حساب قسط الخطر لتأمين المشروعات المتناهي الصغر باستخدام توزيعات جيب الزاوية لتوزيعات باريتو

إعداد

د. أماني محمد عجوة

أستاذ مساعد بقسم العلوم الكمية

كلية التجارة – جامعة السويس

amany-agwa@com.suezuni.edu.eg

د. هدى محمد السيد بدوي

أستاذ مساعد بقسم التأمين

كلية التجارة بنات – جامعة الأزهر

hudabadawy2017@gmail.com

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية

كلية التجارة – جامعة دمياط

المجلد السابع ــ العدد الأول ــ الجزء الرابع ــ يناير ٢٠٢٦

التوثيق المقترح وفقاً لنظام APA:

عجوة، أماني محمد؛ بدوي، هدى محمد السيد .(٢٠٢٦). حساب قسط الخطر لتأمين المشروعات المتناهي الصغر باستخدام توزيعات جيب الزاوية لتوزيعات باريتو، **المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية**، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٧(١)٤، ٤٢١-٤٥٢.

رابط المجلة: https://cfdj.journals.ekb.eg/

حساب قسط الخطر لتأمين المشروعات المتناهي الصغر باستخدام توزيعات جيب الزاوية لتوزيعات باريتو

د. أماني محمد عجوة؛ د. هدى محمد السيد بدوي

ملخص البحث

يهدف هذا البحث إلى حساب قسط الخطر لوثيقة تأمين المشروعات المتناهي الصغر باستخدام توزيعات جيب الزاوية لتوزيعات باريتو، تم استخدام ثلاث توزيعات من توزيعات باريتو هم توزيع باريتو، توزيع لوماكس ، توزيع بر (توزيع باريتو المعمم)، وتم أيضا استخدام توزيعات جيب الزاوية لهذه التوزيعات الثلاث. تم استخدام بيانات تأمين المشروعات المتناهي الصغر لمدة ثلاث سنوات لشركة GIG مصر، تم توفيق بيانات قيم المطالبات باستخدام الستة توزيعات وتم استخدام طريقة الامكان الأعظم فى تقدير قيم المعلمات المجهولة، وأسفرت الدراسة عن صلاحية الستة توزيعات لتمثيل بيانات الدراسة وفقا لاختبار كولومجروف سمرنوف، وأوضحت الدراسة أن أفضل توزيع لتمثيل قيم المطالبات هو توزيع دالة الجيب لتوزيع بر(توزيع باريتو المعمم) وفقا لمعيارى BIC & AIC ، وتوصلت الدراسة إلى أن استخدام دالة الجيب لتوزيعات باريتو أفضل قليلا من توزيعات باريتو الأصلية فى تمثيل بيانات مطالبات تأمين المشروعات المتناهي الصغر، كذلك استخدام توزيعات دالة الجيب يقلل من الشروط اللازمة لايجاد المتوسط والتباين فى توزيعات باريتو. ويعد توزيع برنولى هو التوزيع الأفضل فى تمثيل تكرار المطالبة لوثائق تأمين المشروعات المتناهي الصغر نظرا لأن الوثيقة لها حالتان فقط هما حدوث مطالبة أو عدم حدوث مطالبة، وقسط الخطر المحسوب منخفض نسبيا نظرا لانخفاض معدل تكرار المطالبات.

الكلمات المفتاحية: التأمين متناهى الصغر، توزيعات دالة الجيب، قسط الخطر، توزيعات باريتو

١. مقدمة

تعد نمذجة قيم المطالبات هى حجر الأساس اللازم لبداية عملية تحديد قسط الخطر الخاصة بوثيقة التأمين، فإذا كانت عملية النمذجة غير دقيقة فإن هذا يؤدى إلى وجود تحديد خاطئ لقسط الخطر، وقد يكون القسط أقل من اللازم مما يسبب مشاكل مالية لشركة التأمين أو أكبر من اللازم مما يؤدى إلى انسحاب العملاء ذوى الأخطار الجيدة (Fissler et al., 2022).

ونظرا لاختلاف طبيعة التأمين المتناهي الصغر عن بقية أنواع التأمين، حيث يوجد حداً أقصى لمبالغ التأمين فى وثائق التأمين المتناهي الصغر، وصل الحد الأقصى لمبالغ التأمين فى وثائق التأمين المتناهي الصغر إلى ٢٢٠٠٠٠ جنيه مصرى عام ٢٠٢٣ (الهيئة العامة للرقابة المالية، ٢٠٢٣)، مما يؤدى إلى صغر قيم المطالبات، لذلك يجب استخدام نماذج احصائية تتلائم مع تخفيف حدة ذيل التوزيع للتوزيعات المستخدمة فى نمذجة قيم المطالبات، مع الحفاظ على عدد معلمات التوزيع الأصلى بدون زيادة عدد معلماته.

(١-١) مشكلة البحث

تتمثل مشكلة البحث الرئيسة فى قلة عدد الدراسات التى تناولت تسعير وثائق التأمين المتناهي الصغر بصفة عامة، وعدم وجود أى دراسة استفادت من توزيعات جيب الزاوية فى التسعير بصفة خاصة. كذلك ونظرا لكون توزيعات باريتو هى توزيعات ذات ذيل ثقيل ومرنة لذلك نرغب فى الاستفادة من مرونة التوزيع فى التعامل مع حجم المطالبات واكسابه مرونة أكثر باستخدام جيب الزاوية للتوزيع، كذلك فإن عملية جيب الزاوية يمكن أن تخفف من شروط توزيعات باريتو عند حساب الوسط الحسابى والتباين.

(١-٢) أهمية البحث

تنبع أهمية البحث من الاعتبارات التالية:

- منتجات التأمين متناهى الصغر تلبى احتياجات قطاع عريض من محدودى الدخل، والتى تفتقر إلى هذا النوع من الخدمات.
- إن استخدام نماذج أكثر دقة عند نمذجة قيم المطالبات فى التأمين المتناهي الصغر يجعل عملية التسعير أكثر موضوعية وكذلك أكثر كفاءة ويوفر الوقت والمال.

(١-٣) هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى حساب قسط الخطر لتأمين المشروعات المتناهي الصغر باستخدام توزيعات جيب الزاوية لتوزيعات باريتو (باريتو- باريتو النوع الثانى ((لوماكس) – باريتو المعمم (بر Burr)) لنمذجة قيم المطالبات مع مقارنتها بتوزيعات باريتو العادية. واستخدام توزيع برنولى لنمذجة عدد الحوادث نظرا لحدوث حادث واحد فقط لبعض الوثائق أو عدم حدوث حوادث للوثائق الأخرى.

١. توفيق بيانات التأمين المتناهي الصغر باستخدام توزيعات باريتو ، وتوفيق هذه البيانات مرة أخرى باستخدام توزيعات جيب الزاوية لتوزيعات باريتو.
٢. تقدير معلمات التوزيعات المستخدمة باستخدام طريقة الامكان الأعظم Maximum Likelihood Method
٣. إختبار جودة التوفيق للتوزيعات المستخدمة باستخدام اختبار كولومجروف سمرنوف Kolmogorov Smirnov
٤. المقارنة بين التوزيعات التى أثبتت نتائج اختبارات جودة التوفيق صلاحيتها لتمثيل البيانات باستخدام معيارى BIC & AIC
٥. توفيق بيانات عدد الحوادث باستخدام توزيع برنولى نظرا لوقوع حادث واحد فقط خلال العام .
٦. استخدام المحاكاة للتأكد من أن النموذج الذى تم اختياره نتائجه قريبة من الواقع.
٧. حساب قسط الخطر لتأمين المشروعات متناهى الصغر

(١-٤) حدود الدراسة

تتناول هذه الدراسة حساب قسط الخطر لوثائق تأمين المشروعات المتناهي الصغر فى مصر بالتطبيق على بيانات ثلاث سنوات (٢٠٢٠ – ٢٠٢٢) لشركة GIG مصر. وتستخدم لغة البايثون لاجراء الحاسابات والاختبارات اللازمة للدراسة التطبيقية.

(١-٥) هيكل البحث

بعد استعراض مقدمة البحث يعرض البحث كالتالى.

الجزء الثانى: استعراض للدراسات السابقة فى مجال التأمين المتناهي الصغر، والدراسات السابقة فى مجال النمذجة باستخدام التوزيعات الاحتمالية ذات الذيل الخفيف وذات الذيل الثقيل، والدراسات السابقة الخاضة بالنمذجة باستخدام توزيع دالة الجيب للتوزيعات المختلفة.

الجزء الثالث: يتم عرض شرح لمفهوم توزيعات دالة الجيب للتوزيعات

الجزء الرابع: عرض التوزيعات الاحتمالية المستخدمة فى الدراسة.

الجزء الخامس: تقدير المعلمات المجهولة للتوزيعات المستخدمة فى الدراسة باستخدام طريقة الامكان الأعظم.

الجزء السادس: الدراسة التطبيقية

الجزء السابع: النتائج

الجزء الثامن: التوصيات

٢. الدراسات السابقة

(٢-١) الدراسات السابقة للتأمين متناهى الصغر

دراسة (بدوى ٢٠٢٥)

هدفت هذه الدراسة إلى تقييم الأداء المالى وغير المالى للتأمين متناهى الصغر وذلك باستخدام المؤشرات العشرة الرئيسة لقياس الأداء المالى وكذلك قياس الأداء والكفاءة الفنية باستخدام أسلوب تحليل مغلف البيانات للشركات العاملة فى السوق المصري بالتأمين المتناهي الصغر.

دراسة (عجوة & البشير، ٢٠٢٤)

هدفت هذه الدراسة إلى تسعير تأمين الحوادث الشخصية متناهى الصغر وقدمت الدراسة نموذجين من التسعير، التوزيع الأسى المتضخم الأصفار & التوزيع الأسى المتضخم الأصفار والمبتور من اليمين، وتوصلت الدراسة إلى أن السعر المحسوب على أساس التوزيع الأسى المتضخم الأصفار أفضل قليلا من التوزيع الأسى المتضخم الأصفار والمبتور من اليمين، ولوحظ أيضا أن السعر المحسوب على أساس التوزيع الأسى المتضخم الأصفار أعلى من السعر الصافى المحسوب على باستخدام التوزيع الأسى المتضخم الأصفار والمبتور من اليمين.

دراسة:Osifodunrin & José Dias Lopes (2022)

أجرت هذه الدراسة استبيانًا شمل ٦٠ شركة تأمين في نيجيريا، بهدف تقييم مدى تأثير مجموعة من العوامل على كفاءة الإجراءات التنظيمية في التأمين متناهي الصغر. وحددت الدراسة ١٢ عاملًا تمثل العناصر المؤثرة، وتوصلت إلى أن العوامل الأكثر تأثيرًا تمثلت في: الفساد الإداري، عدم وضوح توزيع المهام، الثقافة الوطنية، التكنولوجيا، الابتكار والمرونة التنظيمية، وأخيرًا الموارد المتاحة.

دراسة:Bernards (2022)

تناولت هذه الدراسة التأمين متناهي الصغر كأداة لتمكين الفقراء من الاستمرار في الاستفادة من التمويل الصغير. وركزت على تتبع الأسواق وتحليل أسباب بطء نمو هذا القطاع. أوصت الدراسة بإعادة تصميم العمليات، وتطوير استراتيجيات التسويق والتوزيع، واعتماد سياسات ترويجية استباقية وتسعير دقيق للمنتجات، لتشجيع شركات التأمين التجارية على الاستمرار في تقديم هذه الخدمات. كما أكدت أن من أبرز المعوقات هو ضعف قواعد البيانات المتوفرة.

دراسة:Johari et al. (2022)

حللت هذه الدراسة أثر التغيرات المناخية على الإنتاج الزراعي لصغار المزارعين في ماليزيا، وطرحت وثيقة تأمين متناهية الصغر تعتمد على مؤشرات الطقس، بهدف تخفيف الأعباء المالية الناتجة عن تلك المخاطر. درست ملاءمة المؤشرات المستخدمة مع أنواع المحاصيل والمناطق الزراعية المختلفة، وتوصلت إلى أن بعض المحاصيل لا يناسبها هذا النوع من التأمين. كما بحثت الدراسة قدرة المزارعين على تحمل تكلفة الأقساط، وأشارت إلى أن الأقساط البسيطة يمكن أن تسهم في حماية الإنتاج وزيادته.

دراسة:Groh & McKenzie (2016)

ركزت هذه الدراسة على سوق التأمين المصري، لتحليل تأثير الثورة على الاقتصاد الكلي، وبوجه خاص على قطاع التأمين، ولا سيما تأمين المشروعات متناهية الصغر التي تُعد الأكثر تضررًا من عدم الاستقرار السياسي والاقتصادي. أظهرت النتائج أن ٣٧٪ من أصحاب هذه المشروعات قاموا بشراء وثائق تأمين، رغم تراجع الطلب بعد الثورة بسبب التقلّبات. وأوصت الدراسة بضرورة تطوير المنتجات التأمينية وتسعيرها بشكل مناسب نظرًا لحداثة هذا النوع من التأمين.

دراسة:Biener & Eling (2011)

هدفت الدراسة إلى قياس كفاءة برامج التأمين متناهي الصغر باستخدام أسلوب تحليل مغلف البيانات (DEA)، باعتباره أكثر دقة من الطرق التقليدية التي تعتمد على المؤشرات المالية. شمل التحليل ٢٠ شركة تأمين تعمل في إفريقيا، آسيا، وأمريكا اللاتينية خلال الفترة ٢٠٠٤–٢٠٠٨. وأظهرت النتائج تفاوتًا في الكفاءة بين البرامج المختلفة، وأشارت إلى إمكانية تحسين الأداء من خلال الاستفادة من التكنولوجيا وتوسيع نطاق العمل. كما أظهرت الدراسة أن البرامج الجماعية أكثر كفاءة، لكنها لاحظت وجود ضعف في النتائج نتيجة نقص البيانات، وأوصت بإعادة التقييم عند توفر بيانات أوسع.

دراسة نصر:(1999)

سعى هذا البحث إلى تقديم إطار علمي لتخطيط تأمين الائتمان الموجه للمشروعات الصغيرة الممولة من الصندوق الاجتماعي للتنمية في مصر خلال فترات التحول الاقتصادي. وركز على أهمية ضمان سداد القروض في مواعيدها لتمكين الصندوق من إعادة استخدامها في تمويل مشروعات جديدة، ما يعزز تحقيق أهداف التنمية المنشودة.

(٢-٢) الدراسات السابقة للنمذجة باستخدام التوزيعات الاحتمالية

تستخدم التوزيعات الاحتمالية ذات الذيل الثقيل فى نمذجة قيم المطالبات كبيرة الحجم حيث قدم (Kely et al 2016) أثر نمذجة المطالبات كبيرة الحجم على سوق إعادة التأمين باستخدام ذيل التوزيع باريتو. وقدم (عجوة & عبد اللطيف، ٢٠١٧) النمذجة الاكتوارية لمطالبات التأمين الهندسى باستخدام التوزيعات ذات الذيل الثقيل. وقدم (Merz et al 2022) نمذجة لخسائر الفيضان باستخدام التوزيعات ذات الذيل الثقيل. ودرس (Yan et al 2024) نمذجة خسائر الحريق لأكثر من مسبب خطر باستخدام التوزيعات ذات الذيل الثقيل.

وتستخدم التوزيعات ذات الذيل الخفيف فى نمذجة الظواهر منخفضة القيمة حيث استخدم (Papalexiou et al 2013) كلا من التوزيعات ذات الذيل الخفيف والتوزيعات ذات الذيل الثقيل فى نمذجة الأمطار اليومية. وقدم (Neves & Pereira, 2010) دراسة عن كيفية التمييز بين التوزيعات ذات الذيل الخفيف التى لها نهاية محددة وبين التوزيعات ذات الذيل الخفيف غير المحددة بقيمة معينة والتى تقع فى نطاق Gumbel domain.

(٢-٣) الدراسات السابقة لتوزيعات جيب الزاوية Sine distributions

أشار (Kumar, et al. 2015) إلى استخدام دالة جيب الزاوية Sine function فى التوزيع المستخدم فى نمذجة بيانات مرضى سرطان المثانة. وقدم (Mahmood & Chesnea, 2019) عائلة جديدة من عائلات جيب الزاوية للتوزيعات الاحتمالية وأثبت مرونة التوزيعات داخل هذه العائلة لموائمة قواعد البيانات المستخدمة. وقدم (Hassan et al. 2021) عائلة جديدة تعتمد على دالة مثلثية مع التطبيق على التوزيع الأسى حيث قدم تحويلة معينة تعتمد على دالة جيب الزاوية، وطبق هذا النموذج على زمن الانتظار بالدقائق لكل ١٠٠ عميل بالبنك، وطبقها أيضا على بيانات مرتبطة بالمجال الهندسى، وبيانات أخرى مرتبطة بسرطان المثانة. ودرس (Iso, et al. 2022) خصائص توزيع جيب الزاوية للتوزيع الأسى Sine Exponential distribution ومدى ملائمته لنمذجة بيانات البقاء Survival data . ودرس (Mustapha, et al. 2023) خصائص توزيع دالة الجيب لتوزيع لوماكس واستخدمه فى نمذجة نوعين من البيانات، النوع الأول هو زمن استقرار الحالة الصحية بالأشهر لعينة من مرضى سرطان المثانة، والنوع الثانى هو زمن البقاء بالأيام لعينة من الخنازير حقنت بالبكتريا المسببة لمرض الدرن. وقدم (Adepoju, et al. 2024) الاستدلال الاحصائى لتوزيع جيب الزاوية للتوزيع الأسى Sine Exponential distribution . وقدم (Alghamdi, et al. 2025) عائلة جديدة من التوزيعات باستخدام دالة جيب الزاوية وأثبت مرونتها فى التعامل مع البيانات خاصة حساب فترة الضمان للأجهزة الكهربائية، وكذلك حساب الزمن اللازم لعمل خدمات مكونات الزجاج الأمامى للطائرات.

ملاحظات على الدراسات السابقة

لم تتطرق أى دراسة من الدراسات السابقة إلى استخدام نماذج جيب الزاوية فى حساب قسط الخطر للتأمين المتناهي الصغر، لذلك يهتم البحث بالقاء الضوء على هذه النماذج خاصة أنها تتمتع يتباين أعلى من التوزيع الأصلى حتى تلائم العديد من بيانات المطالبات. كذلك فإن نماذج جيب الزاوية تعطى التوزيع مرونة أكبر بدون إضافة معلمات اضافية.

٣. التوزيعات الاحتماليه التى تستخدم جيب الزاوية Sine Distributions

عند نمذجة أى قاعدة بيانات، فإن الأمر يحتاج إلى توزيعات مرنة، وللحصول على توزيع مرن يمكن اضافة معلمات للتوزيع عن طريق جعل التوزيع معمم Generalized ، أو جعله مركب Compound ، ولكن من عيوب ذلك هو أن التوزيع يصبح أكثر تعقيدا، لذلك يجب البحث عن نموذج مرن بدون إضافة معلمات جديدة، ومن خلال توزيعات جيب الزاوية Sine Distributions يمكن جعل التوزيع مرنا بدون اضافة معلمات جديدة، حيث يتم عمل عملية حسابية تتضمن اضافة دالة مثلثية (مثل جيب الزاوية) على دالة التوزيع التراكمى الأصلية (Tomy & Dominic, 2024).

ويمكن تعريف توزيعات جيب الزاوية Sine Distributions بأنها توزيعات احتمالية تعتمد على جزء من منحنى دالة جيب الزاوية Sine function distribution ، وهذه التوزيعات قادرة على ملائمة البيانات متعددة الأنماط (Adepoju, et al. 2024)

ويمكن توليد توزيع جيب الزاوية Sine distribution عن طريق استخدام العلاقة التالية (Mahmood & chesnea, 2019):

$$F(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}G(x)\right) \qquad (3.1)$$

حيث:

$F(x)$: دالة التوزيع التراكمى لتوزيع جيب الزاوية sine distribution

$G(x)$: دالة التوزيع التراكمى للتوزيع الذى نرغب فى توزيع جيب الزاوية له

π : هى ثابت قيمته $\frac{22}{7}$ لضمان أن تكون القيمة الناتجة محصورة بين الصفر والواحد الصحيح.

ويمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال كالتالى:

$$f(x) = \frac{\pi}{2}g(x).cos\left(\frac{\pi}{2}G(x)\right) \qquad (3.2)$$

حيث $g(x)$ هى ناتج المشتقة الأولى بالنسبة للمتغير x عند اشتقاق الدالة $G(x)$

٤. التوزيعات الاحتمالية المستخدمة فى الدراسة

تستخدم هذه الدراسة مجموعة من التوزيعات الاحتمالية يتم عرضها فى الأجزاء القادمة.

(٤-١) توزيع باريتو Pareto distribution

توزيع باريتو هو من التوزيعات ذات الالتواء الموجب ، وتكون دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمى للمتغير العشوائى الذى يتبع توزيع باريتو (CT6, 2013)

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \qquad x > 0 \quad (4.1.1)$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha} \qquad x > 0 \qquad (4.1.2)$$

ويكون متوسط وتباين التوزيع كالتالى:

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \qquad \alpha > 1 \quad (4.1.3)$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 1)} \qquad \alpha > 2 \quad (4.1.4)$$

وعند اجراء اختبار الدالة المولدة للعزوم لتوزيع باريتو نلاحظ أن:

$$M_x(t) = \infty \qquad \forall\, t > 0 \qquad (4.1.5)$$

بذلك فإن هذا التوزيع من توزيعات الذيل الثقيل.

(٤-٢) توزيع لوماكس (باريتو النوع الثانى) Lomax Distribution

توزيع لوماكس هو من التوزيعات ذات الالتواء الموجب وهو يشبه توزيع باريتو ويطلق عليه توزيع باريتو ٢ ويمكن عرض دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمى للمتغير العشوائى الذى يتبع توزيع لوماكس كالتالى (Egiles, 2011):

$$f(x) = \frac{\alpha\beta}{(1 + \beta x)^{(\alpha+1)}} \qquad x > 0 \quad (4.2.1)$$

$$F(x) = 1 - (1 + \beta x)^{-\alpha} \qquad x > 0 \qquad (4.2.2)$$

وبذلك يكون متوسط وتباين التوزيع كالتالى:

$$E(x) = \frac{1}{\beta(\alpha - 1)} \qquad \alpha > 1 \qquad (4.2.3)$$

$$Var(x) = \frac{\alpha}{\beta^2(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \qquad \alpha > 2 \quad (4.2.4)$$

(٤-٣) توزيع بر (توزيع باريتو المعمم) *Burr Distribution*

يعد توزيع بر *Burr* هو تعميم لتوزيع باريتو حيث يتم اضافة معلمة اضافية له لزيادة مرونته، ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال والة التوزيع التراكمى كالتالى *(C2, 1995)* :

$$f(x) = \frac{\alpha\gamma\lambda^{\alpha}x^{\gamma-1}}{(\lambda + x^{\gamma})^{\alpha+1}} \qquad x > 0 \quad (4.3.1)$$

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x^{\gamma})^{\alpha}} \qquad x > 0 \quad (4.3.2)$$

ويكون متوسط وتباين التوزيع باستخدام المبادئ الأولية كالتالى:

$$E(x) = \lambda^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)} \qquad \alpha > \frac{1}{\gamma} \qquad (4.3.3)$$

$$E(x^2) = \lambda^{\frac{2}{\gamma}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{2}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)} \qquad \alpha > \frac{2}{\gamma} \qquad (4.3.4)$$

$$Var(x) = \lambda^{\frac{2}{\gamma}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{2}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)} - \left(\lambda^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 \quad \alpha > \frac{2}{\gamma} \qquad (4.3.5)$$

(٤-٤) توزيع جيب الزاوية لتوزيع باريتو Sine Pareto Distribution

باستخدام المعادلة (3.1) *والمعادلة* (3.2) *والمعادلة* (4.1.1) & (4.1.2) *يمكن الحصول على ودالة كثافة الاحتمال و دالة التوزيع التراكمى لتوزيع جيب الزاوية لتوزيع باريتو :*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}\right)\right) \qquad (4.4.1)$$

$$F(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}\right)\right) \qquad (4.4.2)$$

ويمكن حساب المتوسط والتباين من المبادئ الأولية كالتالى:

فى البداية يجب تبسيط الدالة عن طريق تحويل المتغيرات:

نختار متغير t بعلاقة معينة مع المتغير x

$$t = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} \qquad (4.4.3)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+x} = t^{-\frac{1}{\alpha}} \qquad (4.4.4)$$

$$\lambda + x = \lambda t^{-\frac{1}{\alpha}} \qquad (4.4.5)$$

$$x = \lambda\left(t^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \qquad (4.4.6)$$

باجراء التفاضل للمعادلة *(4.4.6)*

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda}{\alpha} t^{-\frac{1}{\alpha}-1} \qquad (4.4.7)$$

$$x = 0 \qquad t = 1, \ x = \infty \qquad t = o \qquad (4.4.8)$$

$$dx = -\frac{\lambda}{\alpha} t^{-\frac{1}{\alpha}-1}\, dt \qquad (4.4.9)$$

وبذلك يمكن تحويل المتغير x إلى المتغير t من العلاقة التالية:

$$\int_0^{\infty} f(x).dx = \int_0^1 -g(t).dt$$

$$f(x).dx = -\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\lambda} t^{1+\frac{1}{\alpha}}.cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right).\left(-\frac{\lambda}{\alpha}.t^{-\frac{1}{\alpha}-1}\right)dt$$

$$f(x).dx = -\frac{\pi}{2} cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right).du$$

$$\int_0^{\infty} f(x).dx = \int_0^1 -\left(-\frac{\pi}{2} cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)\right).dt$$

وباستخدام قواعد الدوال المثلثية فإن

$$cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

بذلك تصبح دالة كثافة الاحتمال المحولة كالتالى:

$$g(t) = \frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad 0 < t < 1 \qquad (4.4.10)$$

حيث :

$$\int_0^1 \frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).dt = 1$$

ويمكن حساب المتوسط والتباين كالتالى:

باستخدام المعادلة *(4.4.6)* والمعادلة رقم *(4.4.10)* يمكن حساب القيمة المتوقعة كالتالى:

$$E(x) = \int_0^1 x.g(t).dt$$

$$E(x) = \int_0^1 \left(\lambda\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)\right).\frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).dt$$

$$E(x) = \frac{\pi}{2}\lambda \int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right).sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).dt \quad (4.4.11)$$

$$E(x^2) = \int_0^1 \left(\lambda\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)\right)^2.\frac{\pi}{2} sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).dt$$

$$E(x^2) = \frac{\pi}{2}\lambda^2 \int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^2 . sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) . dt \qquad (4.4.12)$$

$$Var(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 \qquad (4.4.13)$$

وبالرجوع للمعادلة *(4.4.11)* يمكن استخلاص شرط ايجاد المتوسط فى توزيع جيب الزاوية لتوزيع باريتو كالتالى:

بالرجوع للجزء $sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

نلاحظ أن قيمة t تترواح بين قيمة الصفر والواحد الصحيح، ومن قواعد دالة الجيب التقريبية أن جيب الزاوية عندما تقترب الزاوية من الصفر فإن جيب الزاوية يساوى الزاوية نفسها.

$$sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{\pi}{2}t \qquad as\ t \to 0$$

بذلك يصبح المقدار داخل التكامل :

$$\frac{\pi}{2}t\left(t^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) = \frac{\pi}{2}t^{1-\frac{1}{\alpha}} - \frac{\pi}{2}t$$

حتى يمكن عمل تكامل لهذا المقدار ويعطى قيمة حقيقية يجب تحقيق الشرط التالى:

$$1 - \frac{1}{\alpha} > -1$$

بحل هذه المتباينة فإن:

$$\alpha > \frac{1}{2} \qquad (4.4.13)$$

وعند الرجوع للمعادلة *(4.4.12)* وبتطبيق نفس القواعد السابق تطبيقها على المتوسط حيث يجب تحقيق الشرط التالى لحساب التباين:

$$1 - \frac{2}{\alpha} > -1$$

وبحل هذه المتباينة فإن شرط ايجاد التباين فى توزيع دالة جيب الزاوية لتوزيع باريتو هو:

$$\alpha > 1 \qquad (4.4.14)$$

وبذلك فإن توزيع دالة الجيب لتوزيع باريتو قلل من شروط ايجاد المتوسط والتباين فى توزيع باريتو الأصلى.

(٤-5) توزيع جيب الزاوية لتوزيع لوماكس Sine Lomax Distribution

باستخدام المعادلة (3.1.1) *والمعادلة* (4.4.1) *&* *والمعادلة* (4.4.2) *يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمى توزيع لوماكس كالتالى:*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} . \frac{\alpha\beta}{(1+\beta x)^{\alpha+1}} . cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - (1+\beta x)^{-\alpha}\right)\right) \quad x > 0 \qquad (4.5.1)$$

$$F(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}(1-(1+\beta x)^{-\alpha})\right) \qquad x > 0 \quad (4.5.2)$$

ويمكن حساب صيغة للمتوسط والتباين باستخدام التحويلة:

$$t = (1+\beta x)^{-\alpha} \qquad (4.5.3)$$

وبنفس الخطوات السابق ايضاحها فى توزيع باريتو يمكن حساب المتوسط والتباين كالتالى:

$$E(x) = \frac{\pi}{2\beta}\int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right).sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).dt \quad \alpha > \frac{1}{2} \quad (4.5.4)$$

$$E(x^2) = \frac{\pi}{2\beta^2}\int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^2.sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).dt \quad \alpha > 1 \quad (4.5.5)$$

(٤-٦) توزيع دالة الجيب لتوزيع بر (توزيع باريتو المعمم) Sine Burr Distribution

باستخدام المعادلة (3.1.1) *والمعادلة* (4.3.1) *والمعادلة* (4.3.2) *يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمى لتوزيع دالة الجيب لتوزيع بر كالتالى:*

$$f(x) = \frac{\pi}{2}.\frac{\alpha\gamma\lambda^{\alpha}x^{\gamma-1}}{(\lambda+x^{\gamma})^{\alpha+1}}.cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x^{\gamma})^{\alpha}}\right)\right) \qquad x > 0 \quad (4.6.1)$$

$$F(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x^{\gamma})^{\alpha}}\right)\right) \quad x > 0 \quad (4.6.2)$$

ويمكن حساب المتوسط والتباين باستخدام التحويلة التالية كالتالى :

$$t = \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x^{\gamma})^{\alpha}} \qquad (4.6.3)$$

وباستخدام نفس الخطوات السابق توضيحها فى توزيع باريتو يكون المتوسط كالتالى:

$$E(x) = \frac{\pi}{2}\lambda^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{1}{\gamma}} sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt \qquad \alpha\gamma > \frac{1}{2} \qquad (4.6.4)$$

$$E(x^2) = \frac{\pi}{2}\lambda^{\frac{2}{\gamma}}\int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{2}{\gamma}} sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt \qquad \alpha\gamma > 1 \qquad (4.6.5)$$

(٤-٧) توزيع برنولى Bernoulli Distribution

توزيع برنولى هو حالة خاصـــة من توزيع ذى الحدين، يســـتخدم هذا التوزيع عندما تكون النتيجة المنتظرة هى نجاح أو فشل فقط، وهذا ما يناسب وثائق التأمين متناهى الصغر نظرا لأن الوثائق التى أسفرت عن مطالبات تقدمت بمطالبة واحدة فقط خلال العام.

ويمكن كتابة دالة التوزيع الاحتمالى لتوزيع برنولى كالتالى (الهلباوى، ٢٠٠٣) :

$$p(Y = x) = \theta^{y}(1-\theta)^{1-y} \qquad y = 0,1 \quad (4.7.1)$$

ويكون المتوسط والتباين كالتالى (الهلباوى، ٢٠٠٣):

$$E(y) = \theta \qquad (4.7.2)$$

$$Var(y) = \theta(1-\theta) \qquad (4.7.3)$$

(٤-٨) طرق حساب قسط الخطر المستخدمة

يمكن حساب قسط الخطر باحدى الطريقتين التاليتين:

(٤-٨-١) استخدام المتوسط العام للخسارة للوثيقة الواحدة

يمكن حساب قسط الخطر لوثيقة تأمين المشروعات المتناهي الصغر باستخدام العلاقة التالية *(SP8, Acted note, 2024)* :

$$Risk\ Premium = \frac{E(y).E(x)}{Average\ Exposure\ per\ Policy} \qquad (4.8.1)$$

حيث:

$E(y)$: متوسط تكرار المطالبة لكل وثيقة.

$E(x)$: متوسط تكلفة المطالبة الواحدة

$Average\ Exposure\ per\ Policy$: متوسط القيمة المعرضة للخطر (مبلغ تأمين الوثيقة).

(٤-٨-٢) استخدام متوسط المطالبات الاجمالية

عند استخدام نموذج المطالبات الاجمالى يمكن حساب متوسط وتباين المطالبات الاجمالية (CT6, 2013) باستخدام المعادلات التالية:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad S = 0 \ \ if\ N = 0 \qquad (4.8.2.1)$$

$$E(N) = n.E(y) \qquad (4.8.2.2)$$

حيث:

$E(N)$: متوسط عدد المطالبات بالمحفظة كلها

$E(y)$: متوسط عدد المطالبات للوثيقة الواحدة

n : عدد الوثائق داخل المحفظة.

$$E(S) = E(N).E(x) \qquad (4.8.2.3)$$

حيث:

$E(S)$: متوسط المطالبات الاجمالية (العدد، القيمة)

$E(x)$: متوسط قيمة المطالبة لكل وثيقة

$$Var(N) = n.Var(y) \qquad (4.8.2.4)$$

$Var(N)$: تباين عدد المطالبات فى المحفظة

$Var(y)$: تباين عدد المطالبات فى الوثيقة الواحدة

$$Var(S) = E(N).Var(x) + Var(N).\left(E(x)\right)^2 \qquad (4.8.2.5)$$

ويمكن حساب متوسط المطالبات الاجمالية فى المحفظة بعد الأخذ فى الاعتبار الخطأ المعيارى (سالم، ٢٠١٥):

$$E_T(S) = E(S) + w.\sqrt{\frac{Var(S)}{n}} \qquad (4.8.2.6)$$

$E_T(S)$: متوسط المطالبات الاجمالية فى المحفظة بعد الأخذ فى الاعتبار الخطأ المعيارى

w : الدرجة المعيارية من جدول كاى تربيع عند مستوى معنوية معين بدرجة حرية واحدة.

وعند الأخذ فى الاعتبار معدل الفائدة ومعدل التضخم وذلك لمدة نصف سنة فى المتوسط، يمكن حساب قسط الخطر كالتالى (سالم، ٢٠١٥):

$$Risk\ Premium = \frac{E_T(S).(1+f)^{0.5}}{\sum_{i=1}^{n} A_i\,(1+i)^{0.5}} \qquad (4.8.2.7)$$

$\sum_{i=1}^{n} A_i$: مجموع مبالغ التأمين فى المحفظة.

f : معدل التضخم

i : معدل الفائدة

٥. تقدير المعلمات المجهولة للتوزيعات المستخدمة فى الدراسة

يستخدم الباحثان طريقة الامكان الأعظم لتقدير المعلمات المجهولة فى الست توزيعات المستخدمة فى الدراسة.

(٥-١) تقدير المعلمات المجهولة لتوزيع باريتو

يمكن تقدير معلمة توزيع باريتو باستخدام طريقة الامكان الأعظم عن طريق استخدام الصيغة العامة لدالة الامكان الأعظم *(CT6, 2013)*:

$$\mathrm{L}(x;\alpha,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (5.1.1)$$

باستخدام المعادلة *(5.1.1)* والمعادلة *(4.1.1)* يمكن ايجاد دالة الامكان الأعظم لتوزيع باريتو:

$$L(\alpha,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x_i)^{\alpha+1}}$$

$$L(\alpha,\lambda)=\alpha^{n}\lambda^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}(\lambda+x_i)^{-(\alpha+1)} \qquad (5.1.2)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس الطبيعى e للمعادلة *(5.1.2)*

$$\ln(L)=n.\ln(\alpha)+n.\alpha.\ln(\lambda)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda+x_i) \qquad (5.1.3)$$

باجراء التفاضل الأول للمعادلة *(5.1.3)* مرة بالنسبة للمعلمة α ، ومرة بالنسبة للمعلمة λ

$$\frac{\partial\ln(L)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+n.\ln(\lambda)-\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda+x_i) \qquad (5.1.4)$$

$$\frac{\partial\ln(L)}{\partial\lambda}=\frac{n.\alpha}{\lambda}-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda+x_i) \qquad (5.1.5)$$

وبمساواة المعادلتين *(5.1.4)* & *(5.1.5)* بالصفر وحلهما معا يمكن تقدير قيم المعلمات المجهولة.

(٥-٢) تقدير المعلمات المجهولة لتوزيع لوماكس

باستخدام المعادلة *(5.1.1)* والمعادلة *(4.2.1)* يمكن ايجاد دالة الامكان الأعظم لتوزيع لوماكس:

$$L(x;\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha\beta}{(1+\beta x_i)^{\alpha+1}}$$

$$L(\alpha,\beta)=\alpha^{n}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}(1+\beta x_i)^{-(\alpha+1)} \qquad (5.2.1)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس الطبيعى e للمعادلة *(5.2.1)*

$$\ln(L)=n.\ln(\alpha)+n.\ln(\beta)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}(1+\beta x_i) \qquad (5.2.2)$$

باجراء التفاضل للمعادلة *(5.2.2)* مرة بالنسبة للمعلمة α ، ومرة أخرى بالنسبة للمعلمة β

$$\frac{\partial\ln(L)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}(1+\beta x_i) \qquad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+\beta x_i} \qquad (5.2.4)$$

وبمساواة المعادلات *(5.2.3)* & *(5.2.4)* بالصفر وحلهما معا يمكن الحصول على تقدير المعلمات المجهولة لتوزيع لوماكس.

(٥-٣) تقدير المعلمات المجهولة لتوزيع بر (توزيع باريتو المعمم)

باستخدام المعادلة *(5.1.1)* والمعادلة *(4.3.1)* يمكن ايجاد دالة الامكان الأعظم لتوزيع بر (توزيع باريتو المعمم):

$$L(x;\ \alpha,\lambda,\gamma) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha\gamma\lambda^{\alpha}x_i^{\gamma-1}}{\left(\lambda+x_i^{\gamma}\right)^{\alpha+1}}$$

$$L(\alpha,\lambda,\gamma) = \alpha^n\gamma^n\lambda^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\gamma-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda+x_i^{\gamma}\right)^{-(\alpha+1)} \qquad (5.3.1)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس الطبيعى e للمعادلة *(5.3.1)*

$$\ln(L(\alpha,\lambda,\gamma) = n.\ln(\alpha) + n.\ln(\gamma) + n\alpha.\ln(\lambda) + (\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$
$$-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\lambda+x_i^{\gamma}\right) \qquad (5.3.2)$$

وباجراء التفاضل الأول للمعادلة *(5.3.2)* مرة بالنسبة للمعلمة α، ومرة أخرى بالنسبة للمعلمة λ، ومرة ثالثة بالنسبة للمعلمة γ .

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n.\ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\lambda+x_i^{\gamma}\right) \qquad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda+x_i^{\gamma}} \qquad (5.3.4)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\gamma}.\ln(x_i)}{\lambda+x_i^{\gamma}} \qquad (5.3.5)$$

وبمساواة المعادلات الثلاث *(5.3.3)* & *(5.3.4)*& *(5.3.5)* بالصفر وحلهم معا يمكن الحصول على قيم المعلمات المجهولة للتوزيع.

(٥-٤) تقدير معلمات توزيع دالة الجيب لتوزيع باريتو

باستخدام المعادلة *(5.1.1)* والمعادلة *(4.4.1)* يمكن ايجاد دالة الامكان الأعظم لتوزيع دالة الجيب لتوزيع باريتو:

$$L(\alpha,\lambda)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n}\alpha^{n}\lambda^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}(\lambda+x_i)^{-(\alpha+1)}\prod_{i=1}^{n}cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x_i}\right)^{\alpha}\right)\right)\quad(5.4.1)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس الطبيعى e للمعادلة *(5.4.1)*

$$\ln(L)=n.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+n.\ln(\alpha)+n.\alpha.\ln(\lambda)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda+x_i)+\sum_{i=1}^{n}ln\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x_i}\right)^{\alpha}\right)\right)\right)\quad(5.4.2)$$

وباجراء التفاضل للمعادلة *(5.4.2)* مرة بالنسبة للمعلمة α ، ومرة أخرى بالنسبة للمعلمة λ

$$\frac{\partial\ln(L)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+n.ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}ln(\lambda+x_i)+\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x_i}\right)^{\alpha}.\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+x_i}\right).\tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x_i}\right)^{\alpha}\right)\right)\quad(5.4.3)$$

$$\frac{\partial\ln(L)}{\partial\lambda}=\frac{n\alpha}{\lambda}-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda+x_i}+\frac{\pi}{2}.\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x_i}\right)^{\alpha-1}.\frac{x_i}{(\lambda+x_i)^2}.\tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x_i}\right)^{\alpha}\right)\right)\quad(5.4.4)$$

وبمساواة المعادلتين (5.4.3) ، (5.4.4) بالصفر وحلهما معا يمكن الحصول على تقدير المعلمات المجهولة للتوزيع.

(٥-٥) تقدير معلمات توزيع دالة الجيب لتوزيع لوماكس

باستخدام المعادلة *(5.1.1)* والمعادلة *(4.5.1)* يمكن ايجاد دالة الامكان الأعظم لتوزيع دالة الجيب لتوزيع لوماكس

$$L(x;\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\pi}{2}\frac{\alpha\beta}{(1+\beta x_i)^{\alpha+1}}.cos\left(\frac{\pi}{2}(1-(1+\beta x_i)^{-\alpha})\right)$$

$$L(\alpha,\beta)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n}.\alpha^{n}.\beta^{n}.\prod_{i=1}^{n}(1+\beta x_i)^{-(\alpha+1)}.\prod_{i=1}^{n}cos\left(\frac{\pi}{2}(1-(1+\beta x_i)^{-\alpha})\right)\quad(5.5.1)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للمعادلة *(5.5.1)* للأساس الطبيعى e

$$\ln(L)=n.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+n.\ln(\alpha)+n.\ln(\beta)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\beta x_i)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(cos\left(\frac{\pi}{2}(1-(1+\beta x_i)^{-\alpha})\right)\right)\quad(5.5.2)$$

وباستخدام قواعد حساب المثلثات فإن:

$$cos\left(\frac{\pi}{2}(1-(1+\beta x_i)^{-\alpha})\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\beta x_i)^{-\alpha}\right)\quad(5.5.3)$$

بالتعويض من المعادلة *(5.5.3)* فى المعادلة *(5.5.2)* فإن:

$$\ln(L)=n.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+n.\ln(\alpha)+n.\ln(\beta)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\beta x_i)+\sum_{i=1}^{n}ln\left(sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\beta x_i)^{-\alpha}\right)\right)\quad(5.5.4)$$

باجراء التفاضل الجزئى للمعادلة *(5.5.4)* مرة بالنسبة للمعلمة α ، ومرة أخرى باستخدام المعلمة β

$$\frac{\partial lnL}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}(1+\beta x_i)-\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n}(1+\beta x_i)^{-\alpha}.\ln(1+\beta x_i).cot\left(\frac{\pi}{2}(1+\beta x_i)^{-\alpha}\right)\quad(5.5.5)$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta}-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+\beta x_i}-\frac{\pi}{2}.\alpha\sum_{i=1}^{n}(1+\beta x_i)^{-(\alpha+1)}.cot\left(\frac{\pi}{2}(1+\beta x_i)^{-\alpha}\right)\quad(5.5.6)$$

وبمساواة المعادلتين (5.5.6) ، (5.5.5) بالصفر وحلهما معا يمكن الحصول على تقدير المعلمات المجهولة للتوزيع.

(٥-٦) تقدير معلمات توزيع دالة الجيب لتوزيع بر (توزيع باريتو المعمم)

باستخدام المعادلة *(5.1.1)* والمعادلة *(4.6.1)* يمكن ايجاد دالة الامكان الأعظم لتوزيع دالة الجيب لتوزيع بر (توزيع باريتو المعمم)

$$L = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n . \alpha^n . \gamma^n . \lambda^{n\alpha} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma-1} . \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda + x_i^{\gamma}\right)^{-(\alpha+1)} . \prod_{i=1}^{n} cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha}}{\left(\lambda + x_i^{\gamma}\right)^{\alpha}}\right)\right) \qquad (5.6.1)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للمعادلة *(5.6.1)* للأساس الطبيعى *e*

$$\ln(L) = n.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + n.\ln(\alpha) + n.\ln(\gamma) + n\alpha.\ln(\lambda) + (\gamma - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - (\alpha + 1)\sum_{i=1}^{n} ln\left(\left(\lambda + x_i^{\gamma}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha}}{\left(\lambda + x_i^{\gamma}\right)^{\alpha}}\right)\right)\right) \qquad (5.6.2)$$

باجراء التفاضل الجزئى للمعادلة *(5.6.2)* مرة بالنسبة للمعلمة α ، ومرة أخرى بالنسبة للمعلمة λ ، ومرة ثالثة بالنسبة للمعلمة γ .

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n.\ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} ln\left(\lambda + x_i^{\gamma}\right) - \frac{\pi}{2}.\lambda^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda + x_i^{\gamma}\right)^{-\alpha} \left[\ln(\lambda) - \ln\left(\lambda + x_i^{\gamma}\right)\right].tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha}}{\left(\lambda + x_i^{\lambda}\right)^{\alpha}}\right)\right) \qquad (5.6.3)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \lambda} = \frac{n\alpha}{\lambda} - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\lambda + x_i^{\gamma})} - \frac{\pi}{2}.\alpha.\lambda^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\gamma}}{(\lambda + x_i^{\gamma})^{\alpha+1}}.tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x_i^{\gamma})^{\alpha}}\right)\right) \quad (5.6.4)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma}(2\gamma - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\gamma}.\ln(x_i)}{\lambda + x_i^{\gamma}} - \frac{\pi}{2}.\alpha.\lambda^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\gamma}.\ln(x_i)}{(\lambda + x_i^{\gamma})^{\alpha+1}}.tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x_i^{\lambda})^{\alpha}}\right)\right) \quad (5.6.5)$$

وبمساواة الثلاث معادلات *(5.6.3)* ، *(5.6.4)* ، *(5.6.5)* بالصفر وحلهم معا يمكن الحصول على قيم المعلمات المجهولة.

(٥-٧) تقدير معلمة توزيع برنولى

باستخدام المعادلة *(5.1.1)* والمعادلة *(4.7.1)* يمكن ايجاد دالة الامكان الأعظم لتوزيع برنولى

$$L(y;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\theta^{y_i}(1-\theta)^{1-y_i} \qquad (5.7.1)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للمعادلة *(5.7.1)* للأساس الطبيعى e

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n}(1-y_i)\ln(1-\theta) \qquad (5.7.2)$$

باجراء التفاضل الجزئى للمعادلة *(5.7.2)* بالنسبة للمعلمة θ

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}(1-y_i) \qquad (5.7.3)$$

وبمساواة المعادلة *(5.7.3)* بالصفر يمكن الحصول على تقدير الامكان الأعظم للمعلمة θ

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (5.7.4)$$

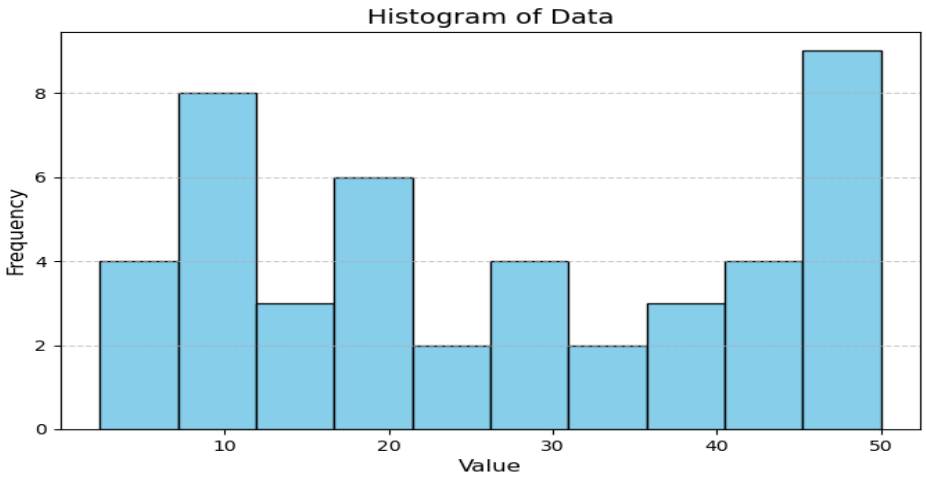
٦. الدراسة التطبيقية

تم الاعتماد على بيانات تأمين المشروعات المتناهي الصغر فى شركة *GIG* مصر لحساب المعلمات المجهولة للتوزيعات الاحصائية المستخدمة فى الدراسة. الجدول التالى يبرز أهم الخصائص الاحصائية للبيانات محل الدراسة.

جدول (٦-١) الخصائص الاحصائية للبيانات محل الدراسة

المقياس الاحصائي	القيمة
عدد الوثائق فى المحفظة	*67862*
عدد المطالبات	*45* مطالبة
عدد الوثائق التى لم تتقدم بمطالبات	*67817*
أقل قيمة للمطالبة	*2.4 ألف جنيه*
أعلى قيمة للمطالبة	*50* ألف جنيه
متوسط المطالبات	*27.114* ألف جنيه
الربيع الأدنى	*11* ألف جنيه
الوسيط	*25* ألف جنيه
الربيع الأعلى	*45* ألف جنيه
التباين	*268.811* ألف جنيه مصرى
الانحراف المعيارى	*16.395* ألف جنيه مصرى
مجموع قيم المطالبات	*1220.12* ألف جنيه
مجموع مربعات قيم المطالبات	*44909.75* ألف جنيه
معامل الالتواء	*0.1323*

وكما يتضح من جدول (٦-١) أن عدد المطالبات فى فرع التأمين محل الدراسة هو *45* مطالبة نظرا لحداثة التأمين المتناهي الصغر بصفة عامة، وتأمين المشروعات المتناهي الصغر بصفة خاصة. وتصل أقل قيمة للمطالبات إلى حوالى ٢٤٠٠ جنيه مصرى، فى حين تصل أعلى قيمة للمطالبات إلى ٥٠٠٠٠ جنيه مصرى، ويصل متوسط المطالبات إلى حوالى ٢٧٠٠٠ جنيه، ويصل الربيع الأدنى إلى ١١٠٠٠ جنيه (ربع المطالبات تقع فى حدود ١١٠٠٠ جنيه مصرى) ، أما وسيط البيانات يصل إلى ٢٥٠٠٠ جنيه (نصف المطالبات تقع فى حدود ٢٥٠٠٠ جنيه مصرى)، ويصل التباين إلى٢٦٩ ألف جنيه مصرى. والانحراف المعيارى يبلغ حوالى ١٦٠٠٠ جنيه مصرى. والبيانات ملتوية ناحية اليمين التواء خفيف. ويوضح شكل (٦-١) المدرج التكرارى للبيانات محل الدراسة



شكل (٦-١) المدرج التكرارى للبيانات محل الدراسة

وكما يتضح من شكل (٦-١) أن البيانات لها التواء خفيف ناحية اليمين، لذلك نحتاج لتوزيعات مرنة يمكن أن تتوائم مع شكل البيانات.

(٦-١) تقديرات معلمات التوزيعات الاحتمالية المستخدمة فى نمذجة المطالبات (القيم – الأعداد)

باستخدام لغة البايثون تم تقدير المعلمات المجهولة للتوزيعات محل الدراسة كما هو موضح فى جدول (٦-١-١).

جدول (٦-١-١) تقديرات المعلمات المجهولة باستخدام طريقة الامكان الأعظم

التوزيع الاحتمالى	المعلمة الأولى	المعلمة الثانية	المعلمة الثالثة
Pareto	$\hat{\alpha} = 88.7344$	$\hat{\lambda} = 2408.6619$	-
Lomax	$\hat{\alpha} = 371.3737$	$\hat{\beta} = 0.0001$	-
Burr	$\hat{\alpha} = 23.6556$	$\hat{\gamma} = 1.6587$	$\hat{\lambda} = 6516.9437$
Sine Pareto	$\hat{\alpha} = 80.0856$	$\hat{\lambda} = 3828.4872$	-
Sine Lomax	$\hat{\alpha} = 312.8914$	$\hat{\beta} = 0.0001$	-
Sine Burr	$\hat{\alpha} = 13.8202$	$\hat{\gamma} = 1.5858$	$\hat{\lambda} = 5295.1925$
Bernoulli	$\hat{\theta} = 0.000663$	-	-

يوضح جدول (٦-١-١) تقديرات المعلمات المجهولة للتوزيعات المستخدمة فى النمذجة للمطالبات، ستة توزيعات لنمذجة قيم المطالبات، وتوزيع واحد لنمذجة تكرار المطالبات.

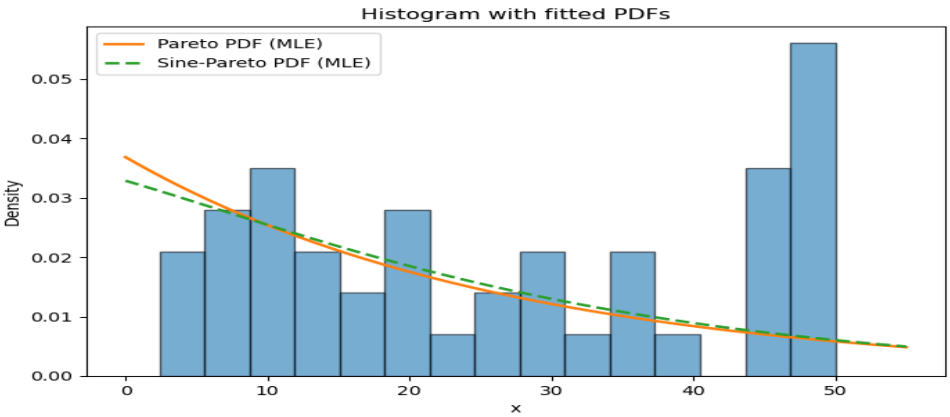
(٦-٢) المقارنة بين التوزيعات المستخدمة لنمذجة قيم المطالبات

تم استخدام لغة البايثون لعمل اختبار كولومجروف سمرنوف وحساب أعلى فرق مطلق بين الاحتمال التجريبي والاحتمال المحسوب باستخدام التوزيع، وكذلك حساب قيمة *P-Value* وحساب قيم معيارى *AIC* ، *BIC* .

جدول (٦-٢-١) المقارنة بين التوزيعات المستخدمة لنمذجة قيم المطالبات

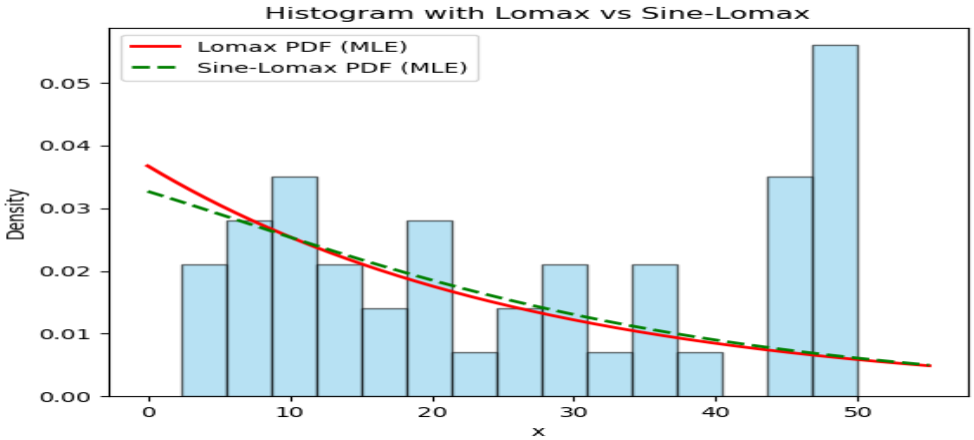
التوزيع	*K-S test*	*P-Value*	*AIC*	*BIC*
Pareto	*0.166*	*0.1493*	*391.3303*	*394.9436*
Lomax	*0.1658*	*0.1503*	*391.0825*	*394.6958*
Burr	*0.1429*	*0.2887*	*379.192*	*384.612*
Sine Pareto	*0.1506*	*0.2346*	*388.4931*	*392.1064*
Sine Lomax	*0.1506*	*0.2347*	*388.3522*	*391.9655*
Sine Burr	*0.1419*	*0.2961*	*379.1156*	*384.535*

وكما يتضح من جدول (٦-٢-١) أن استخدام توزيعات جيب الزاوية *Sine* أفضل قليلا من استخدام التوزيع الأصلى وفقا لقيم أعلى فرق مطلق بين التوزيع النظرى والتوزيع التجريبى (قيمة احصاء الاختبار لاختبار كولومجروف سميرنوف)، ومعيارى *AIC* ، *BIC* كذلك قيمة *P-Value* نظرا لأن مستوى المعنوية *5%* ، فكلما زادت قيمة *P-Value* كلما كان دليلا على أنه لا يمكن رفض فرض العدم الذى يقضى بتبعية البيانات لتوزيع معين، وكما يتضح من الجدول أن فى الست توزيعات لا يمكن رفض الفرض العدمى، وكما يتضح من الجدول أن أفضل توزيع لتمثيل البيانات هو توزيع *Sine Burr* توزيع دالة الجيب لتوزيع بر.



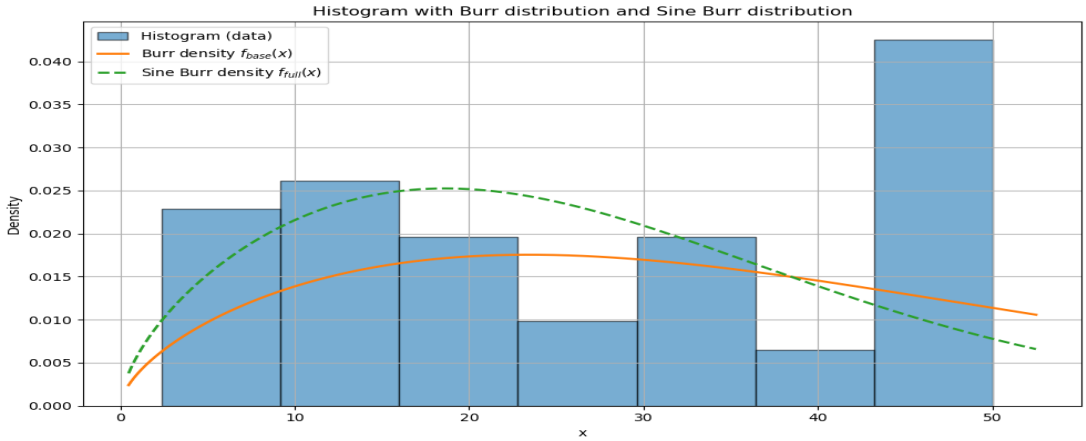
شكل (٦-٢-١) نمذجة البيانات باستخدام توزيع باريتو وتوزيع دالة الجيب لتوزيع باريتو

وكما يتضح من الشكل أن توزيع دالة الجيب أفضل قليلا من التوزيع الأصلى.



شكل (٦-٢-٢) نمذجة البيانات باستخدام توزيع لوماكس وتوزيع دالة الجيب لتوزيع لوماكس

وكما يتضح من شكل (٦-٢-٢) أن توزيع دالة الجيب لتوزيع لوماكس أفضل قليلا من توزيع لوماكس.

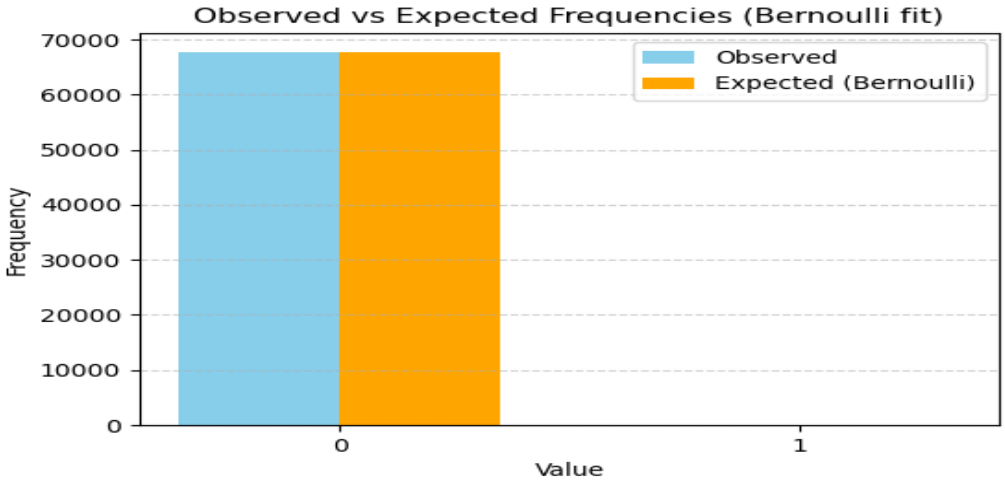


شكل (٦-٢-٣) نمذجة البيانات باستخدام توزيع بر Burr وتوزيع دالة الجيب لتوزيع بر Sine Burr

وكما يتضح من شكل (٦-٢-٣) أن توزيع دالة الجيب لتوزيع بر *Sine Burr* هو الأفضل من بين الستة توزيعات المستخدمة وفقا للشكل البيانى كذلك وفقا لمعيارى *BIC & AIC* .

(٦-٣) نمذجة تكرار المطالبات باستخدام توزيع برنولى

عند نمذجة البيانات الخاصة بتكرار المطالبات كانت قيمة احصاء الاختبار لاختبار كاى تربيع *Chi-Square* تساوى صفر وهذا يعنى تطابق التوزيع التجريبى مع التوزيع النظرى، لذلك لا نحتاج لاستخدام توزيعات أخرى نظرا لأن قيمة *P-Value* تساوى واحد صحيح.



شكل (٦-٣-١) نمذجة تكرار المطالبات باستخدام توزيع برنولى

وكما يتضح من شكل (٦-٣-١) تطابق المطالبات المشاهدة مع المطالبات المتوقعة، بذلك يصبح توزيع برنولى هو أفضل توزيع لتمثيل تكرار هذه المطالبات.

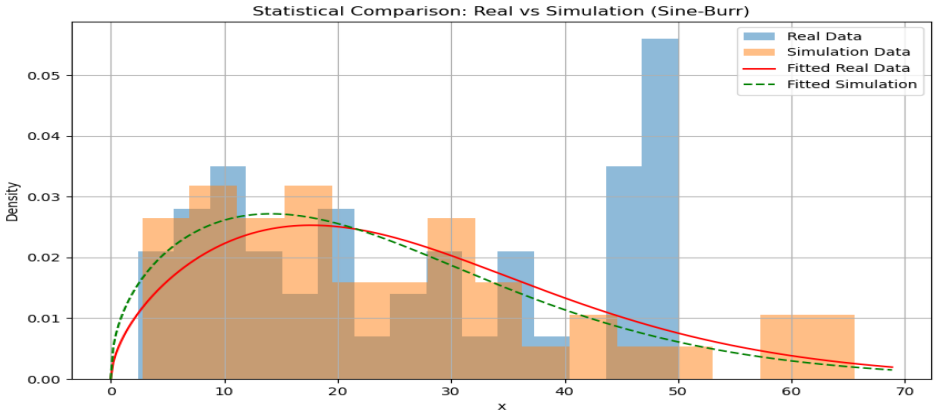
(٦-٤) استخدام المحاكاة لتوزيع دالة الجيب لتوزيع بر *Sine Burr*

يوضح جدول (٦-٤-١) نتائج المقارنة بين استخدام توزيع دالة الجيب لتوزيع بر *Sine Burr* من البيانات الفعلية ونتائج المحاكاة.

جدول (٦-٤-١) المقارنة بين البيانات الفعلية ونتائج المحاكاة

Simulation Data بيانات المحاكاة		***Real Data*** البيانات الفعلية	
24.51	*Mean*	*27.11*	*Mean*
279.1	*variance*	*262.84*	*variance*
373.34	*AIC*	*379.4*	*AIC*
378.76	*BIC*	*384.56*	*BIC*
K-S test =0.1728			
P-Value = 0.1207			

وكما يتضح من جدول (٦-٤-١) اقتراب نتائج المحاكاة من النتائج الفعلية، وباجراء اختبار عدم وجود فرق بين نتائج المحاكاة ونتائج البيانات الفعلية اتضح أن البيانات يمكن أن تكون مسحوبة من نفس المجتمع نظرا لأن قيمة *P-Value* أكبر من *0.05* ، وبذلك لا يمكن رفض فرض العدم الذي يقضى بعدم وجود فرق بين البيانات الفعلية وبيانات المحاكاة.



شكل (٦-٤-١) مقارنة البيانات الفعلية مع نتائج المحاكاة

وكما يتضح من شكل (٦-٤-١) اقتراب نتائج المحاكاة من النتائج الفعلية، فيما عدا الجزء الخاص بأعلى مطالبة. ولكن بصفة عامة توزيع دالة الجيب لتوزيع بر *Sine Burr* ملائم للبيانات.

(٦-٤) حساب قسط الخطر لوثيقة تأمين المشروعات المتناهي الصغر

وباستخدام تقديرات المعلمات الواردة فى جدول (٦-١-١) ، والمعادلات *(4.7.2) & (4.7.3)* يمكن حساب متوسط وتباين تكرار المطالبة كالتالى:

$$E(y) = 0.000663 \qquad (6.4.2)$$

$$Var(y) = 0.0006625 \qquad (6.4.3)$$

وباستخدام تقديرات المعلمات الواردة بجدول (٦-٢-١) ولغة البايثون يمكن حساب متوسط وتباين توزيع دالة الجيب لتوزيع بر *Sine Burr*

$$E(x) = 27.185 \qquad (6.4.4)$$

$$Var(x) = 292.75 \qquad (6.4.5)$$

وبالرجوع للبيانات الفعلية فإن مبلغ تأمين الوثيقة هو *50000* جنية

(٦-٤-١) حساب قسط الخطر بالاعتماد على المتوسط العام للخسارة للوثيقة الواحدة

يمكن حساب قسط الخطر بالاعتماد على المتوسط العام للخسارة للوثيقة الواحدة باستخدام المعادلة *(4.8.1)* والمعادلات *(6.4.2) & (6.4.4)* كالتالى :

$$Risk\ Premuim = \frac{0.000663 * 27.185}{50} = 0.0003604 \approx 0.0004$$

بذلك يكون قسط الخطر هو *0.4* جنية لكل *1000* جنيه.

(٦-٤-٢) حساب قسط الخطر بالاعتماد على نموذج المطالبات الاجمالى

باستخدام المعادلة *(4.8.2.2)* والمعادلة *(6.4.2)* يمكن حساب متوسط عدد المطالبات بالمحفظة كالتالى:

$$E(N) = 67862 * .000663 = 45\ Claims \quad (6.4.2.1)$$

باستخدام المعادلة *(4.8.2.2)* والمعادلة *(6.4.4)* يمكن حساب متوسط المطالبات الاجمالى للمحفظة كالتالى:

$$E(S) = 1223.325 \quad Thousand\ pounds \quad (6.4.2.2)$$

باستخدام المعادلة *(4.8.2.4)* والمعادلة *(6.4.3)* يمكن حساب تباين عدد المطالبات بالمحفظة

$$Var(N) = 44.69 \qquad (6.4.2.3)$$

باستخدام المعادلة *(4.8.2.5)* والمعادلات *(6.4.2.1)*، *(6.4.5)* ، *(6.4.2.3)* ، *(6.4.4)* يمكن حساب تباين حجم المطالبات الاجمالى للمحفظة كالتالى:

$$Var(S) = 46200.74 \qquad (6.4.2.4)$$

باستخدام المعادلة *(4.8.2.6)* والمعادلات *(6.4.2.2)* ، *(6.4.2.4)* ومستوى معنوية ٥٪ يمكن حساب متوسط المطالبات الاجمالية للمحفظة بعد الأخذ فى الاعتبار الخطأ المعيارى كالتالى:

$$1223.325 + 3.84 * \sqrt{\frac{46200.74}{67862}} = 1226.49\ Thousand\ pounds\ (6.4.2.5)$$

ونظرا لأن مبلغ التأمين للوثيقة فى هذه المحفظة هو ٥٠٠٠٠ جنيه، بذلك يكون مجموع مبالغ التأمين للوثائق كلها كالتالى:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 50 * 67862 = 3393100\ thousand\ pounds \quad (6.4.2.6)$$

وباستخدام المعادلة *(4.8.2.7)* ، معدل فائدة ٢٠٪ معدل تضخم ٣٠٪ يمكن حساب قسط الخطر كالتالى:

$$Risk\ Premium = \frac{1226.49 * 1.3^{0.5}}{3393100 * 1.2^{0.5}} = 0.000376 \approx 0.0004$$

بذلك يكون قسط الخطر هو *0.4* جنية لكل *1000* جنيه.

بذلك يتضح أنه لا يوجد فرق ملموس فى الحسابات بين الطريقتين، لذلك يرجح الباحثان استخدام الطريقة الأولى لأنها أبسط ولا تحتاج لحسابات كثيرة.

٧. النتائج

بعد القيام بهذا البحث توصل الباحثان إلى النتائج التالية:

(١) استخدام توزيع دالة الجيب أفضل قليلا من استخدام التوزيع الأصلى فى حالة استخدام باريتو مع بيانات التأمين المتناهي الصغر نظرا لأن استخدام توزيع دالة الجيب يعطى نتائج أفضل للنمذجة بدون إضافة معلمات إضافية.

(٢) استخدام توزيعات دالة الجيب لتوزيعات باريتو يقلل من شروط ايجاد المتوسط والتباين.

(٣) جميع التوزيعات المستخدمة فى الدراسة لنمذجة حجم المطالبات تلائم البيانات، ولكن أفضل هذه التوزيعات وفقا لمعيارى *BIC & AIC* هو توزيع دالة الجيب لتوزيع بر *Sine Burr distribution* .

(٤) التوزيع الملائم لبيانات تكرار المطالبات هو توزيع برنولى ، كل وثيقة لها احتمالين فقط التقدم بمطالبة أو عدم التقدم بمطالبة، وفقا لما ورد فى قاعدة بيانات الشركة محل الدراسة.

(٥) قسط الخطر فى المحفظة محل الدراسة هو ٤٠ قرش لكل ١٠٠٠ جنيه، ولايوجد فرق ملموس فى الحسابات بين الطريقتين المستخدمتين في الحساب.

٨. التوصيات

بعد القيام بهذا البحث يوصى الباحثان بالآتى:

(١) ضرورة الاهتمام بتوزيعات دالة الجيب نظرا لأنها فى بعض الأحيان تحدث تحسينا فى النمذجة وذلك بدون إضافة معلمات اضافية.

(٢) استمرار البحث فى نمذجة مطالبات التأمين متناهى الصغر وكذلك حساب قسط الخطر الخاص به.

٩. المراجع

(١) الهلباوى، عبد الله توفيق (٢٠٠٣)، " مقدمة فى نظرية الاحصـــاء"، الجزء الأول: نظرية التوزيعات الاحتمالية ونظرية التقدير، بدون ناشر، الطبعة الأولى.

(٢) بدوى، هدى (٢٠٢٥)، "الأداء المالى والتأثير الاجتماعى للتأمين متناهى الصـــغرعلى المجتمع والتنمية المستدامة: دراسة تطبيقية للشركات المصرية"، المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية، كلية التجارة – جامعة دمياط، م٦، ع١، ج٤، ص ص ٤٧٣ – ٥٠٨.

(٣) ســالم، محمود (٢٠١٥)، "رياضــيات التأمينات العامة – النماذج الرياضــية وتطبيقاتها"، بدون ناشر.

(٤) عجوة، أمانى محمد & البشير، منى (٢٠٢٤)، "تسعير تأمين الحوادث الشخصية المتناهي الصـــغر فى مصـــر بالتطبيق على شـــركة جى أى جى مصـــر"، مجلة البحوث المالية والتجارية، كلية التجارة – جامعة بورسعيد ، م٢٥، ع١، ص ص ٩٣-١٣٥.

(٥) عجوة، أمانى محمد & عبد اللطيف، نها (٢٠١٧)، "النمذجة الاكتوارية لمطالبات التأمين الهندســـى باســـتخدام بعض التوزيعات الاحتمالية ذات الذيل الثقيل"، المجلة المصـــرية للدراسات التجارية، كلية التجارة جامعة المنصورة، م٤١، ع١، ج٢، ص ص ٧٧-١٠٣.

(٦) قرار مجلس إدارة الهيئة العامة للرقابة المالية رقم ٩٨ لســـنة ٢٠٢٣، الهيئة العامة للرقابة المالية، الوقائع المصرية، العدد ١١٠.

(٧) نصـــر، عبدالله صـــميدة على (١٩٩٩)، "تخطيط تأمين الائتمان لتمويل المشـــروعات الصـــغيرة خلال مرحلة التحولات الاقتصـــادية فى مصـــر"، المجلة المصـــرية للدراســـات التجارية، كلية التجارة – جامعة المنصورة، م٢٣، ع١، ص ص، ٥٨١-٦٠٦.

(8) Fissler, T., Lorentzen, C., & Mayer, M. (2022). Model comparison and calibration assessment: User guide for consistent scoring functions in machine learning and actuarial practice. arXiv preprint arXiv:2202.12780.

(9) Kley, O., Klüppelberg, C., & Reinert, G. (2016). Risk in a large claims insurance market with bipartite graph structure. Operations Research, *64*(5), 1159-1176.

(10) Merz, B., Basso, S., Fischer, S., Lun, D., Blöschl, G., Merz, R., & Schumann, A. (2022). Understanding heavy tails of flood peak distributions. *Water Resources Research*, *58*(6), e2021WR030506.

(11) Yan, T., Lu, Y., & Jeong, H. (2024). Dependence Modelling for Heavy-Tailed Multi-Peril Insurance Losses. Risks, 12(6), 97.

(12) Papalexiou, S. M., Koutsoyiannis, D., & Makropoulos, C. (2013). How extreme is extreme? An assessment of daily rainfall distribution tails. Hydrology and Earth System Sciences, 17(2), 851-862.

(13) Neves, C., & Pereira, A. (2010). Detecting finiteness in the right endpoint of light-tailed distributions. Statistics & probability letters, 80(5-6), 437-444.

(14) Isa, A. M., Bashiru, S. O., Ali, B. A., Adepoju, A. A., & Itopa, I. I. (2022). Sine-exponential distribution: Its mathematical properties and application to real dataset. UMYU Scientifica, 1(1), 127-131

(15) Mahmood, Z., Chesneau, C., & Tahir, M. H. (2019). A new sine-G family of distributions: properties and applications. Bull. Comput. Appl. Math., 7(1), 53-81.

(16) Hassan, A., Dar, I. H., & Lone, M. A. (2021). A novel family of generating distributions based on trigonometric function with an application to exponential distribution. Journal of scientific research, 65(5), 172-179.

(17) Adepoju, A. A., Bello, A. O., Isa, A. M., Adesupo, A., & Olumoh, J. S. (2024). Statistical inference on sine-exponential distribution parameter. Journal of Computational Innovation and Analytics (JCIA), 3(2), 129-145.

(18) Kumar, D., Singh, U., & Singh, S. K. (2015). A new distribution using sine function-its application to bladder cancer patients data. Journal of Statistics Applications & Probability, 4(3), 417.

(19) Tomy, L., & Dominic, L. (2024). Review on distributions generated using trigonometric functions. Austrian Journal of Statistics, 53(3), 102-119.

(20) Alghamdi, A. S., ALoufi, S. F., & Baharith, L. A. (2025). The Sine Alpha Power-G Family of Distributions: Characterizations, Regression Modeling, and Applications. Symmetry, 17(3), 468.

(21) Mustapha, B. A., Isa, A. M., Sule, O. B., & Itopa, I. I. (2023). Sine-Lomax distribution: Properties and applications to real data sets. FUDMA journal of sciences, 7(4), 60-66.

(22) C2 Statistics Actuarial Material (1995), loss distributions, Acted Note, Actuarial Education Company on behalf of the institute and Faculty of Actuaries, Unit 14.

(23) CT6 Combined Material Pack (2013), Acted Study Materials: 2013 Examination, the Actuarial Education Company on behalf of the institute and Faculty of Actuaries.

(24) SP8 (2024), General insurance Pricing: Specialist Principles, Combined Material Pack for Exams in 2024, The Actuarial Company on behalf of the institute and Faculty of Actuaries.

(25) Bernards, N. (2022). Waiting for the market? Microinsurance and development as anticipatory marketization. Environment and Planning A: Economy and Space, 54(5), 949-965.

(26) Biener, C., & Eling, M. (2011). The performance of microinsurance programs: A data envelopment analysis. Journal of Risk and Insurance, 78(1), 83-115.

(27) Groh, M., & McKenzie, D. (2016). Macroinsurance for microenterprises: A randomized experiment in post-revolution Egypt. Journal of Development Economics, 118, 13-25.

(28) Johari, S. N. M., Asdi, N. A. H. M., Othman, N. S., & Anifruzaidi, S. D. Q. (2022, April). Weather Index Based Microinsurance for Agriculture Industry. In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (Vol. 1019, No. 1, p. 012045). IOP Publishing.

(29) Osifodunrin E. A., Lopes J. D., (2022); Theory and determinants of regulatory effectiveness in a formal microinsurance context: The insurers' perspectives); Journal of Governance and Regulation/Volume, 11(4).

(30) Giles, D. E., Feng, H., & Godwin, R. T. (2013). On the bias of the maximum likelihood estimator for the two-parameter Lomax distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, 42(11), 1934-1950.

Calculating Risk Premium of Enterprise Micro-insurance using Sine Pareto Type Distributions

Abstract

This study investigates the calculation of the risk premium for enterprise micro-insurance policies using sine Pareto distributions. Three baseline distributions were considered—Pareto, Lomax, and Burr (generalized Pareto)—along with their corresponding sine distributions counterparts. A three-year dataset of microinsurance claims from GIG Egypt was analyzed. Claim size data were fitted using all six distributions, with parameter estimation performed via the maximum likelihood method. Goodness-of-fit, assessed by the Kolmogorov–Smirnov test, confirmed the adequacy of all models. However, model comparison based on AIC and BIC criteria identified the sine Burr distribution as the best fit for claim size data. The findings also demonstrate that sine distributions improve the performance of Pareto-type distributions and relax the conditions required for the existence of moments. For claim frequency, the Bernoulli distribution was found to be most appropriate, as policies exhibit only two states: claim or no claim. The calculated risk premium was relatively low, reflecting the low frequency of claims in the dataset.

Keywords: Micro-insurance, sine distributions, Risk Premium, Pareto Type Distributions