على العلاقة بين الفكرتين[٦].

فالعقل الذي يجمع بين موضوعات الفكر هو نفسه الذي يحتوي على العلاقة بينهما، وبالتالي لا يمكن تصور فكرتين معًا دون علاقة تفصل بينهما أو تربطهما.

بمعنى آخر؛ فإن العلاقات موجوده في "العقل" وليست في "الطبيعة ذاتها"، أي إنها تنشأ خلال تفكير الإنسان فيها داخل العقل، فعلى سبيل المثال لا توجد علاقة مادية مباشرة بين "جبل في مكة" و "نهر في مصر" من الناحية الواقعية. لكن عندما تفكر فيهما معًا، وتقول – على سبيل المثال – "كلاهما معالم جغرافية عربية" أو "لا يوجد رابط مباشر بينهما"، فإن العقل هنا أنشأ علاقة بينهما، سواء أكانت علاقة تشابه، أو نفي ...إلخ. ومن ثم، فالعلاقة لا تنشأ من الموضوعات نفسها، بل من عقل الإنسان الذي يربطها، أي إنها نتاج تفكير الإنسان.

وبفرض أن أحدهم ينكر امكانية جمع الفكرتين في علاقة ما، فإن ذلك الإنكار – كما أشار دي مورجان – يقود إلى التفكير في المفاهيم المرتبطة بادعاء استحالة وجود علاقة تربطهما[٧]. فعلى سبيل المثال؛ إذا أنكر شخص ما وجود علاقة بين الاقتصاد

والفن، فإنه بالفعل قد ربطهما معًا؛ وذلك خلال حضور الفكرتين معًا في العقل بالإضافة إلى تحديد صورة العلاقة بينهما (علاقة الإنكار). ومن ثم، فالإنكار لا يُلغي وجود العلاقة في العقل، بل يُحدد صورتها.

بناءً على ذلك، أشار دي مورجان – في مقاله بعنوان "في الشكل الرابع من أشكال القياس وفي منطق العلاقات" – إلى أنه:-

> **عندما يجمع العقل فكرتين معًا ويتم التفكير فيهما معًا في إطار فكرة واحدة، عندئذ يقال أن ثمة علاقة تجمعهما**(٨).

وإذا كانت العلاقة – طبقًا لتصور دي مورجان – هي قيام العقل بالجمع بين شيئين في الفكر، ففي كتابه "المنطق الصوري" كان يُساوي بين فكرة عن شئ ما والصورة العقلية لذلك الشئ، إذ يقول:-

> **وهكذا فإن فكرة الحصان هي الحصان الموجود في أذهاننا، ونحن لا نعرف أي حصان آخر غير هذا، ونحن نُقر بوجود شئ خارجي وهو الحصان، الأمر الذي قد ينتج صورة عقلية للحصان في أذهان عشرين شخصًا مختلفًا**(٩).

وإذا كان الأمر كذلك، فهل تقوم العلاقة عند دي مورجان على المفهوم والماصدق معًا أم لا؟ قدم دي مورجان أفكارًا متنوعة وأساسية في نظرية العلاقات، والعلاقة – لديه – لها كلا من المفهوم والماصدق(١٠).

يشير دي مورجان إلى أنه في اللغة العادية، يكون الماصدق هو النطاق، والمفهوم يكون المحتوى. فعلى سبيل المثال؛ في الجملة "كل انسان يكون حيوان" نجد أن الحد "انسان" يستخدم بكامل نطاقه (أي يشمل كل الناس)، ولكن ليس بكامل محتواه (كائن حي، عاقل، ناطق، اجتماعي ...إلخ)، فقد يتمكّن شخص من فهم معنى مصطلح

"إنسان" دون أن يدرك كامل محتواه. أما الحد "حيوان"، فيُستخدم بكامل محتواه (كائن حي يتحرك، يتغذى...إلخ) ، ولكن ليس بكامل نطاقه (لأننا لا نقصد كل الحيوانات – "كالقط او الأسد...إلخ" – بل المقصود فقط هو "الإنسان" الذي ينتمي إلى صنف الحيوان) [١١].

وأيضًا، في الماصدق، فإن وحدة الإحصاء أو العد Enumeration تكون أحد الأفراد الذين يشكلون بمجموعهم الصنف (فعندما نقول "طلبه"، فإننا نتحدث عن مجموعة أفراد: أحمد، فاطمة، سليم... إلخ. فهؤلاء الأفراد يشكلون بمجموعهم "صنف الطلبة"). أما في المفهوم، فإن وحدة الإحصاء تكون إحدى السمات التي يتكون منها الشئ (فعندما نقول "طلبه"، فنحن نعني: شخصًا يدرس، يسجّل في مؤسسة تعليمية، يلتزم بالواجبات... إلخ. وهذه الصفات يتكون منها مفهوم "طالب")[١٢].

وهنا نجد دي مورجان متأثرًا إلى حد كبير بالنسق المنطقي الارسطي في تعريف العلاقة؛ إذ من المعروف أن أرسطو عرف الصنف عن طريق المفهوم والماصدق معًا[١٣]. وثمة نوعان من العلاقات، هما: علاقات من الدرجة الأولى وعلاقات من الدرجة الثانية. فكلمات مثل: أب، ابن، أكبر من، أصغر من، يساوي، يشبه...إلخ تُعد أمثلة على علاقات من الدرجة الأولى، وتربط بين حدين أو أكثر. أما العلاقات من الدرجة الثانية فهي علاقات تجري على العلاقات السابقة وتُسمى بـ"علاقة العلاقات" relation of relations[١٤]. أي تكون العلاقة نفسها موضوعًا لعلاقة أخرى أعلى درجة.

من ثم، فعلاقة العلاقة ليست نمط أعلى من العلاقات، وإنما هي نتاج ربط العلاقات معًا داخل تسلسل منطقي[١٥]. ويعد دي مورجان أول من قام بصياغة الأفكار الخاصة بالعلاقة وعلاقة العلاقات[١٦].

ب – المصطلح الرمزي

أراد دي مورجان دراسة العلاقة بصورة دقيقة، فقام بتطوير لغة رمزية لتمثيلها على النحو التالي:–

١- ترمز حروف الهجاء X, Y, Z إلى الأسماء المفردة (الموضوعات أو الكيانات) وهي تكفي للنظر إلى الصنف بوصفه وحدة واحدة؛ (ومن ثم يمكن النظر إلى صنف مثل "البشر" بوصفه وحدة واحدة تمامًا كما ننظر إلى "أحمد" بوصفه اسمًا مفردًا). وفي السياق نفسه، ترمز حروف الهجاء L, M, N إلى العلاقات[١٧].

٢- لم يستخدم دي مورجان الرموز الرياضية للعلاقات الدالية مثل الرموز ϕ, ψ... وغيرها؛ إذ يرى أن ثمة أكثر من سبب يجعل الأمثلة الرياضية غير مناسبة للتوضيح من وجهة نظره، إذ يرى أن أوضح الأمثلة وأقربها مأخوذة من العلاقات بين البشر فيما بينهم؛ مثل علاقات القرابة والنسب والمصاهرة، وهي علاقات تستخدم بشكل يومي[١٨].

ويعتقد الباحث أن دي مورجان لم يستخدم الرموز الرياضية لتوضيح العلاقات لأنها تجريدية ومعقدة، وفضل بدلًا من ذلك استخدام أمثلة إنسانية – وخاصة علاقات النسب والمصاهرة – لكونها مفهومة ومألوفة وتمثل طبيعة العلاقات كما تُفهم في الحياة اليومية، ولذا فهي تعد نموذجًا عمليًا لعلاقات منطقية قابلة للتحليل.

٣- قام دي مورجان بالتفريق بين رموز العكس Conversion والسلب Contrary في العلاقة على النحو التالي:-

- ترمز L^{-1} إلى عكس العلاقة L؛ فعلى سبيل المثال إذا كانت العلاقة:

L هي "يحب"

فإن العلاقة:

L^{-1} هي "محبوب من"

وإذا كانت العلاقة:

L هي "عم"

فإن العلاقة:

L^{-1} يكون "ابن أو ابنه الاخ"[١٩].

وفي السياق نفسه، إذا كانت الصيغة الرمزية:

$Y..L^{-1}X$ صحيحة

فإن الصيغة الرمزية:

$X..LY$ صحيحة أيضًا

أي إذا كان:

X مرتبط بـY خلال العلاقة L،

فإن:

Yمرتبط بـ X خلال العلاقة L^{-1} (٢٠).

وهذه تُعد عملية الحصول على علاقة عكسية أو عكس L(٢١). فإذا كان:

X مرتبط بـY

فإن:

Yمرتبط بـX

لكن عبر العلاقة L^{-1} بدلًا من العلاقة L.

- ترمز الأحرف الصغيرة Small letters إلى السلب، ومن ثم فإن:
  - not-L (أو: سلب L) يرمز إليها بـ l.
  - not-M (أو: سلب M) فيرمز إليها بـ m(٢٢).

من ثم، يختلف مفهوم العلاقة العكسية عن مفهوم العلاقة السالبة؛ ففي سلب العلاقة لا نقوم بتغيير ترتيب الحدود للتوصل إلى سلب العلاقة، بل نقوم بنفي قيام العلاقة التي تربط بين حدي القضية العلاقية(٢٣).

٤- قام دي مورجان بفصل العلاقة عن الحكم Judgment (٢٤). فالحكم هو إشارة إلى نوعين من المواقف العقلية تجاه العلاقة؛ علاقة مثبتة أو منفية، كما في "العقل هو شئ يعمل على المادة"، أو "العقل ليس شئ يعمل على المادة"(٢٥). ومن ثم:

- تعد $X..LY$ حكمًا ايجابيًا يُثبت وجود العلاقة بين الطرفين (٢٦). خلال الإشارة إلى أن X أحد موضوعات الفكر المرتبط بـ Y خلال العلاقة L (٢٧).

من ثم، فإن X ليس مجرد فرد بعينه، بل هو عضو ضمن صنف من الأشياء أو الأشخاص المرتبطين بـY خلال العلاقة L. بمعنى آخر؛ إذا كان X يرمز إلى الموضوع (سليم) وY يرمز إلى المحمول (تسنيم) الذي يقع عليه الفعل أو العلاقة وL هي العلاقة (يحب)، فإن الصيغة الرمزية تُقرأ على النحو التالي: "سليم يحب تسنيم"

- تعد X.LY حكمًا سلبيًا؛ ينفي وجود أي علاقة بين الطرفين [٢٨]، وجدير بالذكر أن:

X.LY

تُعد سلبًا لـ:

X..LY [٢٩].

وتعني أن X ليس أحد موضوعات الفكر المرتبطة بـY خلال العلاقة L. وفي كلتا الحالتين السابقتين، فإن X موضوع وY محمول[٣٠]. ومن ثم، تشير العبارة إلى نفي انتماء X إلى صنف الموضوعات التي تربطها علاقة L بـY

ثانيًا: الرابطة المنطقية Copula؛ مفهومها وشروطها

أ – مفهوم الرابطة المنطقية

يشير دي مورجان إلى أن الرابطة هي مرادف للعلاقة، أي الارتباط الذي يتم النظر إلى الحدود وفقًا له[٣١]. وقد بدأ دي مورجان بحثه في العلاقات بالنظر إلى الرابطة المنطقية التي تربط بين الموضوع والمحمول في القضية الحملية[٣٢].

ويعد الاسم المذكور في العلاقة هو الموضوع، والاسم الذي يرتبط به خلال علاقة ما يكون هو المحمول[٣٣]؛ خذ – على سبيل المثال – القضية "محمد مجتهد"؛ فهي تتكون من موضوع ومحمول، ولا تحتوي على رابطة. لكن إذا ترجمنا هذه القضية إلى كثير من اللغات الأوربية الحديثة وجدناها تحوي رابطة – وهي في هذا المثال فعل الكينونة – لربط المحمول بالموضوع[٣٤].

ونلاحظ أن فعل الكينونة يقوم بوظيفة من الوظائف الثلاثة الأتية إذا دخل في قضية:-

(١) الحمل، كما هو الحال في القضية السابقة إذا صيغت بالإنجليزية أو الفرنسية أو الألمانية.

(٢) الوجود الفعلي، مثل قولنا: "ان الله موجود".

(٣) الهوية أو المساواة، مثل قولنا: "X يكون Y" عندما نريد أن نقول "X = Y "[٣٥].

ب – شروط الرابطة المنطقية

يشير دي مورجان إلى أن العلاقات الوحيدة التي تم قبولها في المنطق حتى العصر الحالي هي علاقة الهوية، التي يُشار اليها بـ(يكون) و (لا يكون)[٣٦]. وحين بدأ بدأ بحثه في العلاقات بالنظر إلى الرابطة المنطقية، اهتم بها حين تقوم بوظيفة الهوية دون وظائفها الأخرى ورأى أنها لا تقوم بهذه الوظيفة الا إذا توافر شرطان: ان تكون عكسية ومتعدية transitive[٣٧]. وقال أيضًا:-

> **من المؤكد أن كل علاقة منطقية قابلة للرد reducible إلى الهوية؛ أي أن A هو A، وإلى عدم التناقض؛ أي إنه لا يمكن أن يكون الشئ A ولا A في الوقت نفسه، وإلى الثالث المرفوع؛ أي إن كل شئ يكون إما A أو لا A. إن هذه المبادئ الثلاثة تحكم جميع أشكال الاستدلال، وتنتج منها كل قواعد القياس المنطقي. أنا لست مستعدًا لإنكار صحة أي من هذه المبادئ ... لكنني لا أرى كيف يمكن لهذه المبادئ وحدها أن تؤدي الوظائف المنوطة بها. وأرى أنها تميز بين الصدق والكذب، لكني لا أرى أنها، بمفردها، قادرة على تمييز أو استنباط حقيقة من أخرى. كل استدلال**

لا يتبع هذه المبادئ يعد استدلالًا فاسدًا، وكل استدلال صحيح يتبعها. لكن لا يمكنني قبول أن كل استدلال لا يتبع هذه المبادئ يُعد بالضرورة استدلالًا صحيحًا (٣٨).

من ثم، تُعد المبادئ الثلاثة (الهوية، عدم التناقض، والثالث المرفوع) شروطًا ضرورية لا يمكن لأي استدلال صحيح أن يخالفها، لكنها ليست كافية لضمان صحة الاستدلال، ولذا يجب توافر شرطين إضافيين وهما: العكس والتعدي.

١ – العكس

هنا توجد العلاقة الرابطة بين اسمين بطريقتين: ومن أمثلة هذه العلاقة (مرتبط بـ، مساوٍ لـ،...إلخ). فإذا كان:

X مساوٍ لـ Y

إذن فإن:

Y مساوٍ لـ X (٣٩).

وبعبارة أخرى؛ إذا كانت:

X مرتبطة بـ Y

فإنه تبعًا لذلك تكون:

Y مرتبطة بـ X

وهذه العلاقات عكس بعضها البعض. فالعلاقة المعكوسة يكون لها تأثير متساوٍ، ولا يمكن لإحداهما أن توجد دون الأخرى في حالة العكس. يتم نقل الموضوع والمحمول وعادة ما يتغير ترتيبهما كما في المثال: X تكون سيد Y ، Y تكون خادم X(٤٠).

أي يتم تبديل الأطراف؛ فالأول يصبح الثاني، والثاني يصبح الأول، وتُعكس طبيعة العلاقة. فعلى سبيل المثال: إذا كانت الجملة الاصلية هي "أحمد والد تسنيم" فإن العلاقة العكسية لها هي "تسنيم ابنة احمد".

من ثم، تعني العلاقة العكسية عند دي مورجان تلك العلاقة التي تُعطي المعنى نفسه في حالة استبدالها بعلاقة مقابلة مع تبديل ترتيب الحدود في القضية العلاقية(٤١).

في السياق نفسه، فإن العلاقة العكسية لا يمكن أن توجد بشكل مستقل؛ فلا يوجد "ابن" إلا بوجود "أب"، ولا يوجد "مرؤوس" إلا بوجود "رئيس"، فالعلاقة العكسية تعتمد على نظيرتها في التعريف.

ويشير ويليام نيل إلى أن العلاقة تكون عكسية عندما تكون مساوية مع عكسها (مثل علاقة التشابه resemblance) (٤٢). ويضيف أن مصطلح "عكسية" يعبر عما يقصده المنطقيون اللاحقون بمصطلح "التماثلية" symmetrical (٤٣).

إلا أن العالم المصري الأستاذ الدكتور "محمود فهمي زيدان" يرى أن هذه الملاحظة غير دقيقة؛ لأن العلاقة التماثلية هي ما تكون هي هي حين تغير ترتيب الحدود، بينما العلاقة العكسية عند دي مورجان ليست كذلك(٤٤). ويوضح الباحث الفارق بين طبيعة كل منهما على النحو التالي:-

- **العلاقة العكسية** لعلاقة بعينها هي تلك العلاقة التي يُعكس فيها اتجاه العلاقة بين العناصر، فإذا كانت العلاقة الأصلية هي:

X والد Y

فإن العلاقة العكسية هي:

Y ابن X

ومن ثم، لا تعني العلاقة العكسية أن العلاقة نفسها متماثلة، وإنما مختلفة ترتبط بعكس اتجاه الأصلية.

- **العلاقة التماثلية** هي علاقة متساوية مع عكسها، فإذا كانت العلاقة تنطبق:

من X إلىY

فإنها تنطبق أيضًا بالطريقة نفسها:

من Y إلى X

مثل علاقة "التشابه" أو "المساواة"، فإذا كان:

X يشبهY

فإن:

Yيشبه X

ومن ثم، لا تتغير العلاقة إذا عكسنا اتجاهها.

٢ – التعدي

عندما تقترن combined العلاقة بذاتها فإنها تنتج نفسها، كالمتفوق في المثال التالي: "المتفوق على المتفوق يكون متفوقًا" أو "متفوق المتفوق يكون متفوقًا"(٤٥). وهنا تقوم العلاقة الترابطية بربط X مع Z على النحو التالي:

إذا كانت:

X مرتبطة بـ Y

واذا كانت:

Y مرتبطة بـ Z

إذن فإن:

X مرتبطة بـ Z(٤٦).

بمعنى آخر؛ قانون الفكر الذي يعمل في الاستدلال هو:

إذا كانت:

X هي Y

وإذا كانت:

Y هي Z

إذن فإن:

X هي Z

أو إذا كانت:

X تلزم Y

وإذا كانت:

Y تلزم Z

إذن فإن:

X تلزم Z[٤٧].

ويشير دي مورجان إلى أن العلاقة المتعدية يكون لها عكس متعدٍ أيضًا، وهكذا فإن تالي التالي يكون تاليًا، أو تابع التابع يكون تابعًا[٤٨]. أو متعلق المتعلق يكون متعلقًا من النوع نفسه (مثل علاقة السلف ancestor)[٤٩].

إذ تعد علاقة "سلف لـ" متعدية لأن سلف السلف هو أيضًا سلف؛ فإذا كان "حموده" سلف لـ "محمد"، و"محمد" سلف لـ "فاطمة"، إذن "حموده" سلف لـ "فاطمة".

جدير بالإشارة أن كلمة "متعلق" – التي استخدمها دي مورجان في تعريفه للعلاقات المتعدية – تعني ما أطلق عليه بعض علماء المنطق "حد علاقي" Relative أي الحد الذي ينطبق على شئ ما فقط لكونه يرتبط بشئ آخر[٥٠].

أي إن قيمته المنطقية لا تكمن في ذاته مجردة، وإنما تتحدد بقدر ما يُنشئ من علاقة مع حد آخر. ومن ثم، فإن المتعلَّق ليس مجرد طرف في علاقة، بل هو طرف لا يكتسب معناه الكامل إلا في ضوء تلك العلاقة التي تربطه بغيره.

وبذلك وضع دي مورجان الأساس الأول لتعريف الحد العلاقي خلال كلمة Relative التي استخدمها في تعريفه للعلاقات المتعدية[٥١].

من ثم، أشار دي مورجان إلى أن قوانين القياس المنطقي لا يمكن انشاؤها دون وجود مبادئ إضافية بخلاف المبادئ الثلاثة التقليدية المتعلقة بطبيعة العلاقة "يكون "التي يجب أن تكون:–

- عكسية: "X يكون Y تعطي Y تكون X"
- متعدية: "X تكون Y و Y تكون Z إذن فإن X تكون Z".

فكلا المبدأين لا يتم استنتاجهم من المبادئ الثلاثة التقليدية (الهوية وعدم التناقض والثالث المرفوع) بل يشترط وجودهما بصورة مستقلة عنهم(٥٢). وذلك لسببين:-

أولًا: اقتناع دي مورجان بأن القياس التقليدي قائم على العكس والتعدي.

ثانيًا: إذا كانت قوانين القياس تتبع من امكانية العكس والتعدي، إذن فإن قوانينه ينبغي أن تتحقق في أي علاقة تتوافر فيها هذان الشرطان، وليس فقط في العلاقة التي يعبّر عنها بـ "يكون". ومن ثم، يصبح حصر الرابطة المنطقية على "يكون" أمرًا اختياريًا وغير ضروري(٥٣).

يشير دي مورجان – في مقدمة كتابه "المنطق الصوري" – إلى أن أحد اكتشافاته الرئيسة هي أنه:-

في صورة القضية، تخضع الرابطة فقط للشروط اللازمة لإجراء لاستدلال(٥٤).

وهذا يعني أنه عند تطوير نظرية القياس لم يكن اهتمام دي مورجان منصبًا على المعاني الممكنة التي قد يلحقها علماء المنطق بالرابطة "يكون"، وانما ركز على الشروط الصورية للرابطة؛ المتمثلة في العكس والتعدي (٥٥). وذلك لضمان اجراء استدلال منطقي سليم؛ أي:-

- هل العلاقة عكسية؟ إذا كان X مرتبط بـY ، فهل Y مرتبط بـ X ؟
- هل العلاقة متعدية؟ إذا كان X مرتبط بـY، وY مرتبط بـ Z، فهل X مرتبط بـ Z ؟

وبمجرد الانتقال إلى هذه الوجهة الصورية، يتضح أن ثمة عديد من الروابط الأخرى التي تحقق أحد أو بعض هذه الشروط الصورية، إضافة إلى الرابطة التي يعترف بها علماء المنطق بصورة تقليدية، إذ يقول دي مورجان أن:-

كل رابطة يمكن ابتكارها والتعبير عنها باستخدام المصطلحين "يكون" و"لا يكون"، بحيث تحقّق الشروط الثلاثة (الهوية، عدم التناقض، والثالث المرفوع)، فإنها تجعل جميع قواعد المنطق صادقة. ولا شك أن الهوية المطلقة absolute identity كانت هي العلاقة التي نشأت منها كل الروابط الأخرى، تمامًا كما نشأت صور وقوانين الجبر خلال الحساب. وحيث إننا الآن نبتكر انساق جبرية خلال تجريد صور وقوانين إجراءات الجبر، وإضافة معانٍ جديدة لها، كذلك يمكننا أن نبتكر معانٍ جديدة لكل أشكال الاستدلال، بالنهج نفسه الذي نستطيع خلاله إضفاء معانٍ جديدة على "يكون" و"لا يكون" بصورة تحقق الشروط المذكورة أعلاه (الهوية، عدم التناقض، الثالث المرفوع). على سبيل المثال، لنفترض أن X وY وZ رموز تمثل كل واحدة منها صنفًا من الأشياء المادية. ولنفرض أن "يكون" التي توجد بين اثنين من الرموز، كما في "X يكونY" وتعني أن الاثنان مرتبطان معًا، وأن X ترتبط بـ Z عندما ترتبط بـY المرتبطة هي الأخري بـZ، وهكذا فإن جميع أشكال القياس المنطقي ستظل صحيحة تحت هذه المعاني الجديدة(٥٦).

يقدم دي مورجان هنا رؤية جديدة في المنطق، فالمنطق – وفقًا لرؤيته – لا يعتمد على المعاني الثابتة لكلمة "يكون" أو "لا يكون"، بل على البنية الصورية للعلاقات التي تحقق شروطًا منطقية محددة (مثل العكس والتعدي)، فإذا أمكن تعريف كلمة "يكون" بطريقة تحقق هذه الشروط فيمكن حينها بناء قياس منطقي سليم انطلاقًا منها.

ثالثًا: العلاقة المركبة The compound relation

إذا كان الاستدلال يعتمد عادة على وجود علاقة متعدية فهل يمكن إدراك العلاقات واستنتاجها خلال عدة علاقات مترابطة، وليس فقط خلال علاقة واحدة متعدية؟ يشير دي مورجان إلى امكانية ذلك، فعلى سبيل المثال لا يستلزم إدراك العلاقات خلال العلاقات الاكتفاء بعلاقة واحدة فقط. فإذا كان من الممكن رؤية أن:

"كل X لها علاقة مع بعض Y"

وأن:

"كل Y لها علاقة مع بعض Z"

فإنه يترتب على ذلك أن:

"X لها علاقة مركبة مع بعض Z"(٥٧).

يطرح دي مورجان هنا فكرة متقدمة في منطق العلاقات، إذ يُوسع مفهوم الاستدلال المنطقي خلال امكانية استنتاج علاقة جديدة من تركيب عدة علاقات مختلفة دون الاقتصار على علاقة متعدية واحدة. فعلى سبيل المثال: إذا كانت X ترمز إلى طالب، وY ترمز إلى المعلم، و Z ترمز إلى مدير المدرسة، إذن فإننا نستنتج أنه إذا كل طالب له علاقة بـ المعلم (يتلقى التعليم منه). وكان كل معلم له علاقة بـ مدير المدرسة (يعمل تحت إدارته). إذن يمكن استنتاج أن كل طالب له علاقة مركبة بمدير المدرسة، حتى وإن لم تكن العلاقة مباشرة، لكنها موجودة وناتجة من تسلسل من العلاقات المتعددة والمركبة. ويشير دي مورجان إلى أنه:-

> **عندما يكون موضوع علاقةٍ ما هو محمول علاقة أخرى، يمكن جعل المحمول الأول محمولًا لعلاقة مركبة، كما في المثال: X يكون مدرس لـ(ابن اخت Y) أي أن X مدرس ابن أخت Y**(٥٨).

هذا التركيب يُسهل التعامل مع العلاقات المركبة ويختصرها في صيغة واحدة، فبحسب ما ذكره دي مورجان، لدينا هنا علاقة أولى وهي X يكون أستاذًا لشخص ما وليكن Z ، وعلاقة ثانية هي شخص ما Z هو ابن أخت Y. ومن ثم، عند تركيب هاتين العلاقتين؛ وبدلًا من قول أن:

"X هو أستاذ لشخص ما Z،

وأن:

هذا الشخص Z هو ابن أخت Y"

فإنه يمكن صياغتها مباشرة في علاقة واحدة وهي:

"X أستاذ ابن أخت Y ".

ويشير دي مورجان إلى أنه قد لا يكون من الممكن التعبير عن العلاقة بكلمة أو صيغة واحدة دائمًا، فعلى سبيل المثال إذا كان "جون" يستطيع اقناع "توماس"، وكان "توماس" يستطيع اصدار الأوامر لـ "ويليام"، يمكننا الاستدلال على أن "جون" يستطيع إما أن يقنع "ويليام" أو أن يأمره، ولكن إذا أردنا التعبير عن التوصل للنتيجة – خلال كلمة واحدة – عن طريق اقناع الشخص الذي يعطي الأوامر – ولنفرض أننا نستخدم كلمة "يسيطر على" Control لهذا الغرض – فإننا نقول "جون" يستطيع أن يسيطر على "ويليام"[٥٩].

هنا نكون قد أنشأنا رابطًا مركبًا جديدًا، بحيث يعوِّض هذا الرابط المركب عن عدم التعدي في كل من الرابطين الأصليين ("الإقناع" و"الأمر")، وهذا ما يُعرف عند دي مورجان بـ "القياس ذي الرابطين" bicopular syllogism[٦٠].

وهذا النوع من التركيب يسهل التعامل مع العلاقات المعقدة ويختصرها في صيغة واحدة واضحة.

وفي الجدول التالي، يوضح دي مورجان أن جميع أشكال القياس المنطقي يمكن تمثيلها رمزيًا عنها في صورة تركيب بين العلاقات وذلك كما يلي[٦١]:-

	1	2	3	4
I	X..LY Y..MZ X..LMZ	X. LY Y..MZ X..IMZ	X..LY Y. MZ X..LmZ	X.LY Y.MZ X..lmZ
II	X. LY Z.. MY $X..lM^{-1}Z$	X..LY Z..MY $X..LM^{-1}Z$	X..LY Z. MY $X..Lm^{-1}Z$	X. LY Z. MY $X..lm^{-1}Z$
III	Y..LX Y. MZ $X..L^{-1}mZ$	Y.LX Y.. MZ $X..l^{-1}MZ$	Y..LX Y.. MZ $X..L^{-1}MZ$	Y.LX Y. MZ $X..l^{-1}MZ$
IV	Y.LX Z.. MY $X..l^{-1}m^{-1}Z$	Y..LX Z. MY $X..L^{-1}m^{-1}Z$	Y.LX Z.. MY $X..l^{-1}M^{-1}Z$	Y..LX Z.. MY $X..L^{-1}m^{-1}Z$

ترمز الأعداد الرومانية إلى شكل القياس، بينما ترمز الأعداد العربية إلى مراحل الاستدلال أو الخطوات المنطقية داخل كل قياس، ويتكون كل قياس من ثلاثة أسطر: يُمثّل السطران الأول والثاني المقدمات، وتُقرأ هذه المقدمات رأسيًا من الأعلى إلى الأسفل بما يضمن تتبع العلاقة المنطقية بين الحدود. أما السطر الثالث فيتضمّن النتيجة في صورتها الموجبة، وترمز الحروف الكبيرة إلى العلاقة بينما ترمز الحروف الصغيرة إلى سلب العلاقة، وترمز العلامة ($^{-1}$) إلى العكس(٦٢).

وبهذا النسق الرمزي – الذي صاغه دي مورجان – يُصبح من الممكن تمثيل البنية المنطقية للقياس بدقة أكبر، وإبراز طبيعة العلاقات بين الحدود، سواء أكانت في صورتها المباشرة أم السالبة أم المعكوسة.

رابعًا: الاحتواء بين العلاقات

عندما تشير الأسماء إلى أصناف Classes، فإن العلاقة الرئيسة بينها هي علاقة الاحتواء والمحتوى، بالمعنى الذي يشير إلى الكلّ والجزء. وهذه العلاقة تعد رياضية من حيث الصفة؛ إذ يمكن للصنف أن يتكون من أصناف أخرى، تمامًا كما تتكون مساحة من مساحات أخرى. فمن الممكن ماديًا أن يتم الربط بين الصنفين، فقد نتخيل كل البشر في مساحة ما، وكل الحيوانات في مساحة أخرى. ومن ثم، يكون مجموع المساحتين ممثلاً لصنف (الحيوان)، ويكون مجموع البشر والحيوانات هو (الكل) [٦٣].

في السياق نفسه، يشير دي مورجان إلى أنه عندما تشير الأسماء إلى صفات Attribute (أو محمولات)، فإن العلاقة الرئيسة هنا تكون أيضًا علاقة الاحتواء والمحتوى، ولكن بمعنى المركب ومكوناته، وهذه العلاقة تُعد ميتافيزيقية من حيث الصفة؛ أي أن نمط الربط بين المكونات ليس رياضيًا، وإنما يخضع للنقاش الفلسفي الميتافيزيقي. ومع ذلك، فإن الكيفية التي قد ينتهي إليها هذا النقاش ليست ذات أهمية بالنسبة للأغراض المنطقية[٦٤]. إذ يهتم المنطق باستخدام الصفات بوصفها أدوات للتصنيف أكثر من اهتمامه بنتيجة هذا الجدل.

عندما يكون الصنف X محتوى في الصنف Y بوصفه عنصر في الصنف، أي على نحو علاقة الجزء في الكل (المجموع والجزء المكوّن له)، فإن الصفة Y تكون محتواة في الصفة X بوصفها أحد المكونات. وعليه، فإن الصنف (انسان) يكون محتوى في صنف (الحيوان): وبالتالي فإن الصفة (حيوان) تكون محتواة في الصفة (انسان). هذا التناقض الظاهري صادق في كلا معنييه المختلفين، فإذا قلت "هو إنسان" فإنك تقول ضمنًا "هو موجود في صنف الحيوان"، وإذا قلت "هو إنسان" فإنك تقول ضمنًا "صفة الحيوان موجودة بداخله"، فالصنف "إنسان" يوجد داخل الصنف

"حيوان" بوصفه علاقة جزء من كل، وبالتالي فإن الصفة "حيوان" توجد في الصفة "إنسان" بوصفها علاقة مكون في مركب(٦٥).

من ثم يربط دي مورجان بين الاصناف والصفات ليُظهر أن العلاقة بينهما تنعكس عند النظر إليها من زاوية أخرى مختلفة. بمعنى آخر؛ إذا أخذنا "الإنسان" و"الحيوان" – بوصفهم أصناف – فإذا كان "كل إنسان حيوان" إذن صنف "الإنسان" داخل صنف "الحيوان". وبالتالي، فهي تُعد علاقة جزء من كل. أما إذا أخذنا "الإنسان" و"الحيوان" – بوصفهم صفات – فإذا كان "الإنسان" مركب من عدة صفات منها صفة "حيوان" إذن صفة "حيوان" موجودة داخل صفة "إنسان". وبناءً عليه، فهي تُعد علاقة مكون في مركب.

لكن لماذا يبدو الأمر متناقضًا؟ ذلك لأن الجملة الأولى تشير – من حيث الأصناف – إلى أن "الانسان" داخل "الحيوان". بينما تشير الجملة الثانية – من حيث الصفات – إلى أن "الحيوان" داخل "الإنسان". ومن ثم، فظاهريًا تبدو الجمل متناقضة، لكن الحقيقة أن كل جملة تتحدث عن مفهوم مختلف.

ويمكن توضيح الفكرة بمثال من واقع الحياة اليومية: تخيل مشروب الشاي بالحليب؛ فمن حيث الأكواب (أو الأصناف): يوجد كوب الشاي بالحليب ضمن صنف "المشروبات الساخنة"، ومن ناحية المكونات (أو الصفات): توجد صفة "الحليب" داخل مشروب "الشاي بالحليب"، وهذا تحديدًا ما أشار إليه دي مورجان خلال أمثلته عن "الإنسان" و"الحيوان" سالفة الذكر.

أما عن الاحتواء بين العلاقات فلا شك أنه يختلف عن الاحتواء بين الأصناف، فإذا كان الاحتواء بين الأصناف يتم عند وجود صنفين أحداهما يحتوي الآخر، بحيث يكون كل عضو في الصنف الأول عضوًا أيضًا في الصنف الثاني، دون أن يلزم العكس؛ إذ إن الأمر في الاحتواء بين العلاقات مختلف (٦٦). إذ إن مفهوم الاحتواء بين العلاقات عند دي مورجان معناه أن:

العلاقة L تكون محتواة في العلاقة M

إذا تحقق أن:

كلما ارتبط X بالعلاقة L مع Y

فإنه:

يرتبط أيضًا بالعلاقة M مع Y نفسه(٦٧).

مما سبق يتضح أن دي مورجان يحدد معنى الاحتواء بين العلاقات وهو مختلف عن احتواء الأصناف (سابق الذكر). إذ إن الاحتواء بين العلاقات – عند دي مورجان – يتعامل مع أزواج مرتبة (X,Y) وليس أعضاء مفردة: فإذا كان:

X مرتبط بعلاقة L مع Y

فهذا يستلزم بالضرورة أن:

X مرتبط بالعلاقة M مع Y نفسها.

في السياق نفسه، لا ينبغي الخلط بين ذلك وبين علاقة احتواء الصنف والتي توجد بين حدي العلاقة؛ فعلى سبيل المثال: العلاقة "جد لـ "محتواة في العلاقة "سلف لـ"، لأن كل من هو جد لـ Y، فهو بالضرورة سلف لـ Y نفسه. وبالمقابل، فإن العلاقة "جد لـ " ليست محتواة في العلاقة "أب لـ"، لأن الجد لـ Y ليس بالضرورة أن يكون أبًا لـ Y نفسه، بل أبًا لأحد والديه (٦٨). ويستخدم دي مورجان الرمز:

))

وذلك للإشارة إلى علاقة:

"L محتواة في M"

والتي يقصد بها أن:

"كل L تكون M"

حيث L و M هما حدود الصنف، أي:

L))M

وفقًا لصياغة دي مورجان الرمزية [٦٩]. ومن ثم، استخدم دي مورجان الرمز ((لتمثيل مفهومين مختلفين من حيث الصورة الرمزية لكن متصلين من حيث المعني؛ إذ إن:-

"L محتواة في M"

ترمز إلى أن:

علاقة L محتواة داخل العلاقة M بالطريقة التي شرحها سابقًا

من ثم:

كلما تحققت L بين أي X و Y ، تحققت معها M بينهما

وأيضًا ترمز:

"كل L تكون M"

إلى الكم الكلي على مستوى الأصناف؛ أي:

"كل L هو M "

ومن ثم، ترمز كل من:

"L محتواة في M"

وأيضًا:

"كل L هو M"

إلى العلاقة المنطقية نفسها – من منظور دي مورجان – ولذلك استخدم الرمز نفسه لهما. وفي كلا الحالتين، كان دي مورجان يكتب الصيغة الرمزية:

L))M

وربما كان السبب في استخدامه الرمز نفسه هو خضوع احتواء العلاقات واحتواء الأصناف للفكرة ذاتها، هي الاحتواء المنطقي؛ فالصيغة الرمزية:

L))M

تعني ضمنًا: إذا انطبقت L على شيء، فإن M تنطبق عليه أيضًا، سواء أكانت L و M حدود الصنف أو حدود العلاقة. لكن يجب الانتباه – كما تم الإشارة سابقًا – إلى أن هذا لا يعني أن كل احتواء بين أصناف يساوي احتواء بين العلاقات، لأن معنى الاحتواء بين العلاقات مختلف عن احتواء الأصناف.

وجدير بالذكر أن علاقة الاحتواء ليست بالامر الجديد على المنطق، فقد اعتمد عليها أرسطو في بناء نسقه المنطقي حيث وضع الأساس الفلسفي والفكري الذي تطورت منه الفكرة لدى دي مورجان فيما بعد عندما أعاد صياغتها بالمعنى الرمزي الحديث في بناء نظرية العلاقات، حيث وضع الأساس الأول لها وقام بتطبيقها على نظرية العلاقات(٧٠).

خامسًا: إجراءات دي مورجان على العلاقات

اسهم دي مورجان في تقديم نوعين من الإجراءات على العلاقات؛ إجراءات نسبية وإجراءات منطقية، وذلك على النحو التالي:-

أ – الاجراءات النسبية

١ – الضرب النسبي

تعبر الصور الرمزية X..(LM)Y او X..LMY عن حاصل الضرب النسبي(٧١)؛ أي أن X يرتبط بـY خلال العلاقة L، بواسطة وسيط Z يرتبط بـY خلال العلاقة M(٧٢). بمعنى آخر؛ يُشير الرمز (LM) إلى الدمج بين علاقتين:

- الأولى هي العلاقة L بين (X وZ)
- الثانية هي العلاقة M بين (Zو Y)

إذن تُمثل الصيغة الرمزية (LM) العلاقة المركبة بين X وY عبر الوسيط Z (٧٣). وهو ما يعبر عن عملية توليد حاصل الضرب النسبي بين العلاقة L والعلاقة M(٧٤). وخلال حاصل الضرب النسبي فإذا تحققت:

X..LY و Y..MZ معًا

فإن ذلك يعطي:

X..LMZ

ولكن إذا تحققت:

X..LY و X..MY معًا

فهذا لا يعطي:

X..LMY [٧٥].

إذ إن العلاقات في هذه الحالة لا تتسلسل عبر Y، بل تبدأ كل علاقة من X مباشرة، دون وجود رابط مشترك يسمح بتكوين علاقة مركبة.

على سبيل المثال إذا كانت L هي العلاقة "اخ لـ" و M هي العلاقة "عمة لـ" فإن الصيغة الرمزية:

X..LMY

تعني أن "X هي أخ لعمة Y" (وهذا لا يعني بالضرورة أن "X هي عم لـ Y" لأن "أخ العمة" لا يساوي دائما "العم"، إذ قد يكون لبعض العمّات إخوة ليسوا أعمامًا للشخص المعني) أما L أو M بمفردها فهي تعبر عن الشخص الذي يملك تلك العلاقة؛ أي L "أخ" أو M تعني "عمة"، أما LY فإنها تعبر عن أي X مرتبطة بـ Y خلال العلاقة L ، أي "أخ لـ Y"[٧٦].

٢ – الجمع النسبي

تعني الصيغة الرمزية X..(L,M)Y أن X يرتبط بـ Y إما بالعلاقة L، أو بالعلاقة M، أو بكليهما. ومن ثم، فالعلاقة هي اتحاد (مجموع) لعلاقات اخرى[٧٧]. وهو ما يعبر عن عملية توليد حاصل الجمع النسبي بين العلاقة L و العلاقة M[٧٨]. أي أن هذه العلاقة ليست "تسلسلية"، بل علاقة اختيارية بين علاقات متعددة. بمعنى آخر؛ إذا كان X يرمز إلى (سليم) وY يرمز إلى (حسن) وL هي العلاقة (صديق لـ)

و M هي العلاقة (زميل عمل لـ)، فإن الصيغة الرمزية X..(L,M)Y تُقرأ على النحو التالي: "سليم إما أن يكون صديق لحسن أو زميل عمل له أو كلاهما".

ب – الإجراءات المنطقية

١ – الجمع المنطقي

ترمز ′LM إلى "علاقة L مع كل M" حيث تعني الصيغة الرمزية:

LM′X

أن:

X مرتبط بعلاقة L مع كل عناصر M.

وهنا تمثل (′) علامة "الكم الكلي" Universal quantity، وهي تُعد جزءًا من وصف العلاقة ذاتها. ومن ثم، فليست:

LM′

مجموعًا حالات متعددة من:

LM

وإنما هي علاقة كلية واحدة تشمل الكل[٧٩]. وهذا يعد حاصل الجمع المنطقي بين كل من العلاقة L والعلاقة M[٨٠].

بمعني أخر؛ لا تعني الصيغة الرمزي LM′X أن X له علاقات منفردة ومتفرقة مع كل عنصر من عناصر M ، بل أن ثمة علاقة واحدة كلية تُعبر عن ارتباط X بجميع أفراد M دفعة واحدة. فعلى سبيل المثال؛ إذا كانت:

- X ترمز إلى (الدكتورة فاطمة).
- L هي العلاقة (تشرف على).
- M هي (طلبة الماجستير).

فإن الصيغة الرمزية تُقرأ على النحو التالي: "الدكتورة فاطمة تُشرف على كل طلبة الماجستير"، وهذا يعني أن العلاقة هنا كلية؛ أي تركز على شمول الطرف الثاني(M) بالعلاقة، وليست مجرد جمع لحالات منفردة (فاطمة تُشرف على الطالب سليم + الطالب زياد + الطالبة تسنيم ...إلخ).

٢ – الضرب المنطقي

ترمز L,M إلى علاقة L بـ M في كل الحالات التي يكون فيها L، أي أن العلاقة L لا تنطبق إلا على عناصر من النوع M. ومن ثم، فكل من هو في علاقة L، فهو في علاقة مع M فقط، ولا شيء غير ذلك. وهنا أيضًا تمثل العلامة (,) "الكم الكلي"، فكل L هو لـ M فقط[٨١]. وهذا هو حاصل الضرب المنطقي بين العلاقة L والعلاقة M [٨٢].

تأتي علامة الكم (,) مع الحرف الذي يسبقها دائمًا، ولكن في العلاقة الرمزية L,M تُقرأ العلامة (,) وكانها تؤثر على الحرف الذي يليها مما يسبب لبسًا في الفهم، ولتجنب هذه الصعوبة اقترح دي مورجان أن تُقرأ L,M على النحو التالي: "كل L هو لـM" فقط [٨٣]. وهي قراءة تهدف إلى تبسيط المعنى؛ في شكل عبارة مباشرة تفيد الحصر.

من ثم، ففي الصيغة الرمزية L,MX تكون العلاقة L مقيدة تمامًا بـM، ولا تصح مع غيرها. بمعنى آخر؛ أنه كلما وُجدت علاقة L موجودة، وجب أن يكون الطرف الثاني من نوع M حصرًا[٨٤]. فعلى سبيل المثال؛ إذا كانت:

- X ترمز إلى (الدكتورة فاطمة).
- L هي العلاقة (تشرف على).
- M هي (طلبة الماجستير).

فإن الصيغة الرمزية تُقرأ على النحو التالي: "الدكتورة فاطمة تُشرف على طلبة الماجستير فقط"، وهذا يعني أن العلاقة هنا كلية أيضًا؛ ولكنها مقيدة تمامًا بـ M (أي طلبة الماجستير) ولا تصح مع غيرهم.

ويعد استخدام دي مورجان للكم الكلي – الذي كان مصاحبا للحدود – وبنائه داخل العلاقة نفسها، من ابرز اسهاماته في منطق العلاقات [٨٥].

خامسًا: السمات المنطقية للعلاقات

فيما يلي أبرز السمات المنطقية للعلاقات عند دي مورجان والقائمة على مفهومي العكس والسلب ومبدأ الاحتواء:-

أ – سلب العكس عكس

اذا كانت العلاقة L تحقق أن:

$$X..LY \text{ مطابقة لـ } Y..L^{-1}X$$

فهذا يعني أن:

$$L^{-1} \text{ هو عكس } L$$

لكن دي مورجان يضيف ملاحظة مهمة، وهي أنه حتى إذا قمنا بسلب العلاقة L؛ أي:

$$\text{not-}L$$

وسلب عكسها؛ أي:

$$\text{not-}L^{-1}$$

فإن خاصية العكس تظل قائمة؛ أي:

$$X..\text{not-}LY \text{ مطابقة لـ } Y..(\text{not-}L^{-1})X$$

وبذلك، فإن سلب العكس عكس، وهو ما يمكن تلخيصه بالصيغة:

$$\text{not-}L \text{ عكس } \text{not-}L^{-1}$$ [٨٦].

بمعنى آخر؛ فليس فقط ثمة ارتباط بين العلاقة وعكسها، بل تظل سمة العكس موجودة في حال سلب كل منهما.

ب – عكس السلب سلب

تعد العلاقة L^{-1} وسلبها $(not\text{-}L)^{-1}$ متقابلتين بالسلب، إذ إن الصيغتين:

$$X..LY \text{ و } X..not\text{-}LY$$

تعدان سلبًا لبعضها البعض، وكذلك الحال عند عكسهما، إذ إن:

$$X..L^{-1}X \text{ و } Y..(not\text{-}L^{-1}Y)$$

متقابلتين بالسلب. ومن ثم نستنتج أن:

$$L^{-1} \text{ و } (not\text{-}L)^{-1}$$

هما سلب لبعضهما البعض (٨٧). أي أن سمة "عكس السلب سلب" تُعد مكملة لسمة "سلب العكس عكس"، لكن دي مورجان يعكسها إذ إنه:-

- سابقًا قال: "سلب العكس هو أيضًا عكس."
- الآن يقول: "عكس السلب هو أيضًا سلب."

من ثم، تظل سمة السلب موجوده في حال عكسها، تمامًا كما أن سمة العكس تظل موجودة في حال سلبها.

جـ – سلب العكس عكس السلب

تكون $not\text{-}L^{-1}$ مساوية لـ $(not\text{-}L)^{-1}$، وذلك لأن:

الصيغة $X..LY$ مطابقة للصيغة $Y.\ (not\text{-}L)^{-1}X$

وهي أيضًا مطابقة للصيغة:

$$X..(not\text{-}L)Y$$

والتي بدورها تتطابق مع الصيغة:

$$Y..(not\text{-}L)^{-1}X$$

وهكذا فإن ترتيب تطبيق السلب والعكس – على العلاقة – واضح في المعنى، وإن بدا مبهمًا في الصورة الرمزية(٨٨). أي إذا كانت العلاقة L ترمز إلى "أب لـ"، فإن عكسها هو:

$$L^{-1}$$

والتي تعني "ابن لـ". فإذا قمنا بسلب العكس، أصبح لدينا:

$$not\text{-}L^{-1}$$

والتي تعني "ليس ابنًا لـ"، وهي مساوية في معناها لعكس السلب؛ أي مساوية لـ:

$$(not\text{-}L)^{-1}$$

والتي تعني "ليس أبًا لـ"، أي أن "ليس أبا لـ" مساوية لـ "ليس ابنًا لـ". من ثم، يمكن تبادل سلب العكس وعكس السلب دون أي تغيير في المعنى؛ فهما متطابقين دلاليًا.

د – الاحتواء والعكس والسلب

إذا كانت العلاقة الأولى محتواة في العلاقة الثانية، فإن عكس العلاقة الأولى يكون محتوى في عكس العلاقة الثانية، ولكن سلب العلاقة الثانية يكون محتوى في سلب العلاقة الأولى(٨٩). فإذا كانت العلاقة L محتواة أو متضمنة في العلاقة M، فإن:–

أ – عكس L (وهو L^{-1}) يكون محتوى في عكس M (وهو M^{-1}).

ب – سلب M (not-M, or m) يكون محتوى في سلب L (not –L, or l).

على سبيل المثال؛ إذا كانت العلاقة "اب لـ" محتواة في العلاقة "سلف لـ" فإن:–

أ – "ابن لـ" تكون محتواه في "خلف لـ"

ب – "ليس سلف لـ" تكون محتواة في "ليس اب لـ"(٩٠).

من ثم، يتضح خلال تلك السمة أن العكس يحافظ على ترتيب الاحتواء، بينما السلب يعكس ترتيب الاحتواء.

هـ – عكس العلاقة المركبة

عكس العلاقة المركبة يعكس كلا عنصري العلاقة ويغير ترتيبهما. فإذا كانت:

X ترتبط بعلاقة L مع علاقة M مع X

فإن:

علاقة M مع Y تكون على علاقة L^{-1} مع X

وأيضًا:

Y تكون على علاقة M^{-1} مع علاقة L^{-1} مع X.

إذن فإن:

$$.M^{-1}L^{-1} = (LM)^{-1}$$

ويُلاحظ أن علاقة الكم الملازم Inherent quantity تتغير في موضعها أيضًا؛ فإذا كانت:

X على علاقة L بـ"كل" every علاقة M مع Y

إذن فإن:

Y تكون على علاقة M^{-1} بـ"لا أحد سوى" none but العلاقة L^{-1} من X

وإذا كان:

X على علاقة L بـ لا أحد سوى M من Y

فإن:

Yتكون على علاقة M^{-1} بكل L^{-1} من X[٩١].

وهذه السمة تتضمن أمرين:–

- التحويل البنيوي للعلاقة المركبة: إذ تعني العلاقة المركبة LM أن X يرتبط بـY أولًا خلال M ثم خلال L، وعند عكسها يجب القيام بـ:-
  - تغيير ترتيب الأطراف حيث تصبح M قبل L
  - عكس كل طرف على حده؛ حيث تتحول M إلى M^{-1} وتتحول l إلى L^{-1}.

ومن ثم فإن نتيجة ذلك أن:

$$.M^{-1}L^{-1} = (LM)^{-1}$$

- تغيير الكم الملازم: حيث لا يقتصر عكس العلاقة المركبة على تغيير الترتيب والعكس، بل يشمل أيضًا تغيير صيغة الكم؛ حيث تتحول "كل" every إلى "لا أحد سوى" none but، والعكس صحيح، لأن الترتيب المعكوس يغير الشمول. وفيما يلي مثال على ذلك:
  - "X أستاذ لكل طلاب Y" تتحول إلى "Y طالب لا أحد سوى أساتذة X"
  - "X أستاذ لا أحد إلا طلاب Y" تتحول إلى "Y طالب لكل أساتذةX"

وقد ضرب دي مورجان مثالًا ملموسًا لتبسيط الفكرة قائلًا:-

إذا كانت X أعلى مرتبة من كل سلف لـY، إذن فإن Y تكون منحدرة descendant للا شئ سوى الأقل منزلة من X(٩٢).

يتضح خلال الفقرة السابقة أن النتيجة النهائية للعكس هي نفسها حتى لو اختلف ترتيب الكتابة. بمعنى آخر؛ إذا كان "الملك أعلى من كل سلف للأمير" (أي كل من سبقه في نسبه الملكي)، فهذا يعني بعد التحويل (أي بعد عكس العلاقة المركبة) أن "الأمير منحدر حصريًا من أشخاص هم أدنى من الملك في المرتبة".

و – قاعدة قلب المكونات مع الكم الملازم

إذا كان ثمة كم ملازم في العلاقة، فإن قلب كل مكون إلى سلبه، مع تبديل علامة الكم بين المكونين، فلن يغير ذلك من المعنى الرمزي الكلي(٩٣). ومن ثم، فإن:–

L لـ"كل" not-L = M لـ"لا أحد سوى" not-M

والعكس صحيح. أي أن:

L لـ"لا أحد سوى" not-L = M لـ"كل" not-M (٩٤).

من ثم تكون العلاقة الناتجة مكافئة للأصلية، بمعنى آخر؛ فإن "المحب لكل انسان" يكون غير محب لـ" لااحد سوى غير البشر"، والمحب لـ"لا أحد سوى البشر" يكون "غير محب لكل غير البشر"(٩٥).

يعد هذا المثال تطبيقًا عمليًا للقاعدة التي ذكرها دي مورجان سابقًا وهي أن المعنى الكلي للعلاقة لا يتغيّر رغم قلب المكوّنات وتغيير صيغة الكم. إذ إن "الشخص الذي يحب كل إنسان" هو نفسه "الشخص الذي لا يحب سوى غير البشر"، وأيضًا إذا كان "شخص لا يحب سوى البشر" فهو بالضرورة "لا يحب كل غير البشر"؛ أي لا يوجد غير بشري واحد يحبه.

ي – سلب المركب عند عدم وجود كم ملازم

إذا كانت العلاقة المركبة لا تحتوي كمًا ملازمًا، فإن سلبها يتم خلال سلب أحد المكونين، وإعطاء الكم الملازم للمكون الأخر(٩٦). ومن ثم:

- إما العلاقة L مع العلاقة M أو not-L لكل M.
- إما العلاقة L مع العلاقة M أو L مع لا أحد سوى not-M(٩٧).

ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي: ليس (المحب لرجل) يكون غير محب لـ"كل" رجل أو يكون محب لـ"لا أحد سوى" غير الرجال(٩٨).

ولكن إذا كان ثمة علامة نرمز إلى الكم الملازم في أحد المكونين، فإن السلب يتحقق باسقاط هذه العلامة واتخاذ سلب المكون الآخر، وبالتالي:-

- إما L لكل M أو not-L مع العلاقة M.
- إما L لـ"لا أحد سوى" M أو L مع not-M[٩٩].

ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي: ليس (محبًا لـ"كل" رجل) يكون غير محب لرجل و ليس (محبًا لـ"لا أحد سوى" الرجال) يكون محب لغير رجل[١٠٠]. وبالتدوين الرمزي؛ فبالنسبة للعلاقة المركبة LM يكون:-

- عكسها: $M^{-1}\ L^{-1}$
- سلبها: IM′ و L,m
- عكس سلبها (أو سلب عكسها): $M,^{-1}\ I^{-1}$ و $m^{-1}L^{-1\prime}$ [١٠١]. ويوضح دي مورجان ذلك تفصيلا خلال الجدول التالي [١٠٢]:-

العلاقة المركبة	العكس	السلب	عكس السلب
			سلب العكس
LM	$M^{-1}L^{-1}$	L,m او LM′	$m^{-1}L^{-1\prime}$ او $M,^{-1}l^{-1}$
LM′ او l,m	$M,^{-1}L^{-1}$ او $m^{-1}l^{-1\prime}$	lM	$M^{-1}l^{-1}$
L,M او lm′	$M^{-1}L^{-1\prime}$او $m,^{-1}l^{-1}$	Lm	$m^{-1}L^{-1}$

بناءً عليه، تكون القاعدتان السابقتان واضحتين كما يلي:-

- تتعامل القاعدة (و) مع الحالات التي فيها كم ملازم، مع قلب المكونات.
- تتعامل القاعدة (ي) مع غياب الكم الملازم، وتضيفه أثناء السلب.

سادسًا: قواعد منطق العلاقات

يوضح دي مورجان أن ثمة قواعد أساسية تحكم التحويلات المنطقية بين العلاقات؛ أي تحويل العلاقات المركبة إلى صيغ منطقية مكافئة، وتتمثل هذه القواعد في "قانونا دي مورجان" و"المبرهنة K"، فكلاهما يمثل قواعد تكافؤ منطقي، غير أن الفارق الجوهري بينهم أن قانونا دي مورجان من القواعد البديهية التي تم إثبات المبرهنة K وفقًا لها.

أ – قانونا دي مورجان

توصل دي مورجان لقانونين في منطق العلاقات، عرض منطوقهم في كتابه "فهرست لنسق مقترح للمنطق" على النحو التالي:-

> **إن سلب مجموع aggregate ما يُعد تركيبًا compound لسلب العناصر المكوِّنة له: إمّا أحد الحدّين X أوY، أو كلاهما not-X و not-Y ... أما سلب مركب ما يُعد مجموعًا لسلب مكوّناته: إمّا كلا الحدّين X وY، أو أحدهما not-X وnot-Y**[١٠٣].

وقد كان دي مورجان يستخدم كلمة تركيب لتعني ما قصده المناطقة من بعده ما تعنيه كلمة العطف Conjunction ، كما كان يستخدم كلمة مجموع لتعني ما قصده المناطقة من بعده ما تعنيه كلمة الفصل Disjunction[١٠٤].

توضح هذه القوانين إمكان تعريف التركيب بين علاقتين عن طريق السلب والجمع وإمكان تعريف الجمع عن طريق السلب والتركيب [١٠٥]. وذلك على النحو الآتي:-

- في القانون الأول يعطي سلب المجموع مركبًا من السلب، فالجملة: "أحمد أو سليم في المكتبة" عند سلبها تكون: "ليس صحيحًا أن أحمد أو سليم في المكتبة". وبتطبيق القانون تتحول إلى: "أحمد ليس في المكتبة و سليم ليس في المكتبة".

ومن ثم، فإذا سلبت جملة تقول "أحدهما موجود"، فإن النتيجة المنطقية تكون إثباتًا على عدم وجود كليهما معًا .

- في القانون الثاني يعطي سلب المركب مجموعًا من السلب. فالجملة: "أحمد و سليم في المكتبة" عند سلبها تكون: "ليس صحيحًا أن أحمد و سليم في المكتبة". وبتطبيق القانون نتوصل إلى أن: "أحمد ليس في المكتبة أو سليم ليس في المكتبة أو كلاهما". ومن ثم، فإذا تم سلب جملة تقول "كلاهما موجود"، فإن النتيجة المنطقية تكون إثباتًا على أن أحدهما – على الأقل – غير موجود.

ولقد طبق المنطق الرمزي هذه القوانين فيما يعد على القضايا – فالربط بين قضيتين يساوى سلب الفصل بين سلب القضيتين، والفصل بين قضيتين يكافئ سلب الربط بين سلب القضيتين[١٠٦] – وذلك لما لهذه القوانين من أهمية تتمثّل في توفير أداة أساسية لتحويل العبارات المنطقية المركبة – في منطق العلاقات – إلى صيغ مساوية يسهل التعامل معها، ولاسيما عند تحليل العلاقات المركبة أو سلبها.

ب – المبرهنة K

إذا كانت علاقة مركبة محتواة في علاقة أخرى، وذلك نتيجة لطبيعة العلاقة نفسها وليس نتيجة لسبب عرضي متعلق بالمحمول، فإن الأمر نفسه يظل صحيحًا وينطبق إذا تم عكس أحد المكونين، وتبادل كل من سلب المكون الآخر وسلب المركب كله . وهذا يعني أنه إذا كانت كل علاقة L ترتبط بعلاقة M مع Z (أيا كانت Z) هي علاقة N مع Z ، وتكتب هكذا:

$$LM))N$$

فإنه يترتب على ذلك:

$$L^{-1}n))M$$

وأيضًا:

$$. nM^{-1}))1$$

وإذا كان:

LM))N

إذن فإن:

n))1M′

وأيضًا:

.nM^{-1}))1M′M^{-1}

ولكن كل l بالنسبة لكل علاقة M ترتبط بعلاقة M^{-1} بـ Z ينبغي أن يكون 1 من Z . وبالتالى يتحقق:

. nM^{-1}))1

ومرة أخرى، إذا كان:

LM))N

إذن فإن:

n))L,M

حيثما:

L^{-1}n))L^{-1}L,m

ولكن العلاقة L^{-1} المرتبطة بعلاقة L مع لا أحد سوى علاقات M مع Z ينبغي أن تكون علاقة بين M و Z ومن هنا:

.(١٠٧) L^{-1}n))m

مما سبق يتضح أن دي مورجان يتناول بالتحليل فكرة احتواء العلاقات المركّبة مثل العرقة المركبة LM في علاقة أخرى N، ويشير إلى أنه إذا تحقق هذا الاحتواء "بحكم طبيعة العلاقات ذاتها"، فإن إجراءات العكس والسلب يمكن أن تنتج احتواءات جديدة بين العلاقات. وذلك بشرط أن يكون الاحتواء يكون ذاتيًا أي ناشئًا عن طبيعة العلاقات نفسها، أي من خصائصها الجوهرية، وليس عرضيًا متعلقًا بمحمول معين دون غيره.

فالفكرة الأساسية انه إذا كان LM محتوى في N، فيمكن عمل تحويلات بعينها بواسطة عكس أحد العلاقات المكونة، مع تبديل سلب المكون الأخر مع سلب المركب كله. ومثالًا على ذلك فإذا كان L ترمز إلى "أب" و M ترمز إلى "أخ" و N ترمز إلى "قريب". فمن ثم تعني:

LM))N

أن "كل أب لأخ شخص ما هو قريب لذلك الشخص". ويشير دي مورجان إلى أنه إذا كان هذا الاحتواء قائمًا بطبيعة العلاقات، فيمكن إعادة صياغة هذه الحقيقة بصيغ أخرى مكافئة من خلال عكس أو أخذ سلب العلاقات.

تُعد المبرهنة K أقل غموضًا مما تبدو عليه، فهي تظهر أنه:

"إذا كان X..LY و Y..MZ إذن X..NZ"

يمكن استنتاج أن:

"إذا X..not-NZ و $Z..M^{-1}Y$ إذن X..not-LZ "[١٠٨].

ومن ثم، تبين المبرهنة K ببساطة أنه إذا كان:

X على علاقة L بـ Y

وإذا كان:

Y على علاقة M بـ Z

إذن:

X على علاقة N بـ Z

يمكننا أن نستنتج أنه إذا كان:

X على علاقة not-N (أو: ليس N) بـZ

وإذا كان:

Z على علاقة المعكوس لـ M بـY

إذن:

X على علاقة not-N (أو: ليس L) بـZ.

ومثالًا على ما سبق فإذا كانت المقدمة: إذا كان أحمد (X) أب لـ (L) خالد (Y)، وخالد أخ لـ (M) معتز (Z)، إذن أحمد قريب لـ (N) معتز. فإن الاستنتاج بالعكس: إذا كان أحمد ليس قريبًا لـ معتز، ومعتز أخ لـ خالد (أي العلاقة المعكوسة للأخوة هي نفسها هنا)، إذن أحمد ليس أبًا لـ معتز. وبالتالى، قرر دي مورجان المبرهنة K بصيغة موجزة على النحو التالي:-

إذا اقترنت علاقتين معًا لتكوّنا ما هو مُحتوى في علاقة ثالثة، فإن عكس أي من العلاقتين المركبتين مع سلب الثالثة – وبالترتيب نفسه – يكون محتوى في سلب العلاقتين الأخرين. وهكذا، فإن المبادئ الثلاثة التالية تكون متطابقة، علمًا بأن علاقتي الأعلى والأدنى تعدان سلبًا لبعضهم البعض، أي أن التكافؤ المطلق غير موجود بينهم، وليكن المركب كالتالى "معلم الأب" والعلاقة الثالثة "فائق". والمبادئ هي:-

كل معلم لوالد يكون أعلى

كل خادم لأدني يكون لا والد

كل أدني للطفل يكون غير معلم

ومن أي مبدأ من الثلاثة يمكن استنتاج المبدأين الأخريين، ولعل هذا يمكن برهنته بشكل عام، ولكن حاليا نكتفي باستنباط أحد التأكيدات الموجودة أمامنا

من تأكيد آخر. وبافتراض التأكيد الثاني، فإنه يترتب عليه أن كل والد لا يكون خادم لأي أدنى، وبالتالي فإن كان ثمة خادمًا فإنه لن يكون خادمًا إلا لـ "أعلى". ومن ثم، يلزم أن يكون معلم الوالد أعلى[١٠٩].

وبناءً على افتراض أن المساواة المطلقة – بين الأعلى والأدني – أمر مستحيل، فإن هذه المبادئ الثلاث تعد متساوية بموجب المبرهنة K[١١٠].

فإذا كانت واحدة منها صحيحة، فإن العبارتين الأخريين يجب أن تكونا صحيحتين أيضًا. ولكن لماذا؟ إذا بدأنا بالعبارة الأولى: "كل سيد لأب هو أعلى". فإننا نستنتج – عن طريق العكس بالسلب – أن "كل خادم لأدنى هو غير أب". وبطريقة مماثلة، يمكننا تحويل العبارة الثانية إلى الثالثة، والثالثة إلى الأولى.

جدير بالذكر أن دي مورجان يرى أن المساواة في المبرهنة K لا تؤدي إلى مساواة حقيقية دائما، ويضرب مثالًا على ذلك بقوله:-

إن أخو الأب يتساوى مع العم من مجرد التعريف نفسه (الأخ للأب هو العم) ولكن "ليس عمًا لطفل" ليس هو نفسه "ليس أخًا"، صحيح أن كل من ليس عمًا لطفل هو ليس أخًا (في ضوء المبرهنة K) لكن العكس غير صحيح: فليس كل من ليس أخًا هو ليس عمًا لطفل [١١١].

من ثم، يتضح أن المبرهنة K تتعامل مع الاحتواء المنطقي بين العلاقات، وليس بالضرورة مع المساواة التامة، فمن الصحيح أن كل من ليس عمًا لطفل هو بالضرورة ليس أخًا (لأن أخو الوالد يجعله بالضرورة عمًا للطفل، فإذا لم يكن عمًا فهو ليس أخًا للوالد أصلًا). لكن ليس كل من ليس أخًا هو ليس عمًا لطفل؛ فقد يكون شخصًا لا علاقة أخوة له مع أحد، لكنه يصبح عمًا لطفل من خلال الزواج أو من خلال النسب

غير المباشر (مثلاً زوج الخالة يعتبر "عم" في العرف الاجتماعي أو القانوني). ومن ثم، يوضح هذا المثال أن المبرهنة لا تحفظ المساواة التامة بين العلاقة الأصلية وعكسها بالسلب، بل قد تحفظ فقط جانبًا واحدًا من الاحتواء.

وخلاصة القول، تُعد المبرهنة K نموذجًا لكيفية استنتاج علاقات جديدة من احتواء علاقات مركبة، بالاعتماد على مبادئ العكس والسلب.

خاتمة

يُعد جهد دي مورجان في تأسيس منطق العلاقات جهد المكتشف لأرض جديدة دون مسحها مسحًا دقيقًا[١١٢]، فرغم أن دي مورجان لم يقدّم نظرية متكاملة للعلاقات المنطقية بالمعنى الدقيق، فإنه وضع الأسس والقواعد الأولية التي قامت عليها هذه النظرية، ومهّد بذلك لتبلورها بصورة متكاملة في ما بعد. ومن ثم، تُعد إسهاماته في تأسيس نظرية العلاقات المنطقية إسهامات أصيلة، وذلك استنادًا إلى:-

(١) **تأسيس مفهوم العلاقات المنطقية:** إذ يعد دي مورجان أول من قدّم الفكرة الأساسية وطرح التصورات الأولى للعلاقات وصاغها معتمدًا على رموز خاصة به، مما سمح بتحليل العلاقات بوصفها كيانات منطقية قائمة بذاتها، وميز بوضوح بين العلاقات البسيطة – أي علاقات من الدرجة الأولى – التي تربط بين طرفين بشكل مباشر والعلاقات المركبة – أي علاقة من الدرجة الثانية – التي تنشأ من تركيب وربط علاقات متعددة. هذا التمييز – بالإضافة إلى التمييز بين العلاقات العكسية والعلاقات السالبة – كان ضروريًا لتطوير منطق أكثر عمومية ومرونة، وذلك خلال التركيز على المصطلحات الرمزية التي طورها لتمثيل العلاقات. ومن ثم، فإسهامات دي مورجان في نظرية العلاقات المنطقية كانت رائدة وأصيلة.

(٢) **توسيع مفهوم الرابطة المنطقية:** لم يحصر دي مورجان الرابطة المنطقية في صيغة "يكون" دون تحليل لشروط هذه الرابطة، بل بحث في شروطها الصورية، خاصة العكس والتعدي، بوصفهما شرطين منطقيين مستقلين، بالإضافة إلى أنهما

ضروريين لبناء استدلال منطقي سليم، إلى جانب المبادئ التقليدية (الهوية، عدم التناقض، الثالث المرفوع).

(٣) **التمييز بين الضروري والكافي في المبادئ المنطقية:** أوضح دي مورجان أن المبادئ الثلاثة التقليدية (الهوية، عدم التناقض، الثالث المرفوع) ضرورية لصحة التفكير، لكنها غير كافية بمفردها لضمان صحة الاستدلال. وهو ما يعكس وعيًا منطقيًا متقدمًا عند دي مورجان؛ إذ ميّز بين القواعد التي تمنع الوقوع في الخطأ وتلك التي تضمن الوصول إلى الحقيقة، وهذا التمييز له أثر مباشر على بناء أي نسق منطقي متكامل، لأنه يمنع الاكتفاء بالقوانين الكلاسيكية ويحث على إضافة أدوات استدلالية أوسع.

(٤) **مفهوم الاحتواء بين العلاقات:** قام دي مورجان بتطوير لفكرة الاحتواء لتشمل العلاقات وليس الأصناف فقط، موضحًا أن العلاقات يمكن أن تكون محتواة إحداها في الأخرى، وأن هذه الخاصية تتأثر بإجراءات العكس والسلب بطريقة منتظمة.

(٥) **ثبات البنية والدلالة في العلاقات المنطقية:** تخضع العلاقات المنطقية – سواء أكانت بسيطة أم مركبة – لقواعد ثابتة عند دي مورجان، تجعل من العكس والسلب والاحتواء إجراءات مترابطة ومتكافئة من حيث البنية والدلالة. فالعكس يحافظ على سمة السلب، والسلب يحافظ على سمة العكس، كما أن تبادل مواضعهم لا يغيّر من المعنى الكلي للعلاقة. أما في حال العلاقات المركبة، فإن دي مورجان أثبت أن التحويل البنيوي للعلاقة المركبة وتغيير الكم الملازم يؤديان دائمًا إلى علاقة منطقية مكافئة. وبذلك، فقد قدّم دي مورجان نسقًا متكاملاً من القوانين يكفل ثبات البنية والدلالة رغم تعدد صور الصياغة الرمزية.

(٦) **ابتكار الاجراءات النسبية:** قدّم دي مورجان مفهومي الضرب النسبي والجمع النسبي بوصفهما أدوات لتمثيل العلاقات رمزيًا ومعالجتها بوصفها كيانات قابلة

للتركيب والتحويل، فضلًا عن أن هاتان العمليتان سمحتا بتركيب علاقات بسيطة لتوليد علاقات أكثر تركيبًا وتعقيدًا، ومعالجتها بطريقة منهجية دقيقة.

(٧) **وضع قواعد التكافؤ المنطقي:** صاغ دي مورجان ما عُرف لاحقًا بـ"قانونا دي مورجان" و"المبرهنة K"؛ بوصفها الأساس العملي لتبسيط وتحويل العلاقات المنطقية المركبة إلى صيغ أبسط مكافئة لها، يمكن التعامل معها بسهولة ودقة، وتكمن أهمية هذه القوانين في أنها تحافظ على المعنى المنطقي مع تبسيط البنية الرمزية.

مصادر الدراسة

1. De Morgan, A.(1847): Formal logic; or, The Calculus of inference, necessary and probable, London: Taylor and Walton
2. De Morgan, A.(1850): On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in Particular of the Copula, and the application of the Theory of Probabilities to some questions of evidence, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume 9, Part 1, PP. 79–127.
3. De Morgan, A.(1858): On the Syllogism, No. III, and on Logic in general, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume 10, Part 1, PP.173 – 230
4. De Morgan, A.(1860): On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume 10, Part 2, PP. 331–358.
5. De Morgan, A.(1860): Syllabus of a Proposed System of Logic, London: Walton and Maberly.

مراجع الدراسة

المراجع الإنجليزية

6. Kneale, W. & Kneale, M. (1971): The Development of Logic, Oxford: Clarendon Press.
7. Lewis, C. I. (1918): A Survey of Symbolic Logic. Berkeley: University of California Press.

8. Martin, R. M. (1976): Some Comments on De Morgan, Peirce, and the Logic of Relations, Transactions of the Charles S. Peirce Society, Vol. 12, No. 3, PP. 223 – 230.
9. Merrill, D. D. (1990): Augustus De Morgan and the Logic of Relations, London: Kluwer Academic Publishers.
10. Styazhkin, N. I. (1969): History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, Cambridge: The MIT Press.

المراجع العربية

١١. رشوان، أحمد رشوان أحمد (٢٠٠٦): منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، أطروحة دكتوراه غير منشوره، جامعة القاهرة: مكتبة كلية الآداب.
١٢. زيدان، محمود فهمي (١٩٧٩): المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، بيروت: دار النهضة العربية.

الهوامش

(١) أستاذ الرياضيات بجامعة لندن، كان عضو في "جمعية كمبردج الفلسفية"، كما كان عضو في "الجمعية الفلكية الملكية". له عدد من المؤلفات التي تناولت منطق العلاقات، وتتمثل فيما يلي:-

(1847): Formal logic; or, The Calculus of inference, necessary and probable, London: Taylor and Walton

(1850): On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in particular of the Copula, and the application of the Theory of Probabilities to some questions of evidence, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume 9, Part 1, PP. 79–127.

(1858): On the Syllogism, No. III, and on Logic in general, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume 10, Part 1, PP.173 – 230

(1860): On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume 10, Part 2, PP. 331–358.

(1860): Syllabus of a Proposed System of Logic, London: Walton and Maberly.

(٢) أنظر في ذلك:

- رشوان، أحمد رشوان أحمد (٢٠٠٦): منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، أطروحة دكتوراه غير منشوره، جامعة القاهرة: مكتبة كلية الآداب.
- زيدان، محمود فهمي (١٩٧٩): المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، بيروت: دار النهضة العربية.

(3) De Morgan, A.: Formal logic; or, The Calculus of inference, necessary and probable, P. 229.

(٤) يستخدم دي مورجان كلمة "ضد" Contrary ليدل بها على كلمة سلب Negative أو نقيض. أنظر في ذلك:-

- زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ٦٩ (الهامش).

(5) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P.45.

(6) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.339.

(7) Ibid, P.339.

(8) Ibid, P.339.

(9) De Morgan, A.: Formal logic; or, The Calculus of inference, necessary and probable, P. 29.

(١٠)رشوان، أحمد رشوان أحمد: منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، ص ١٠٣.

(11) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, PP. 59.

(12) Ibid, PP. 61.

(١٣)رشوان، أحمد رشوان أحمد: منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، ص ١٠٣.

(١٤) زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ٧١.

(15) Martin, R. M. (Summer, 1976): Some Comments on De Morgan, Peirce, and the Logic of Relations, Transactions of the Charles S. Peirce Society, Vol. 12, No. 3, P. 230.

(16) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P. 358.

(17) Ibid, P.341.

(18) Ibid, P.341.

(19) Lewis, C. I. (1918): A Survey of Symbolic Logic. Berkeley: University of California Press, P. 46.

(20) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.342.

(21) Styazhkin, N. I. (1969): History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, Cambridge: The MIT Press, P. 165.

(22) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 46.

(٢٣)رشوان، أحمد رشوان أحمد: منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، ص ١٠٥.

(24) Merrill, D. D. (1990): Augustus De Morgan and the Logic of Relations, London: Kluwer Academic Publishers, P. 117

(25) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 45.

(26) Merrill, D. D.: Augustus De Morgan and the Logic of Relations, P. 117

(27) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.341.

(28) Merrill, D. D.: Augustus De Morgan and the Logic of Relations, PP. 117 – 118.

(29) Martin, R. M.: Some Comments on De Morgan, Peirce, and the Logic of Relations, P. 224.

(30) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.341.

(31) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 10.

(٣٢) زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ٦٧.

(33) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 45.

(٣٤) زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ص ٦٧ – ٦٨.

(٣٥) المرجع نفسه، ص ٦٨ (بتصرف).

(٣٦) العلاقة بين الرابطة المثبتة "يكون" والرابطة السالبه "لا يكون" ليست دائمًا علاقة تناقض بالمعنى المنطقي الصارم، بل قد تكون علاقة تضاد (وهي أضعف من التناقض)، وليس من الضروري أن تكون إحداها سلبًا للأخرى. أنظر:-

- De Morgan, A.: On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in particular of the Copula, and the application of the Theory of Probabilities to some questions of evidence, P. 104.

من ثم، فلا يمكن أن تكونا صادقين في الوقت نفسه، وهذا يمنح مرونة أكبر في التفكير المنطقي؛ ففي التناقض إذا صدق أحد الطرفين، كذب الآخر، ففي المثالين: "الماء يغلي الآن" و"الماء لا يغلي الآن"؛ إذ لا يمكن أن يكونا صادقين معًا، ولا يمكن أن يكونا كاذبين معًا؛ أي أنهما لا يجتمعان معًا ولا يرتفعان معًا. أما في التضاد، فقد يكون أحد الروابط صادقًا، أو كليهما كاذبًا، أي أنهما لا يجتمعان معًا وقد يرتفعان معًا، ففي المثالين "الطقس شديد الحرارة" و"الطقس شديد البرودة"، نلاحظ أنه لا يمكن أن يكونا معًا صادقين، ويمكن أن يكونا كاذبين معًا فقد يكون – على سبيل المثال – "الطقس معتدل".

(٣٧) زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ٦٨ بتصرف.

(38) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.335.

(39) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 30.

(40) Ibid, P. 46.

(٤١) رشوان، أحمد رشوان أحمد: منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، ص ١٠٤.

(42) Kneale, W. & Kneale, M. (1971): The Development of Logic, Oxford: Clarendon Press, P. 427.

(43) Ibid, P. 427.

- نقلا عن: زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ٦٩ (الهامش).

(٤٤) زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ص ٦٧ – ٦٨.

(45) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 46.

(46) Ibid, P. 30.

(47) Ibid, P. 49.

(48) Ibid, P. 46.

(49) Kneale, W. & Kneale, M. (1971): The Development of Logic, Oxford: Clarendon Press, P. 427.

(50) Ibid, P. 428.

(٥١)رشوان، أحمد رشوان أحمد: منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، ص ١٠٣.

(52) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.336.

(53) Merrill, D. D.: Augustus De Morgan and the Logic of Relations, P. 116.

(54) De Morgan, A.: Formal logic; or, The Calculus of inference, necessary and probable, London: Taylor and Walton, P. iii.

(55) Ibid, P. 58.

(56) Ibid, PP. 50 – 51.

(57) De Morgan, A.: On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in particular of the Copula, and the application of the Theory of Probabilities to some questions of evidence, P. 108.

(58) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 46.

(59) De Morgan, A.: On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in particular of the Copula, and the application of the Theory of Probabilities to some questions of evidence, P. 108.

(60) Ibid, P. 108.

(61) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.350.

(62) Ibid, P.351.

(63) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 49.

(64) Ibid, P. 49.

(65) Ibid, P. 50.

(٦٦) يتعامل هذا المعنى مع الأصناف بوصفها كائنات رياضية مجردة، حيث يتركز الاهتمام على انتماء أعضاء الأصناف وليس على طبيعة العضو نفسه أو نوع العلاقة التي تربطه بغيره، فالمهم هو الشرط الأحادي الاتجاه؛ حيث تستلزم العضوية في الصنف الأول العضوية في الثاني، لكن ليس العكس بالضرورة، وإلا لكان لدينا تساوٍ بين الأصناف. فعلى سبيل المثال نجد أن صنف "المثلثات المتساوية الأضلاع" محتوى في صنف "المثلثات"، لكن ليس كل مثلث مثلثًا متساوي الأضلاع.

(67) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 47.

(68) Ibid, P. 47.

(69) Ibid, P. 47.

(٧٠) رشوان، أحمد رشوان أحمد: منطق العلاقات وأثره في تطور المنطق المعاصر، ص ص ١٠٨ – ١٠٩.

(71) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.341.

(72) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 45.

(73) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.341.

(74) Styazhkin, N. I.: History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, P. 165.

(75) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 45.

(76) Ibid, P. 45.

(77) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.341.

(78) Styazhkin, N. I.: History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, P. 165.

(79) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.341.

(80) Styazhkin, N. I.: History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, P. 165.

(81) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.341.

(82) Styazhkin, N. I.: History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano, P. 165.

(83) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 45 – 46.

(84) Ibid, P. 46.

(85) Merrill, D. D.: Augustus De Morgan and the Logic of Relations, P. 118.

(86) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.342.

(87) Ibid, P.343.

(88) Ibid, P.343.

(89) Ibid, P.343.

(90) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 46.

(91) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.343.

(92) Ibid,, P. 343 (Footnote).

(93) Ibid, P. 343.

(94) Ibid, P. 343.

(95) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 46.

(96) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P. 343.

(97) Ibid, P. 343.

(98) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 47.

(99) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P. 343.

(100) Lewis, C. I.: A Survey of Symbolic Logic, P. 47.

(101) Merrill, D. D.: Augustus De Morgan and the Logic of Relations, P. 120.

(102) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P. 343.

(103) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, P. 41.

(١٠٤) زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ٧١ بتصرف.

(١٠٥) المرجع نفسه، ص ٧١ بتصرف.

(١٠٦) المرجع نفسه، ص ٧١.

(107) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P. 344.

(108) Merrill, D. D.: Augustus De Morgan and the Logic of Relations, P. 121.

(109) De Morgan, A.: Syllabus of a Proposed System of Logic, PP. 46 – 47.

(110) Merrill, D. D.: Augustus De Morgan and the Logic of Relations, P. 122.

(111) De Morgan, A.: On The syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations, P.344.

(١١٢) زيدان، محمود فهمي: المنطق الرمزي؛ نشأته وتطوره، ص ٧٢.

De Morgan's contributions in the foundation of the theory of logical relations

"An Analytical Study of Modern Logic"

Abstract

The study examined De Morgan's contributions in the foundation of the theory of logical relations, which constitutes one of the fundamental pillars upon which modern logic is built. This was carried out through reliance on De Morgan's original writings, thereby providing an accurate and in-depth understanding of his ideas. The study began by presenting the concept of logical relation as introduced by De Morgan, noting that such a relation arises in the human mind when connecting two ideas, and does not exist independently in nature. He classified relations into two types: first-order relations (which link two terms) and second-order relations (which link the relations themselves). He also distinguished between converse relations and contrary relations, while emphasizing the symbolic terminology he developed to represent them. the study then moved on to discuss the logical copula and its necessary conditions, according to De Morgan—namely, convertible and transitive —as prerequisites for constructing Valid Logical Inference, in addition to the traditional principles (identity, non-contradiction, and the excluded middle). The study further addressed De Morgan's conception of compound relations and the containing among relations, along with the logical operations governing them, it did not overlook the characteristics of relations, which—according to De Morgan—are based on convertible and contrary. Finally, it concluded with a discussion of the rules of logical equivalence in De Morgan's work, represented in De Morgan's laws and theorem K.

Keywords: De Morgen; Logical relation, Logical copula.