كلية التربية

كلية معتمدة من الهيئة القومية لضمان جودة التعليم

إدارة: البحوث والنشر العلمي (المجلة العلمية)

=======

تحليل دور الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لموضوع الكسور لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي باستخدام نموذج بيري وكيرين

إعـــــداد

د/ مريم موسى متى عبد الملاك

مدرس بكلية التربية بالوادي الجديد

جامعة الوادي الجديد

﴿ المجلد الخامس والثلاثون – العدد التاسع – سبتمبر ٢٠١٩م ﴾

http://www.aun.edu.eg/faculty_education/arabic

المستخلص:

هدف البحث الحالي إلى تحليل دور الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لموضوع الكسور لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي وذلك باستخدام نموذج بيري وكيرين. استخدم البحث الحالي تصميم دراسة الحالة . تكونت عينة البحث من ستة تلاميذ (من مستويات تحصيلية مختلفة) من تلاميذ الصف الرابع الابتدائي ممن درسوا موضوع الكسور باستخدام استراتيجية الحدث الرياضي. تم تقسيم التلاميذ الست إلى أزواج متعاونة، وتم إعطاء كل زوج ورقة نشاط واحدة ليقوموا بحلها معا باستخدام الحديث الرياضي. تم تحليل تفاعل ازواج التلاميذ والحديث الذي دار بينهم باستخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي. تمثلت أدوات جمع البيانات في اختبار المعرفة السابقة لموضوع الكسور، مقابلات شبة مقننة قائمة على المهام، الملاحظة، المسودات الميدانية، أوراق عمل التلاميذ. أوضحت النتائج أن الحديث الرياضي بين التلاميذ ساعدهم على الانتقال من مستوى المعرفة البدائية إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي وفقا لمستويات الفهم الرياضي لبيري وكيرين. كذلك كشفت النتائج عن أربعة سلوكيات أساسية للحديث الرياضي والتي كان لها دورا في نمو فهم التلاميذ الرياضي لموضوع الكسور كما اوضحه التحليل باستخدام نموذج بيري وكيرين. هذه السلوكيات هي: الاستفسار، شرح وتفسير التفكير، التبرير، تحمل المسئولية. في ضوء ما أسفرت عنه النتائج يوصي البحث بضرورة تطوير مقررات الرياضيات من خلال تنظيمه في ضوء مراحل نمو الفهم الرياضي وفقا لنموذج بيري وكيرين، واتاحة الفرص امام التلاميذ لحل المشكلات بشكل تعاوني والمشاركة في الحديث الرياضي مع اقرانهم ومعلميهم.

The present research aimed at analyzing the role of math talk in the development of mathematical understanding of fractions in the fourth-grade pupils using the Pirie and Kieren model. The research used the case study design. The research sample consisted of six pupils (from different levels of achievement) of fourth graders who studied fractions using math talk. The six pupils were divided into co-operative pairs, and each pair was given a single activity sheet to solve together using math talk. The interactions between the pupils' pairs and the conversation between them were analyzed using the Pirie and Kieren model of mathematical understanding. Data collection tools were: the pre-knowledge testing of fractions, semi- structure task-based interviews, observations, field notes, and student worksheets. The results showed that math talk among the pupils helped them to move from the level of primitive knowledge to the level of formalization. The results also revealed four basic behaviors of math talk which played a role in the development of the pupils' understanding of fractions as explained by the Pirie and Kieren model. These behaviors were: questioning, explanation and interpretation of thinking, justification, responsibility. In light of the results, the research recommends the need to develop mathematics courses through organizing it in the light of the levels of the development of mathematical understanding according to the Pirie and Kieren model, and to provide opportunities for students to solve problems in a cooperative manner and participate in math talk with their peers and teachers.

مقدمه:

يجب أن يتعلم التلاميذ الرياضيات بفهم. القدرة علي الفهم الرياضي هو عامل ضروري للتعلم؛ فالمتعلمون الذين لديهم القدرة على الفهم الرياضي يمكنهم معرفة المزيد من الحقائق وحل المشكلات المطروحة باستخدام طرق متنوعة وباستخدام العمليات والعلاقات الرياضية. يعد فهم التلاميذ للكسور أمرا أساسيا لتعلم الرياضيات حيث يعتبر متنبأ لتحصيل التلاميذ للرياضيات في الاعوام اللاحقة (Siegler, Fazio1,Bailey,& Zhou, 2013; Torbeyns et al.,2015). كذلك تنبع أهمية الكسور من كونها متطلب يبنى عليه موضوعات رياضية أخرى لا يمكن فهمها بدون اتقان الكسور والعمليات عليها مثل مجموعة الاعداد النسبية والعبارات الكسرية في المراحل التالية من التعليم (الزهراني، ٢٠١٨). كما تلعب الكسور دورا محوريا في العديد من المواد الدراسية مثل العلوم والاقتصاد المنزلي والجغرافيا (Siegler et al., 2013) . مساعدة التلاميذ على تحقيق أساس متين في الكسور له تداعيات كبيرة على المدى الطويل، حيث تستمر التحديات وسوء الفهم التي يواجها التلاميذ في فهم الكسور في حياة البالغين وتشكل مشكلات في مجالات واسعة مثل الطب والرعاية الصحية والبناء وبرامج الكمبيوتر (Bruce et al., 2013). مما يجعل الأمر يستحق قضاء الوقت والجهد لتعزيز فهم التلاميذ في السنوات الابتدائية لضمان نجاح الطالب في الرياضيات والحياة المهنية اللاحقة. لذا يجب أن يتم تعليم وتعلم الكسور في سياق ينمي الفهم الرياضي لدى التلاميذ.

على الرغم من أن الكسور هي واحدة من أكثر المفاهيم التي تم بحثها في الرياضيات، وهناك العديد من الدراسات والجهود المبذولة لتدريس هذه المفاهيم بشكل فعال من أجل فهم أفضل، لا تزال هناك العديد من الصعوبات والمشاكل حول مفاهيم الكسور، والعمليات عليها (الزهراني، ٢٠١٨، شلش، ٢٠١٨، حسين، ٢٠١٤)، (Bruce, Chang, & Flynn, 2013; Gokalp, 2012; Mills, 2011). وقد كشفت الدراسات العقبات الشائعة أمام فهم التلاميذ للكسور. ومع ذلك، لا تزال هناك حاجة إلى فهم عمليات نمو فهم التلاميذ الرياضي لموضوع الكسور مما يمكن من مساعدة المتعلمين في إثراء فهمهم للكسور.

نظرا لأهمية الفهم الرياضي، سعى الباحثون إلى تحديد الطبيعة المعقدة للفهم الرياضي فيما يتعلق بمراحل نمو الفهم الرياضي والطرق التي قد تسهم في نمو الفهم الرياضي لدى التلاميذ. جزء مهم من هذا الجهد يشمل العمل الذي قاما به بيري وكيرين (Pirie & Kieren, 1994) لوصف نمو الفهم الرياضي للتلاميذ بناء على النظرية البنائية. وصف بيري وكيرين الفهم الرياضي على شكل سلسلة من الدوائر المدمجة، كل دائرة تمثل مستوى من الفهم بحيث يحتوي كل مستوى من مستويات الفهم على جميع المستويات السابقة، وفي نفس الوقت يكون كل مستوى جزء لا يتجزأ من جميع مستويات الفهم اللاحقة . في هذا النموذج، لا يشير مصطلح "نمو الفهم" إلى عملية خطية، ولكن يحدث النمو من خلال حركة مستمرة ذهابا وايابا خلال مستويات الفهم، ومع الاتجاه العام نحو مستويات الفهم الخارجية الأكثر تقدما، حيث تمثل أي حركة، حتى الحركة للخلف، تطور للفهم (Pirie & Martin, 2000).

يتميز نموذج بيري وكيرين للفهم بالعديد من المزايا مقارنة مع نماذج الفهم الأخرى. أولا: نموذج بيري وكيرين ليس نموذج عام للفهم. بدلا من ذلك، يعد نموذج بيري وكيرين نموذج لنمو الفهم الرياضي في موضوع معين (Pirie & Kieren, 1994) . ثانيا: يسمح نموذج بيري وكيرين بمراقبة نمو فهم شخص معين أو مجموعة محددة (Pirie & Kieren, 1994; Martin, 2001). ثالثا: يسمح نموذج بيري وكيرين بتصوير نمو الفهم خلال فترة زمنية مثل الساعات أو الأيام أو الأسابيع أو حتى السنوات فتقدم معلومات كافية حول كيفية تحليل فهم المتعلمين (Pirie & Kieren, 1994) . رابعا: يمكن استخدام نموذج بيري وكيرين من قبل المعلم أو الباحث كأداة للنظر إلى الفهم المتنامي كما يحدث ولفهم كيف ينمو الفهم (Pirie & Kieren, 1994). هناك العديد من الدراسات الأجنبية التي استخدمت نموذج بيري وكيرين للفهم كإطار نظري (e.g., Warner & Schorr, 2004; Warner, 2008; Duzenli-Gokalp & Sharma, 2010; Gokalp, 2012; Gulkilik, Ugurlu, & Yuruk 2015; Sengul & Argat, 2015)، ولكن يوجد عدد قليل من الدراسات العربية (أبو عرة، ٢٠١٤) –في حد علم الباحثة– تناولت نموذج بيري وكيرين للفهم. من هذه الدراسات خلصت الباحثة إلى التأكيد على فعالية نموذج بيري وكيرين للفهم في تقييم نمو فهم التلاميذ الرياضي. لذلك استخدم البحث الحالي نموذج بيري وكيرين كإطار نظري لتحليل فهم التلاميذ لموضوع الكسور.

لكي يستطيع التلاميذ تعلم الكسور بفهم، فهم بحاجة إلى بناء المفاهيم بأنفسهم، وممارسة التفاعل مع الأفكار ومع الآخرين، والتفكير في الأفكار الجديدة من حيث علاقتها بما يعرفونه بالفعل، وهذا ما يحققه الحديث الرياضي(Warner & Schorr, 2004) . هناك اتفاق واسع نسبيا في المجتمع العلمي على أن هناك علاقة بين الحديث والتفكير والتعلم (Resnick, Asterhan, & Clarke, 2018). ففي الفصول التي تشجع الحديث، لا يكرر التلاميذ الحقائق المحفوظة، بل يجادلون ويشاركون في نشاط مدروس، ويستمعون إلى بعضهم البعض، ويطرحون الأسئلة على بعضهم البعض (Bertolone-Smith, 2016) . في هذه الفصول، يفكر التلاميذ بصوت عال حول مشكلة تتطلب التعاون، ويستفسرون عن نتيجة مثيرة للدهشة، ويشرحون ويتأملون تفكيرهم، ويبني التلاميذ على أفكار زملاءهم أو يتحدونها أو يوضحونها، ويفكرون في الحل المقترح، ويقدمون ادعاءات مضادة أو تفسيرات بديلة (Resnick et al., 2018).

قد نال الحديث الرياضي الكثير من الاهتمام في الآونة الأخيرة لأسباب عديدة. أولا: مناقشة التلاميذ لأفكارهم مع أقرانهم وتحت توجيه المعلمين تعتبر خطوة أساسية في نمو الفهم الرياضي لديهم (Bertolone–Smith, 2016). ثانيا: يوصي المجلس الوطني لمدرسي الرياضيات (٢٠١٤) بتشجيع الحديث الرياضي الهادف بين التلاميذ في الصفوف الدراسية من الروضة والى التعليم الثانوي من أجل تعميق فهم التلاميذ للمفاهيم الرياضية (NCTM, 2014)، وذلك لأن "اخبار" التلاميذ من خلال التعليم المباشر لا يكفي لتدريس الأفكار التي يكون فيها مصدر المعرفة داخل الطالب (Chapin, O'Connor, & Anderson, 2009). ثالثا: من خلال هذه المحادثات، يصبح فهم التلاميذ أكثر وضوحا، ويصبحون أكثر قدرة على فحص الثغرات في معرفتهم ومراجعة أفكارهم ومن ثم يمكنهم بناء المعرفة الرياضية (Barnes, 2008). من ناحية أخرى، يصبح المعلم أكثر قدرة على معرف تفكير التلاميذ ومن ثم تقويمه وتوجيهه في المسار الصحيح إذا سمح للتلاميذ بالتحدث عن أفكارهم الرياضية. رابعا: عندما يتعلم التلاميذ الرياضيات من خلال مناقشة طريقهم نحو الفهم، يصبحون أفضل ليس فقط في الرياضيات ولكن أيضا في مواد أخرى مثل العلوم والأدب (Resnick et al., 2018) .

قد أجريت عدد من الدراسات الأجنبية (e.g., Foss, 2013; Frank, 2013; Okamoto, 2015; Washington, 2015; Payan, 2017) وقليل من الدراسات العربية (مثل: بشاي، ٢٠١٦) – في حد علم الباحثة – حول استخدام استراتيجية الحديث الرياضي في تدريس الرياضيات. أوضحت الأبحاث فعالية استراتيجية الحديث الرياضي في تدريس الرياضيات حيث أدى الحديث الرياضي إلى تنمية مهارات الطلاقة الحسابية في عمليتي الجمع والطرح لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية (بشاي، ٢٠١٦)، وتنمية تحصيل تلاميذ رياض الأطفال (Payan, 2017) وتحصيل تلاميذ المرحلة الابتدائية وتطوير مهارات التفكير الناقد وحل المشكلات لديهم (Washington, 2015)، وتنمية الحس العددي لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية (Okamoto, 2015). رغم أن الأبحاث المهتمة بالحديث الرياضي أوضحت فعالية الحديث الرياضي في تدريس الرياضيات، إلا أنه لم يتم تناول الطرق التي يساعد بها الحديث الرياضي التلاميذ على تطوير الفهم. هناك حاجة لإظهار ما إذا كان الحديث الرياضي يمكن أن يساعد تلاميذ المدارس الابتدائية على بناء فهم رياضي وكيف يمكن للحديث الرياضي القيام بذلك.

في ضوء ما سبق فقد اهتم البحث الحالي بتحليل دور الحديث الرياضي في نمو فهم تلاميذ المرحلة الابتدائية لموضوع الكسور وذلك باستخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي.

مشكلة البحث:

رغم من أهمية الكسور، إلا أنها تتضمن مفاهيم يصعب تعلمها وتدريسها وتمثل تحديات تربوية مستمرة لمجتمع تعليم الرياضيات (الزهراني، ٢٠١٨، شلش، ٢٠١٨، حسين، ٢٠١٤)،(Bruce et al., 2013; Mills, 2011) . يرى (Mills, 2011) أن فهم معنى الكسر وكيفية التعامل معها (أي الجمع والطرح والضرب والقسمة) غالبا ما يكون شاقا بالنسبة إلى العديد من التلاميذ، بل أن الكثير منهم لا يعرف كيفية تطبيق المعرفة الكسرية بنجاح في الحياة اليومية. وهذا ما تجمع عليه كثير من الدراسات المحلية كدراسة (حسين، ٢٠١٤)، (علي، ٢٠٠٤) وكذلك الدراسات العربية مثل دراسة (الرويلي، ٢٠١٧)، (الزهراني، ٢٠١٨)، (العزو، ٢٠٠٥)، (شلش، ٢٠١٨) والتي تتفق على أن تلاميذ المرحلة الابتدائية يعانون من صعوبة عند تعاملهم مع الكسور. تتمثل صعوبة الكسور في عدم القدرة على بناء المفاهيم الأساسية للكسور والعمليات الحسابية عليها إلا جزء من هذه المفاهيم الأساسية (الرويلي، ٢٠١٧). ينعكس ذلك بشكل واضح على تحصيل التلاميذ لموضوع الكسر، فقد اشارت العديد من الدراسات المحلية (مثل: عطيفي، ٢٠٠٨) والعربية (مثل الرويلي، ٢٠١٧، الحواس، ٢٠١٦، مقدادي، ملكاوي، الزعبي، ٢٠١٣) إلى تدني تحصيل التلاميذ للكسور، مما يعكس ضعف فهم التلاميذ للكسور.

وقد شعرت الباحثة بتلك المشكلة من خلال:

١- ملاحظة الباحثة:

لاحظت الباحثة من خلال حضورها لبعض حصص الرياضيات في المرحلة الابتدائية أثناء التدريب الميداني أن التلاميذ يمكنهم فهم المفاهيم البسيطة بينما يواجهون صعوبة في تعلم المزيد من المفاهيم المجردة في الكسور. على سبيل المثال، بعض التلاميذ ينظرون إلى الكسر $\frac{1}{2}$ على أنه يتكون من عددين لا علاقة بينهما (البسط والمقام). وبعضهم يرى $\frac{1}{3}$ أصغر من $\frac{1}{6}$. كما أن التلاميذ لا يحاولوا فهم المنطق وراء العمليات على الكسور بل يلجئوا إلى حفظ القواعد والصيغ. ونتيجة لذلك يعجزون عن اختيار العملية الحسابية المناسبة للمشكلة، ويعجزون عن تطبيق ما تعلموه على مواقف الحياة الواقعية. علاوة على ذلك، لا يتيح المعلمون الفرصة للتلاميذ ليصفوا افكارهم الرياضية وأن يشرحوها ويدافعوا عنها ويبرروها.

٢- الدراسة الاستطلاعية:

لتدعيم الإحساس بالمشكلة، أجرت الباحثة دراسة استطلاعية عن طريق تطبيق اختبار الكسور على عينة من تلاميذ الصف الخامس الابتدائي (٣٠ تلميذ) بمدرسة الجغيلي بمدينة الخارجة محافظة الوادي الجديد. تكون الاختبار من ١٠ أسئلة. شمل الاختبار قياس فهم التلاميذ لمفهوم الكسر، تكافؤ الكسور، مقارنة الكسور، جمع الكسور، طرح الكسور. كان متوسط النسبة المئوية لدرجات التلاميذ يساوي (٤٩٪).

وبذلك تتحدد مشكلة البحث الحالي في تدني مستوى فهم تلاميذ المرحلة الابتدائية لموضوع الكسور.

أسئلة البحث:

حاول البحث الإجابة عن السؤال الرئيس التالي:

كيف يسهم الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لموضوع الكسور لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي؟

أهداف البحث:

هدف البحث إلى تحليل دور الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لموضوع الكسور لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي وذلك باستخدام نموذج بيري وكيرين.

أهمية البحث:

تتمثل أهمية البحث الحالي في أنه قد يفيد:

١- معلمي الرياضيات:

- تزويد معلمي الرياضيات بفهم أعمق للكيفية التي يمكن أن يخلقوا بها بيئة تعليمية تقوم على تشجيع الحديث الرياضي بين التلاميذ.
- تزويد معلمي الرياضيات بإطار لعمليات نمو فهم التلاميذ الرياضي لموضوع الكسور مما يمكنهم من تنظيم أهدافهم التعليمية على أساس هذا النمو.
- من خلال تحليل سلوكيات الحديث الرياضي لدى التلاميذ وكيف تتوافق هذه السلوكيات مع مستويات الفهم المختلفة، يمكن للمعلمين أن يقيموا ويتدخلوا بشكل أكثر فعالية في الحديث الرياضي.

٢- المتعلمين:

- مساعدة المتعلمين في إثراء فهمهم للكسور.
- إثراء البيئة التعليمية للمتعلم من خلال اتاحة الفرصة للتلاميذ ليتحدثوا عن افكارهم الرياضية ويشرحوها ويدافعوا عنها ويبرروها.

٣- القائمين على تخطيط وتطوير مناهج الرياضيات المدرسية:

من خلال تصميم المنهج وفقا لمراحل نمو الفهم الرياضي.

٤- الباحثين في تدريس الرياضيات:

- فتح المجال أمام الباحثين لإجراء بحوث ودراسات متعلقة باستخدام استراتيجية الحديث الرياضي في تدريس وحدات أخرى.
- فتح المجال أمام الباحثين لإجراء بحوث ودراسات متعلقة باستخدام نموذج بيري وكيرين لتحليل فهم التلاميذ الرياضي لموضوعات أخرى.

حدود البحث:

اقتصر البحث على الحدود التالية:

١- مجموعة من تلاميذ الصف الرابع الابتدائي بمدرسة الأمل الابتدائية بمدينة الخارجة محافظة الوادي الجديد (محل إقامة الباحثة).

٢- وحدة الكسور المقررة على تلاميذ الصف الرابع الابتدائي، الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٩، يرجع سبب اختيار هذه الوحدة إلى:

- أن كثير من التلاميذ يجدون صعوبة أو التباسا في معالجة الكسور وفي إجراء العمليات الحسابية عليها، وقد أكدت ذلك عدد من الدراسات مثل (حسين، ٢٠١٤)، (علي، ٢٠٠٤)،(الرويلي، ٢٠١٧)،(الزهراني، ٢٠١٨)،(العزو، ٢٠٠٥)،(شلش، ٢٠١٨).
- تحتوي هذه الوحدة على مفاهيم وتعميمات ومهارات تعتبر متطلبات أساسية في الرياضيات للصف الرابع الابتدائي ومتطلبات أساسية لمقرر الرياضيات في السنوات التالية.
- تمثل الوحدة مجالا خصبا لاستخدام الحديث الرياضي.

٣- تحليل فهم التلاميذ لموضوع الكسور وفقا لنموذج بيري كيرين.

مصطلحات البحث:

تبنى البحث المصطلحات الإجرائية التالية:

الحديث الرياضي:

الحديث الرياضي عبارة عن المحادثات التي تدور بين تلميذين او أكثر حول الرياضيات حيث يقوموا بشرح افكارهم الرياضية لبعضهم البعض ويدافعون عنها ويبررونها.

الفهم الرياضي:

الفهم الرياضي هو عملية ديناميكية، مستوية غير خطية، مستمرة ومتسقة لهياكل المعرفة (Pirie & Kieren, 1994)، ويمكن تقييمها باستخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي.

نموذج بيري وكيرين:

نموذج بيري وكيرين هو نموذج لتحليل النمو في الفهم لدى تلاميذ معينين وفي موضوع معين خلال عدد من المستويات يتحرك خلالها التلميذ ذهابا وايابا أثناء قيامه ببناء فهمه الرياضي. هذه المستويات هي: المعرفة البدائية، تكوين الصورة، امتلاك الصورة، ملاحظة الصفات، إضفاء الطابع الرسمي.

منهج البحث:

استخدام البحث الحالي تصميم دراسة الحالة. يصف (McMillan, 2008) تصميم دراسة الحالة بأنه "تحليل متعمق لواحد أو أكثر من الأحداث، أو البرامج، أو المجموعات الاجتماعية، أو المجتمعات، أو الأفراد في سياقها الطبيعي" (ص ٢٨٨). تتضمن دراسة الحالة نوعين: دراسة الحالة الفردية Single case study ودراسة الحالة المتعددة (Yin, 2009) Multiple case study. يمكن أن تساعد وحدة التحليل في الدراسة في تحديد ما إذا كانت دراسة الحالة الفردية أو دراسة الحالة المتعددة مناسبة (Yin, 2009).تم استخدام دراسة الحالة المتعددة في البحث الحالي لأن وحدة التحليل هي أزواج التلاميذ الذين يستخدمون الحديث الرياضي. تم تقسيم التلاميذ موضع الدراسة (٦ تلاميذ) إلى ثلاثة أزواج متعاونة لحل مشكلات الكسور باستخدام الحديث الرياضي.

يرجع السبب لتطبيق تصميم دراسة الحالة في الدراسة الحالية إلى الأسباب التالية:

- تستخدم دراسة الحالة للحصول على فهم عميق للموقف حيث يكون الاهتمام منصب على العملية Process والتي بها كان للمعالجة التأثير الذي أحدثته، بدلا من التركيز على النتائج (Merriam, 1998) . وبذلك فإن دراسة الحالة مناسبة للبحث الحالي والذي هدف إلى فحص مراحل نمو فهم التلاميذ للكسور في ضوء نموذج بيري كيرين وعلاقة ذلك باستخدامهم للحديث الرياضي.
- أحد السمات الرئيسية لدراسة الحالة هو دراسة الظاهرة كما تحدث في سياقها الطبيعي مما يؤدي إلى فهم ذو معنى يحدث من خلال ملاحظة السلوك الفعلي للمشاركين (McMillan, 2008). وبذلك فإن دراسة الحالة مناسبة للبحث الحالي حيث تمكن من رؤية المشاركين يتصرفون ويعملون ويتحدثون ويحلون أثناء استخدامهم للحديث الرياضي.
- يقدم منهج دراسة الحالة وصفا غنيا للظاهرة قيد الدراسة ونظرة ثاقبة على تفرد معنى الأحداث والإجراءات من خلال استخدام مصادر معلومات غنية ومتنوعة (Yin, 2009) . استخدام دراسة الحالة جوهري في البحث الحالي للحصول على وصف غني ذو معنى لمراحل نمو الفهم الرياضي وفقا لنموذج بيري وكيرين وعلاقة هذا النمو باستخدام التلاميذ للحديث الرياضي.

مجتمع وعينة البحث:

تم تطبيق استراتيجية الحديث الرياضي في فصل من فصول الصف الرابع الابتدائي (٣٢ تلميذ) بمدرسة الامل الابتدائية بمدينة الخارجة محافظة الوادي الجديد. تم اختيار ستة تلاميذ من هؤلاء التلاميذ ليكونوا عينة البحث.

مواد وأدوات البحث:

تم إعداد واستخدام المواد التجريبية التالية:

١- دليل المعلم لتدريس وحدة الكسور للصف الرابع الابتدائي وفقا لاستراتيجية الحديث الرياضي.

٢- أوراق عمل التلميذ لمحتوى وحدة الكسور وفقا لاستراتيجية الحديث الرياضي.

كما تم إعداد واستخدام أدوات جمع البيانات التالية:

١- اختبار المعرفة السابقة لموضوع الكسور.

٢- مقابلات شبة مقننة قائمة على المهام Semi- Structure Task-Based Interviews:

٣- الملاحظة: Observation

٤- المسودات الميدانية:Field Notes

٥- أوراق عمل التلاميذ.

خطوات البحث واجراءاته:

١- الاطلاع على البحوث والدراسات والادبيات التي تناولت استراتيجية الحديث الرياضي، ونموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي، والكسور.

٢- تحليل محتوى وحدة الكسور المقررة على تلاميذ الصف الرابع الابتدائي وتحديد جوانب التعلم فيها من مفاهيم وتعميمات ومهارات.

٣- إعداد دليل المعلم في وحدة الكسور وفقا لاستراتيجية الحديث الرياضي.

٤- إعداد أوراق عمل التلميذ في وحدة الكسور وفقا لاستراتيجية الحديث الرياضي.

٥- اعداد اختبار المعرفة القبلية لموضوع الكسور.

٦- إعداد مهام المقابلات.

٧- تطبيق اختبار المعرفة القبلية لموضوع الكسور ومهام المقابلات تطبيقا قبليا على عينة استطلاعية.

٨- تطبيق اختبار المعرفة القبلية لموضوع الكسور على كل تلاميذ الفصل موضع البحث لتحديد معرفتهم القبلية لموضوع الكسور.

٩- اختيار مجموعة البحث.

١٠- تدريس موضوع الكسور للفصل موضع البحث باستخدام استراتيجية الحديث الرياضي.

١١- ملاحظة الباحثة للتلاميذ موضع البحث في الفصل أثناء تدريس الكسور باستخدام استراتيجية الحديث الرياضي، وتدوين ملاحظات عن فهم التلاميذ الرياضي لموضوع الكسور.

١٢- مقابلات الباحثة مع التلاميذ موضع البحث خارج الفصل بعد تدريس كل موضوع من موضوعات وحدة الكسور، وتكليفهم بحل مشكلات الكسور في أزواج، والتسجيل الصوتي لهذه المقابلات.

١٣- نسخ المقابلات مع التلاميذ وتحليلها باستخدام نموذج بيري وكيرين وباستخدام سلوكيات الحديث الرياضي.

١٤- تفسير النتائج، وتقديم التوصيات والمقترحات.

الإطار النظري:

أولا: استراتيجية الحديث الرياضي:

الحديث الرياضي هو تبادل الأفكار والمعلومات الرياضية في بيئة تعليمية باستخدام لغة رياضية رسمية أو غير رسمية (Bertolone-Smith, 2016). يختلف الحديث الرياضي عن المناقشة في فصول الرياضيات التقليدية، حيث يتمثل الهدف من المناقشة في فصول الرياضيات التقليدية في نقل الحقائق وتوضيح الاجراءات على النحو الذي تحدده الكتب المدرسية أو المعلم، بينما الغرض من الحديث الرياضي هو التركيز على الأفكار الرياضية وتشجيع الجدال الرياضي بدلا من مجرد تقديم الحقائق والإجراءات(Resnick et al., 2018).

مكونات استراتيجية الحديث الرياضي:

قدم (Hufferd-Ackles, Fuson, & Sherin, 2004) أربعة سلوكيات للحديث الرياضي:

- طرح الأسئلة: يعد طرح الأسئلة على التلاميذ مكون أساسي للحديث الرياضي. في الحديث الرياضي، هناك تحول من المعلم كطارح للأسئلة إلى التلاميذ كطارحين للأسئلة مع المعلم، كذلك هناك تحول في الهدف من طرح الأسئلة من التركيز على إيجاد إجابات للأسئلة إلى التركيز على توضيح التفكير الرياضي وراء الإجابات. في استراتيجية الحديث الرياضي، يبدأ التلاميذ الحديث مع بعضهم البعض، بدون الاعتماد على المعلم حيث يسأل التلاميذ أسئلة لبعضهم البعض ويستمعون إلى ردودهم. العديد من الأسئلة هي أسئلة "لماذا؟" التي تتطلب تقديم مبرر من الشخص.
- توضيح وتبرير التفكير: يعد توضيح وتبرير التلاميذ لتفكيرهم الرياضي المكون الثاني لاستراتيجية الحديث الرياضي. في الحديث الرياضي، يصف التلاميذ استراتيجياتهم في الحل، ويدافعون ويبررون تفكيرهم الرياضي. يتتبع المعلم بدقة وصف التلاميذ لتفكيرهم، ويشجعهم على عمل تفسيرات، ويحفزهم على التفكير بعمق حول الاستراتيجيات التي استخدموها بأن يسأل اسئلة ليجعل توضيحاتهم أكثر اكتمالا. كما يدرك التلاميذ أن غيرهم من التلاميذ سوف يطرحون أسئلة عليهم، لذلك فهم حريصون على أن تكون استراتيجياتهم وافكارهم واضحة.

- مصدر الأفكار الرياضية: في استراتيجية الحديث الرياضي، هناك تحول من المعلم كمصدر للأفكار الرياضية إلى التلاميذ كمصدر للأفكار. في الحديث الرياضي، يفكر التلاميذ ويفهمون الرياضيات بدلا من مجرد محاولة تقليد كلمات وأفعال المعلم حيث يتيح المعلم مزيدا من الفرص للطلاب لاستكشاف المحتوى واقتراح طرق بديلة ومتعددة وذلك عن طريق طرح المزيد من الأسئلة المفتوحة بدلا من الأسئلة الموجهة. يتحول دور المعلم من كونه السلطة الوحيدة في نقل المعلومات وتأكيد الإجابات الصحيحة إلى دور الميسر، والسائل، والمستمع، والمتعلم حيث يقوم المعلم بالاستماع إلى تفكير التلاميذ بدلا من التركيز على إجابة نهائية صحيحة ولذا يطرح أسئلة مفتوحة النهاية. إن الوصول إلى مستوى أن الطالب مصدر للأفكار الرياضية يعتمد على عاملين: أولا، اكتساب التلاميذ الثقة بأن أفكارهم حول الرياضيات صحيحة ومهمة. ثانيا، اقتناع المعلم أن الأفكار التي يساهم بها التلاميذ مهمة للاستكشاف.
- مسؤولية التعلم: في استراتيجية الحديث الرياضي، تحولت مسؤولية التعلم من المعلم إلى التلاميذ حيث أصبح التلاميذ مسئولين عن تعلمهم وتعلم زملائهم في الفصل. تتضح مسؤوليته التلاميذ عن تعلمهم في رغبتهم في طرح الأسئلة في الصف، وحرصهم على الذهاب إلى السبورة لإظهار فهمهم للمشكلات المطروحة، وتطوعهم للمشاركة في مساعدة زملائهم المتعثرين.

خطوات التدريس وفقا لاستراتيجية الحديث الرياضي:

التدريس وفق لاستراتيجية الحديث الرياضي يتم خلال الخطوات التالية (Payan, 2017; Okamoto, 2015; Washington, 2015; Foss, 2013; Frank, 2013):

أولا: تقديم المشكلة:

يقدم المعلم مشكلة للفصل بأكمله أو لمجموعة صغيرة. يجب اختيار المشكلات المرتبطة بالأفكار الرياضية الأساسية ويمكن حلها باستراتيجيات متعددة، وتتطلب من التلاميذ تفسير وتبرير إجراءاتهم وفهمهم في شكل شفهي أو مكتوب (Okamoto, 2015). كما وجد (Durfee, 2018) أن اختيار المشكلات ذات مستوى مناسب من التعقيد يلعب دورا أساسيا في مستوى انخراط التلاميذ في الحديث الرياضي، كذلك المهام ذات السياقات الغير مألوفة للطلاب تؤدي إلى مستوى منخفض من الحديث الرياضي.

ثانيا: تفكير التلاميذ في الحل بشكل فردي:

يعطي المعلم التلاميذ ٥ دقائق للعمل مع المشكلة فرديا. يمكن أن يشير التلاميذ بهدوء إلى المعلم عندما يتوصلوا إلى الإجابة. يتم تشجيع التلاميذ على التفكير في طريقة مختلفة للحل إذا وجدوا طريقة واحدة قبل انتهاء الوقت المخصص. أثناء قيام التلاميذ بالحل، يتنقل المعلم بين التلاميذ مراقبا حلول التلاميذ دون التدخل بالمساعدة أو تصحيح الخطأ.

ثالثا: مناقشة التلاميذ لتفكيرهم:

يناقش التلاميذ طريقتهم في التوصل إلى الحل. يمكن أن يتم ذلك من خلال مناقشة الفصل ككل، أو المناقشة في مجموعات صغيرة، أو المناقشة في أزواج. يعطي المعلم التلاميذ سؤال ليناقشوه فيما بينهم. يبدأ التلاميذ الحديث مع بعضهم البعض، بدون الاعتماد على المعلم. يسأل التلاميذ أسئلة لبعضهم البعض والاستماع إلى ردودهم. العديد من الأسئلة هي أسئلة "لماذا؟" التي تتطلب تقديم مبرر من الشخص. أثناء مناقشات التلاميذ في مجموعات، يتنقل المعلم بين مجموعات التلاميذ؛ يلاحظ ويتدخل عند الضرورة ولكن لا يتحكم في سير المناقشة.

رابعا: التلخيص:

في هذه المرحلة يلخص المعلم الحقائق والمعارف الجديدة التي تناولها الدرس.

دور المعلم في استراتيجية الحديث الرياضي:

- للمعلم دور رئيس في بناء مجتمع من المتعلمين مبني على الاحترام المتبادل (Chapin et al., 2009; Gulkilik et al., 2015). لن يستطيع المعلم تطبيق الحديث الرياضي ما لم يؤسس ثقافة في الفصل تقوم على احترام أفكار الأخرين، إذا خشي التلاميذ من سخرية أقرانهم من أفكارهم، لن يشاركوا في الحديث مهما كان نوع الإغراءات التي يقدمها المعلم لهم. لذلك فإن الخطوة الأولى لخلق بيئة مشجعة على الحديث الرياضي هي وضع المعلم لقواعد واضحة للتفاعل بين التلاميذ، كما يجب أن يكون هناك نتائج واضحة لأي اختراق لهذه القواعد (Chapin et al., 2009) .
- أثناء المحادثات بين التلاميذ، يجب أن يكون المعلم منتبها باستمرار إلى المحادثات الرياضية بين التلاميذ (Durfee, 2018) . ومع ذلك، لا يجب أن يمارس المعلم سلطة مطلقة، بل يتوقع من المعلم مشاركة السلطة الرياضية مع التلاميذ مع توفير المعرفة الرياضية للمساعدة في تجميع مواضيع النقاش (Bertolone-Smith, 2016).
- يقوم المعلم بتسهيل الحوار بين التلاميذ من خلال طرح الأسئلة. فيتنقل المعلم من مجموعة لأخرى لطرح الأسئلة أثناء عمل التلاميذ بشكل تعاوني لحل المشكلات واكمال المهام. كما يسأل المعلم أسئلة مفتوحة النهاية تتطلب من التلاميذ تبرير تفكيرهم أو ربط إجاباتهم بمفهوم آخر، كأن يسأل "كيف عرفت ذلك"، "ماذا يحدث إذا" (Durfee, 2018).
- كذلك يراقب المعلم مشاركة التلاميذ خلال المناقشات، فكل طالب عليه مشاركة فكرة أو التعليق على فكرة زميله أو طرح سؤال توضيحي حول أحد أفكار زميله. يشجع المعلم التلاميذ على طلب توضيح من رفاقهم والبناء على إجابات رفاقهم (Durfee, 2018) .
- على الرغم من أن المعلم لديه رأيه الخاص في طريقة الحل التي يتمنى أن يقوم به تلاميذه، فإنه لا يخبرهم أو يعلم "بشكل مباشر"، ولا يقول المعلم نعم أو لا للإجابات الصحيحة أو الخطأ. وبدلا من ذلك، يبدأ بطرح سؤال ليبحث عما يعتقده التلاميذ عن الإجابة الصحيحة، ولماذا. فبعد أن يقوم أحد التلاميذ بالحل، يسأل المعلم "من يوافق على هذا الحل؟" مما يسمح له بمراقبة والتحقق من أنواع الفهم التي يقوم طلابه ببنائها، وبذلك فهو يسمح ويشجع فصله على مشاركة فهمهم وفهم تصوراتهم الخاطئة (Martin, 2001) .

مميزات استراتيجية الحديث الرياضي:

- يدعم الحديث الرياضي تعلم التلاميذ من خلال بناء بيئة اجتماعية تشجع التلاميذ على التعامل مع بعضهم البعض كشركاء متساوين في التفكير، والاستكشاف، وتبادل الأفكار (Chapin et al., 2009).
- يقدم الحديث بين التلاميذ فرصة لاستكشاف واختبار الأفكار المتكونة جزئيا مع الآخرين، كما يقدم فرصة للتلاميذ لمساعدة ودعم بعضهم البعض في بناء المعرفة المشتركة من خلال التفاوض على الأفكار المختلفة من أجل التوصل إلى توافق في الآراء (Barnes, 2008).
- في استراتيجية الحديث الرياضي، لا يعطي المعلم التلاميذ الإجابة الصحيحة ولا يرفض الإجابات الخاطئة، ولكن يحاول أن يشجع التلاميذ على فحص تفكيرهم. تكشف هذه المناقشات تفكير التلاميذ الخاطئ وسوء الفهم والتي تعد معلومات هامة يحتاجها المعلم للتخطيط للتدريس ولقيادة تفكير التلاميذ الرياضي (Chapin et al., 2009).
- يمكن أن يلعب الحديث الرياضي دورا حاسما في مساعدة التلاميذ على تحسين قدرتهم على التفكير المنطقي (Chapin et al., 2009). فعندما يقوم التلاميذ بمناقشة زملائهم في الاستراتيجية التي استخدموها للتوصل إلى الحل فإن هذا يؤدي إلى تنمية وتطوير مهارات التفكير الرياضي لديهم (بشاي، ٢٠١٦). عندما يقدم أحد التلاميذ ادعاء، ويطلب منه أدلة لدعم هذا الادعاء، فإنه يتعلم تدريجيا كيفية إنشاء الحجج ودعمها مما يسهم في تنمية مهارات التفكير المنطقي لديهم (Chapin et al., 2009).
- يمرن الحديث التلاميذ على التفكير في عمليات التفكير الخاصة بهم. فممارسة الحديث يجعل التلاميذ قادرين على تنسيق الأفكار والفهم داخل رؤوسهم مع أفكار ومعلومات التلاميذ الآخرين (Chapin et al., 2009).
- كلك من مزايا الحديث في الفصول الدراسية هو بناء ثقة التلاميذ بشأن قدرتهم على المشاركة في النقاش الفكري (Chapin et al., 2009) . مساعدة التلاميذ على تعلم التحدث بالطرق التي يقيمها علماء الرياضيات تؤدي إلى تغييرات حقيقية في كيفية تقديم التلاميذ لأفكارهم وفي كيف يشعرون عن أنفسهم كمفكرين، وسيساعدهم ذلك في النهاية على تحقيق نتائج جيدة في المراحل المتقدمة في المدارس الثانوية والكليات حيث تتطلب المواد الدراسية القدرة على تقديم حجج علمية ومنطقية(Chapin et al., 2009) .

ثانيا: الفهم الرياضي:

نظر بيري وكيرين (Pirie & Kieren, 1989) إلى الفهم الرياضي كظاهرة معقدة لا يمكن تمييزها بسهولة إلى فئتين أو ثلاث فئات أو تحديدها على أنها منتج نهائي. وصف بيري وكيرين الفهم الرياضي بانه عملية متكررة كاملة وديناميكية وغير خطية بينما ينتقل تفكير المرء بين مستويات الفهم (Pirie & Kieren, 1994). يؤكد بيري وكيرين

(Pirie & Kieren, 1992) أن مستويات الفهم المختلفة لا تتحقق مرة واحدة ولكل التلاميذ، فالتلاميذ الذين يظهرون سلوكيات رياضية متشابهة قد يكون لديهم فهم مختلف، كما أن هناك مستويات مختلفة من الفهم في الموضوع الواحد ويمكن للتلاميذ الوصول إليها من خلال مسارات مختلفة. كذلك التلاميذ المختلفون سيظهرون أنواعا مختلفة من الفهم عند التعامل مع نفس المهمة الرياضية، بل أن مستويات الفهم تختلف عند التلميذ الواحد من مهمة رياضية لأخرى.

مستويات الفهم وفقا لنموذج نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي:

فيما يلي شرح لمستويات الفهم وفقا لنموذج بيري وكيرين:

(Pirie & Kieren, 1994; Pirie & Kieren, 1992; Pirie & Martin, 2000)

١- المعرفة البدائية: Primitive Knowing

المعرفة البدائية هي المعرفة السابقة التي يحضرها التلاميذ إلى موقف التعلم. من هذه المعرفة البدائية، يجب اختيار المعرفة المناسبة واستخدامها كأساس لنمو الفهم.

مثال: في درس جمع الكسور، يفترض أن يعرف التلميذ كيفية جمع الأعداد الطبيعية.

٢- تكوين الصورة:Image Making

يشير مصطلح "الصورة" إلى أي أفكار قد تكون لدى المتعلم حول الموضوع، أو طريقة لإيجاد حل مشكلة رياضية، وليس فقط صور مرئية. ما هو حاسم في هذا المستوى هو أن أفعال التلميذ تنطوي على القيام بشيء، إما عقليا أو جسديا، مثل استخدام أشياء مادية أو أشكال أو رسوم أو رموز من أجل تطوير الفهم الأولي للمفهوم.

مثال: في درس جمع الكسور، يقوم الطالب ببعض المحاولات (ليس بالضرورة أن يكون كلها صحيح) لجمع كسرين مختلفي المقامات

٣- امتلاك الصورة: Image Having

في مستوى امتلاك الصورة، يكون لدى المتعلم خطة عقلية عامة أو صورة حول موضوع أو مشكلة رياضية، ولم يعد المتعلمون مرتبطين بأنشطة حقيقية. يستخدم التلاميذ الصورة التي كونوها حول موضوع ما دون الاضطرار بالضرورة إلى القيام بالإجراء المحدد الذي أدى إلى تكوين الصورة. هذا يحرر التلميذ من الاضطرار إلى تنفيذ إجراءات مادية معينة مرتبطة بكل صورة. يمكن الآن للمتعلم التفكير في هذه الصور العقلية واستخدامها في معرفته الرياضية. من المهم الإشارة إلى أن الصور في هذا المستوى ليست بالضرورة أن تكون كاملة أو صحيحة.

مثال: في موضوع الكسور، لا يحتاج التلاميذ إلى رسم الرسوم المقسمة لمقارنة الكسور البسيطة، ولكن يمكنهم ترتيب ٣/١ على أنه أصغر من ٢/١ على أساس الصورة الذهنية التي بنوها.

٤- ملاحظة الصفات: Property Noticing

في هذا المستوى، يستطيع المتعلم أن يتأمل صورته ويدرك خصائصها وسماتها؛ ذلك لملاحظة الخصائص التي قد تمتد خارج الأمثلة والحالات المحددة التي من خلالها تم التوصل للصورة. وهذا ينطوي على ملاحظة الروابط بين الصور وتحديد العلاقات بين التفاصيل المختلفة. ما زال هذا المستوى مرتبطا باستخدام أمثلة محلية غير رسمية.

مثال: في درس مقارنة الكسور، يدرك التلميذ أنه عند تساوي المقامات فإن الكسر الذي بسطه أكبر البسوط هو الكسر ذو القيمة الكبرى.

٥- إضفاء الطابع الرسمي: Formalizing

ينطوي النمو إلى هذا المستوى من الفهم على التعبير عن طرق الحل باستخدام المصطلحات الرسمية التي تسمح للطفل بفهم جزء من الرياضيات كحالات عامة. يطور التلاميذ طرق مجردة أو قواسم مشتركة بين الصور السابقة لتمييز الخصائص التي لوحظت. مع الوعي الذاتي، يضفي التلاميذ صبغة رسمية على فهمهم ويحولون صور المفهوم إلى تعريفات رياضية أو خوارزميات. لا يقتصر فهمهم للمفهوم الرياضي على التمثيلات المرئية، بل يمكنهم حل المشاكل الرياضية باستخدام المفاهيم والرموز المتعلقة بالمفهوم فقط. ولكن ليس استخدام الرموز هو الذي يميز مستوى إضفاء الطابع الرسمي عن مستوى تكوين الصورة أو امتلاك الصورة أو ملاحظة الصفات، بل ما يميز مستوى إضفاء الطابع الرسمي هو المعاني المجردة المعطاة للرمز. يتميز هذا المستوى بقدرة التلاميذ علي تأمل وعمل تمييزات في المجموعات التي كونوها وشعورهم بالثقة فيما يقومون به حتى لو كان ذلك الفهم لديه صفة محلية غير رسمية. عندما لا يحتاج المرء إلى التحدث بشكل محدد ويمكنه إصدار بيان عام، فهو يضفي الطابع الرسمي.

مثال: يدرك المتعلم في هذا المستوى أنه إذا قام بطي أي كسر (نصفين) ن مرة، فإن القطع الجديدة عبارة عن ٢ ن. لكن استخدام الجبر ليس شرطا ضروريا لهذا المستوى.

خصائص نموذج بيري وكيرين:

١- الطي العكسي: الرجوع إلى الخلف:Folding Back

إحدى السمات الهامة لنظرية بيري وكيرين للفهم هي فكرة الطي العكسي. يحدث الطي العكسي عندما يواجه التلاميذ مشكلة لا يمكن حلها على الفور بمستوى فهمهم الحالي، فيقوم التلميذ بالعودة إلى مستوى من الفهم أقل تقدما لتوسيع الفهم الحالي غير الكافي وغير الكامل من خلال إعادة بناء الفهم السابق للمفهوم واعادة تنظيمه، وانشاء صور جديدة تساعده على مواصلة بناء الفهم الرياضي(Pirie & Kieren, 1994; Pirie & Martin, 2000) . على سبيل المثال، عند جمع كسور مختلفة المقامات مثل ٢/١، ٣/٢ (مستوى إضفاء الطابع الرسمي)، قام تلميذ بالطي العكسي إلى رسم البيتزا (تكوين الصورة)، وأعاد تشكيل صورة للنصفين والثلثين مجتمعتين، ثم استخدام خاصية إنشاء كسور مكافئة .وهكذا، من مستوى إضفاء الطابع الرسمي قام التلميذ بالطي العكسي إلى مستوى تكوين الصورة لفهم العملية المطلوبة في مستوى إضفاء

الطابع الرسمي، ثم استخدم خاصية التكافؤ لغرض خلق معنى لجمع الكسور. لا يمكن للمعلم أن يعتقد أن تلميذ وصل إلى مستوى رسمي من فهم الكسور، وبالتالي سوف يستخدم خوارزميات رسمية من الآن فصاعدا للتعامل مع المهام، بل يجب أن يكون المعلم على دراية بأن التلميذ سوف يتراجع (الطي العكسي) إلى إجراءات أقل رسمية وأقل تعقيدا كجزء من عملية النمو المعتادة (Pirie & Kieren, 1992). يمكن تحفيز الطي العكسي من خلال المعلم، أو الرفاق، أو المتعلمين أنفسهم (Sengul & Argat, 2015).

٢- لا حاجة إلى وجود حدود: Don't Need Boundaries

يستخدم بيري وكيرين (Pirie & Kieren, 1994) عبارة "لا تحتاج" لتوضيح فكرة أنه إذا كان الشخص في مستوى معين من الفهم، فلن يحتاج إلى مستويات الفهم السابقة حتى يصل إلى مستوى فهم أعلى حيث يمكن للمرء أن يعمل مع مستوى معين من الفهم او استنتاج معين دون الحاجة إلى الرجوع إلى صور عقلية أو مادية معينة. هذا لا يعني، بالطبع، أنه لا يمكن للمرء العودة إلى مستويات أقل تجريدا إذا لزم الأمر. كما يمكن أن ينتقل الفرد عند تعلمه لموضوع معين من مستوى فهم إلى مستوي لا يليه مباشرة، إذ لا يتطلب ذلك منه المرور في ذلك المستوي الذي تعداه.

الحديث الرياضي والفهم الرياضي:

هناك علاقة وثيقة بين حديث التلاميذ عن الرياضيات وفهمهم للرياضيات، تتمثل هذه العلاقة في الآتي:

- في استراتيجية الحديث الرياضي، لم يعد المعلم هو المسؤول الأول عن توجيه المعلومات، بل يحاول المعلم تشجيع التلاميذ على المشاركة بتفكيرهم وتوضيح الخطوات التي استخدموها في تفكيرهم والبناء على اسهامات التلاميذ الآخرين. إن مطالبة التلاميذ بالحديث عن المفاهيم والإجراءات وطرق حل المشكلات الرياضية يساعدهم على فهم أعمق وأكثر وضوحا. هذا الحديث يمكن أن يوضح لهم ما يفهمونه وما لا يفهمونه، وماذا يفكر التلاميذ الآخرون في نفس هذه القضايا(Chapin et al., 2009) .
- يدعو الحديث بين التلاميذ إلى تفاعل طالب إلى طالب وتوفير فرصة للمتعلمين لمراجعة تفكيرهم من خلال الحديث أو بسبب الحديث (Barnes, 2008). عند المشاركة في التفكير أو حل المشكلات، يشجع الحديث التلاميذ على تتبع فهمهم (أو عدم فهمهم) لحظة بلحظة. عندما لا يفهمون شيئا ما، فإنهم يعالجون على الفور ارتباكهم بطرح سؤال أو إيقاف العملية بفعالية حتى يجدون طريقة لمعالجة ما لا يفهمونه (Chapin et al., 2009).
- عند تحدث التلاميذ عن أفكارهم، يقوم التلاميذ بالتفكير في كيفية شرح وتفسير تفكيرهم بطريقة متماسكة وكاملة حتى يتمكن الآخرون من فهمها. كذلك عند قيام التلاميذ بصياغة أفكارهم أو شرح أفكارهم للآخرين، قد يدركون المفاهيم الخاطئة لديهم أو عدم اكتمال أفكارهم. من ناحية أخرى، استماع التلاميذ إلى أفكار التلاميذ الآخرين يمكن أن يكشف لهم أفكار جديدة وطرق تفكير مختلفة، ويشجع التلاميذ على إعادة النظر في أفكارهم مما يؤدي إلى ترسيخ أو توضيح تفكيرهم (Okamoto, 2015)

الحديث الرياضي ونموذج بيري وكيرين للفهم:

هناك علاقة بين استراتيجية الحديث الرياضي ونموذج بيري وكيرين للفهم تتمثل في الآتي:

- ينظر نموذج بيري وكيرين إلى الفهم على أنه شيء مختلف عن كونه عملية داخلية عقلية يتم فيها اكتساب فكرة ثابتة ثم تطبيقها. بدلا من ذلك، يؤكد نموذج بيري وكيرين على التعلم والفهم على أنهما عملية تفاعلية، حيث يتم الفهم خلال افعال الفرد وتفاعله مع الآخرين ومع البيئة، وبذلك يمكن النظر إلى الفهم ليس فقط على أنه ذاتي وفريد بشكل فردي، ولكن أيضا كشيء يمكن مشاركته من خلال التفاعل (Pirie & Martin, 2000). وبذلك، في بيئة تفاعلية من الفصل ككل، يمكن أن ينمو الفهم الرياضي للأفراد وللفصل ككل حيث تنشأ المعرفة الجماعية المشتركة والفهم الفردي معا من خلال توفر "مساحة تفكير" لهم لبناء وتعديل صورهم الخاصة كاستجابة لتدخلات الاخرين (Martin, 2001) .
- وفقا لنموذج بيري وكيرين، يظهر الفهم ويتحقق بشكل تفاعلي في المناقشة بين أفراد مجموعة تعمل معا، وقد لا يعزى إلى أنه ناشئ عن أي فرد بعينه، فنمو الفهم يحدث كعملية تفاعلية ديناميكي دائمة التغير، حيث يوجد فهم مشتركة ويظهر في مناقشات أفراد المجموعة (Martin & Towers, 2015).
- في مستوى تكوين الصورة، يستكشف التلميذ ويلعب بالشكل ليرى ما يمكن أن يكون طريقة مفيدة للمضي قدما. في الفهم الرياضي الجماعي تكون هذه العملية جماعية وليست عملية فردية يقوم بها التلميذ بشكل فري. هذه العملية المتمثلة في دمج المساهمات الفردية لإنشاء فكرة أو تمثيل مشترك متماسك هي ما يجعلنا نعتبر ذلك بمثابة تكوين صورة جماعية (Martin & Towers, 2015).
- في مستوي امتلاك الصورة الجماعية، يكون لدى المجموعة فكرة قابلة للتطبيق وقابلة للاستخدام لحل المشكلة (Martin & Towers, 2015).
- يمثل مستوى ملاحظة الصفات الجماعية عودة إلى أنواع التعاون المشترك في مستوى تكوين الصورة الجماعية، هناك مرة أخرى تشابك في العروض الفردية لتحقيق صياغة مشتركة وتحديد ما يتم ملاحظته بشكل عام ولماذا (Martin & Towers, 2015).

إعداد أدوات الدراسة:

أولا: تحليل محتوى الوحدة:

تم تحليل محتوى وحدة "الكسور" للصف الرابع الابتدائي، وذلك بهدف استخراج ما تتضمنه من مفاهيم وتعميمات ومهارات (ملحق ١). بعد إجراء عملية التحليل تم حساب صدق وثبات التحليل كما يلي:

أ- صدق التحليل:

تم عرض نتائج التحليل على مجموعة من المحكمين من أساتذة المناهج وطرق تدريس الرياضيات، وموجهي ومدرسي الرياضيات، وذلك بهدف تعرف مدى شمولية نتائج التحليل. وقد أكدت أراء المحكمين شمولية التحليل لجوانب التعلم المتضمنة بالوحدة.

ب- ثبات التحليل:

تم التوصل إلى حساب ثبات التحليل باتباع الخطوات التالية:

- قيام الباحثة بعملية التحليل.
- قيام أحد الزملاء بعملية التحليل.
- حساب معامل الثبات للتحليل باستخدام معادلة هولستي.

وقد وجد أن معامل الثبات بالنسبة للمفاهيم ١٠٠٪، وبالنسبة للتعميمات ٩٢٪، وبالنسبة للمهارات ٨٧٪، وبالنسبة لعناصر التحليل ككل ٩٢٪ وهذه القيمة يمكن الوثوق بها مما يدل على ثبات التحليل.

ثانيا: إعداد دليل المعلم:

في ضوء نتائج تحليل وحدة الكسور تم إعداد دليل للمعلم وفق استراتيجية الحديث الرياضي (ملحق ١)، حيث أشتمل الدليل على ما يلي:

- مقدمة: تعطي فكرة مختصرة للمعلم عن استراتيجية الحديث الرياضي، وخطوات التدريس وفق استراتيجية الحديث الرياضي.
- الخطوات الاجرائية لاستراتيجية الحديث الرياضي:
- تحليل محتوى وحدة الكسور المتضمنة بمقرر الرياضيات للصف الرابع الابتدائي.
- الأهداف العامة لوحدة "الكسور" لتلاميذ الصف الرابع الابتدائي.
- الخطة الزمنية لتدريس موضوعات الوحدة.
- عرض موضوعات الوحدة في صورة دروس، وقد أشتمل كل درس على:

- **أهداف الدرس.**
- **خطوات السير في الدرس، وتضمنت:**

أولا: تقديم المشكلة: وفيها يقدم المعلم مشكلة للفصل بأكمله أو لمجموعة صغيرة.

ثانيا: تفكير التلاميذ في الحل بشكل فردي: وفيها يعطي المعلم التلاميذ ٥ دقائق للعمل مع المشكلة فرديا.

ثالثا: مناقشة التلاميذ لتفكيرهم: يناقش التلاميذ طريقتهم في التوصل إلى الحل. يتم ذلك من خلال مناقشة الفصل ككل، والمناقشة في أزواج.

رابعا: التلخيص: في هذه المرحلة يلخص المعلم الحقائق والمعارف الجديدة التي تناولها الدرس.

ثالثا: إعداد أوراق عمل التلميذ وفقا لاستراتيجية الحديث الرياضي:

تم إعداد أوراق عمل التلميذ وفقا لاستراتيجية الحديث الرياضي لمحتوى وحدة الكسور لتلاميذ الصف الرابع الابتدائي (ملحق ٢)، حيث اشتمل كل درس نشاط تمهيدي، ونشاط تدريبي.

رابعا: إعداد اختبار المعرفة السابقة لموضوع الكسور:

قد مر بناء الاختبار بالخطوات التالية:

أ- **تحديد الهدف من الاختبار:** هدف اختبار المعرفة السابقة لموضوع الكسور إلى قياس معرفة التلاميذ السابقة لموضوع الكسور، وذلك بغرض اختيار عينة البحث.

ب – **تحديد مفردات الاختبار:** تضمن الاختبار الموضوعات التي تشملها وحدة الكسور المقررة على الصف الثالث الابتدائي. تكون الاختبار من ١٠ مشكلات مفتوحة النهاية: معنى الكسر وقراءته (٣ مفردات)، الكسور المتساوية (٣ مفردات)، المقارنة بين كسور متحدة المقامات (مفردتين)، جمع الكسور متحدة المقامات (مفردة)، طرح الكسور متحدة المقامات (مفردة). تم حساب عدد المفردات الخاصة بكل موضوع في ضوء أهميتها لموضوعات وحدة الكسور المقررة على الصف الرابع الابتدائي.

جـ- **صدق الاختبار:** للتأكد من صدق الاختبار، تم عرضه في صورته الأولية على مجموعة من أساتذة المناهج وطرق تدريس الرياضيات، وموجهي ومدرسي الرياضيات لإبداء آرائهم في أسئلة الاختبار من حيث مدى صحة السؤال من الناحية العلمية واللغوية، ومدى مناسبة الأسئلة لمستوى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي. قد تم إجراء التعديلات في ضوء أراء المحكمين، وأصبح الاختبار في صورته النهائية يتكون من ١٠ مشكلات (ملحق ٣).

د – **تطبيق التجربة الاستطلاعية للاختبار:** تم تطبيق الاختبار على ٣٥ تلميذ من تلاميذ الصف الرابع الابتدائي بمدرسة الجغيلي، وذلك بهدف:

- **حساب زمن الاختبار:** تم حساب زمن الاختبار برصد الزمن الذي استغرقه كل تلميذ ثم حساب متوسط الزمن. زمن الاختبار ٣٠ دقيقة.
- **حساب ثبات الاختبار:** تم حساب ثبات الاختبار عن طريق معادلة الفا كرونباخ. ووجد أن معامل الثبات (٠.٨٧) وهي قيمة مقبولة لمعامل الثبات.
- **حساب معاملات السهولة والصعوبة لمفردات الاختبار:** تم حساب معاملات السهولة والصعوبة لمفردات الاختبار، وقد تراوحت بين (٠.٢٥، ٠.٨).
- **طريقة تصحيح الاختبار:** تم إعطاء درجتين لكل مفردة تكون إجابة التلميذ عليها صحيحة، ودرجة واحدة لكل إجابة صحيحة جزئيا، صفر لكل مفردة متروكة أو أجاب عليها التلميذ إجابة خاطئة. بلغت النهاية العظمى لدرجات الاختبار ٢٠ درجة.

خامسا: إعداد مهام المقابلات:

قد مر إعداد مهام المقابلات بالخطوات التالية:

أ- **تحديد الهدف من مهام المقابلات:** هدفت المهام التي يتم استخدامها أثناء المقابلات مع التلاميذ موضع الدراسة إلى التعرف على نمو الفهم الرياضي لدى التلاميذ وتحليل الدور الذي قد يلعبه الحديث الرياضي في هذا نمو.

ب- **تحديد مهام المقابلات:** شملت كل مقابلة على مهمتين مفتوحتي النهاية في أحد موضوعات وحدة الكسور المقررة على تلاميذ الصف الرابع الابتدائي. وبذلك تضمنت مهام المقابلات مهمتين عن العدد الكسري، مهمتين عن الكسور المتساوية، مهمتين عن مقارنة الكسور مختلفة المقامات، مهمتين عن جمع الكسور مختلفة المقامات، مهمتين عن طرح الكسور مختلفة المقامات. تم إعداد مهام المقابلات بحيث يكون لها أكثر من طريق للحل، وتتطلب من التلاميذ تفسير وتبرير إجراءاتهم وفهمهم في شكل شفهي أو مكتوب (ملحق ٤).

جـ- **صدق مهام المقابلات:** تم عرض مهام المقابلات على مجموعة من أساتذة المناهج وطرق تدريس الرياضيات، وموجهي ومدرسي الرياضيات، لإبداء آرائهم من حيث مدى صحة المهمة من الناحية العلمية واللغوية، ومدى مناسبتها لمستوى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي. وقد تم إجراء التعديلات في ضوء أراء المحكمين.

د- **تطبيق التجربة الاستطلاعية لمهام المقابلات:** تم تطبيق مهام المقابلة على ٣٥ تلميذا من تلاميذ الصف الرابع الابتدائي، وذلك بهدف:

- **حساب ثبات المهام:** تم حساب ثبات الاختبار عن طريق معادلة الفا كرونباخ. والذي ووجد أنه يساوي (٠،٨).

- **حساب معاملات السهولة والصعوبة للمهام:** تم حساب معاملات السهولة والصعوبة، وقد تراوحت بين وقد تراوحت بين (٠.٣، ٠.٧٥).

إجراءات تجربة البحث:

أولا: تطبيق اختبار المعرفة السابقة لموضوع الكسور

تم تطبيق اختبار المعرفة السابقة لموضوع الكسور على كل تلاميذ الفصل موضع البحث لتحديد معرفتهم السابقة لموضوع الكسور

ثانيا: اختيار مجموعة البحث.

تم تطبيق استراتيجية الحديث الرياضي في فصل من فصول الصف الرابع الابتدائي (٣٢ تلميذ) بمدرسة الأمل الابتدائية بمدينة الخارجة محافظة الوادي الجديد. تم اختيار ثمانية تلاميذ من هؤلاء التلاميذ ليكونوا عينة البحث. تم اختيار هؤلاء التلاميذ الثمانية باستخدام طريقة عينة الفروق القصوى Maximum Variation Sample (Patton, 2002) . ينتج عن هذا النمط من العينات: (١) تقديم وصف عالي الجودة ومفصل لكل حالة، والتي تكون مفيدة لتوثيق التفرد، (٢) الوصول إلى أنماط مشتركة هامة بين الحالات وتشتق أهميتها من انبثاقها من عدم التجانس، مما يزيد من مصداقية وثقة النتائج التي يتم التوصل إليها (Patton, 2002). قامت الباحثة بتحديد ابعاد الاختلافات الرئيسية المطلوبة بين المشاركين وهي اختلاف التلاميذ في مستوى تحصيلهم للرياضيات واختلاف معرفتهم السابقة لموضوع الكسور، ثم إيجاد الحالات التي تختلف عن بعضها البعض في هذه الابعاد قدر الإمكان. وبذلك تم اختيار عينة البحث (٨ تلاميذ) بناء على درجات التلاميذ في اختبار المعرفة القبلية للكسور، ومستوى تحصيلهم للرياضيات في الفصل الدراسي الأول، وكذلك تم مراعاة وجه نظر مدرس الفصل عند اختيار المشاركين. تم اختيار ستة تلاميذ فقط من بين الثمانية تلاميذ لأن اثنين من التلاميذ تغيبوا عن بعض حصص الرياضيات أثناء تطبيق استراتيجية الحديث الرياضي. جدول (١) يوضح خصائص العينة موضع البحث. تم إعطاء التلاميذ موضع البحث أسماء وهمية.

جدول (١). خصائص العينة موضع البحث

الاسم	درجة الاختبار القبلي	درجة الاختبار التحصيلي في الرياضيات في الفصل الدراسي الاول
خلف	١٥	١٠٠
محمد	١٢	٩٠
تسنيم	٩	٧٨
عمر	٨	٦٥
عبد الرحمن	١١	٨٧
خالد	٥	٥٥

ملحوظة: النهاية العظمى للاختبار التحصيلي في الرياضيات (١٠٠) درجة، النهاية العظمى للاختبار القبلي (٢٠) درجة.

ثالثا: التدريس:

- تم تدريس وحدة الكسور للفصل موضع البحث في الفصل الدراسي الثاني من العام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٩ باستخدام استراتيجية الحديث الرياضي، بواقع ١٢ حصة.
- قام بالتدريس معلم الفصل وذلك بعد توضيح الهدف من البحث وكيفية تطبيق استراتيجية الحديث الرياضي وتذويده بدليل المعلم المعد لهذا الغرض. وقد حضرت الباحثة أثناء التطبيق.

رابعا: ملاحظة التلاميذ أثناء استخدامهم للحديث الرياضي:

تعد الملاحظة أداة لجمع البيانات في الأبحاث النوعية. تساعد الملاحظة على الفهم العميق للظاهرة موضع الدراسة حيث يتم ملاحظة السلوك الفعلي للمشاركين أثناء السياقات الطبيعية للظاهرة (McMillan, 2008) . تفيد الملاحظة في توفير معلومات إضافية حول الموضوع قيد الدراسة (Yin, 2009). الغرض من الملاحظة في البحث الحالي هو تعزيز البيانات التي تم جمعها من المقابلات.

قامت الباحثة بملاحظة التلاميذ موضع البحث أثناء مشاركتهم في الحديث الرياضي خلال دروس الكسور في الفصل وأثناء عملهم في مهام الكسور في أزواج أثناء المقابلات، وتدوين ملاحظات عن فهم التلاميذ الرياضي لموضوع الكسور.

خامسا: إجراء المقابلات مع التلاميذ موضع البحث:

تعتبر المقابلة أسلوبا لجمع البيانات بين القائم بإجراء المقابلة وبين الأشخاص الذين تجري مقابلتهم وتتضمن استجوابا شفهيا للمشاركين، سواء بشكل فردي أو كمجموعة (McMillan, 2008). هذه التقنية غالبا ما تكون المصدر الرئيسي لجمع البيانات في الأبحاث النوعية (Yin, 2009). استخدم البحث الحالي المقابلات شبة المقننة القائمة على المهام كأداة أساسية لجمع البيانات. المقابلات القائمة على المهام هي شكل معين من المقابلات التي يتحدث فيها التلميذ أو مجموعة من التلاميذ أثناء حل مهمة رياضية أو مجموعة من المهام، يشمل "الحديث" الذي يشارك فيه التلاميذ عادة التفكير بصوت عال أثناء مشاركتهم في إكمال المهام أو الرد على اسئلة الباحث(Maher & Sigley, 2014) . يؤكد (Maher & Sigley, 2014) أن المقابلات القائمة على المهام تستخدم لوصف استراتيجيات المتعلمين، أو بنيتهم المعرفية، أو مهاراتهم، وذلك للنظر في فعالية التدريس، أو لفهم عمليات نمو الفهم بشكل أفضل، أو لبحث تطور المعارف الرياضية لدى المتعلمين أو لاستكشاف سلوك حل المشكلات. وقد استخدمت المقابلات شبة المقننة القائمة على المهام في عدد من بحوث تعليم الرياضيات مثل (Gokalp, 2012; Gulkilik et al., 2015; Martin & Towers, 2015) .

قامت الباحثة بتقسيم التلاميذ الستة موضع البحث إلى ٣ أزواج متعاونة: (متوسط – ضعيف)، (متفوق – متوسط)، (متوسط – متوسط). تم مقابلة كل زوج على حدى خارج الفصل كل اسبوع بعد تدريس كل موضوع من موضوعات وحدة الكسور باستخدام استراتيجية الحديث الرياضي. أثناء المقابلات، أعطى كل زوج ورقة نشاط واحدة، وطلب منهم التعاون في حل المشكلات، والتعبير عن أفكارهم بصوت عال، ومساعدة بعضهم البعض في

فهم ما يقومون به. تم إخبار التلاميذ بأن إجاباتهم لن يتم الحكم عليها بأنها صحيحة أو غير صحيحة وأن الإجابات لن تؤثر على درجات المقرر الدراسي. وتم اخبارهم أيضا بأنه لا توجد مدة محددة للإجابة على كل سؤال. لذلك، أجابوا على كل أسئلة المقابلة بحرية بدون توتر. تم طرح أسئلة المتابعة Follow–up questions وفقا لإجابات التلاميذ مثل: "هل يمكنك شرح ذلك بالتفصيل؟" ، "لماذا فكرت بهذا الشكل؟" ، "هل يمكنك إعطاء مثال آخر على هذا الموقف؟" ، "كيف توصلت إلى هذه الفكرة؟ ". كان الغرض من أسئلة المتابعة هو فحص إجابات التلاميذ على الأسئلة لمعرفة سبب إجابتهم. قد تمت المقابلات في مكتبة المدرسة أثناء حصص المجال الصناعي. تم إجراء ٦ مقابلات مع كل زوج من التلاميذ، كما تم تسجيل كل المقابلات صوتيا. تم نسخ التسجيل الصوتي للمقابلات كلمة بكلمة، وتحليلها باستخدام نموذج بيري وكيرين وباستخدام سلوكيات الحديث الرياضي.

سادسا: تدوين المسودات الميدانية:

تعد المسودات الميدانية ضرورية عند إجراء البحوث النوعية، وهي عبارة عن سجل يسجل فيها الباحث كل ما لاحظه من خلال الاستماع والمراقبة والتفسير أثناء عملية جمع البيانات (Yin, 2009) . تتضمن المسودات الميدانية تفسيرات الباحث وتأملاته حول ما لاحظه (لماذا يعتقد أن الأشياء كانت بالطريقة التي ظهرت بها)، وأفكاره، وانطباعاته بهدف بناء الفهم (McMillan, 2008). في البحث الحالي، تم استخدام المذكرات الميدانية لدعم البيانات التي تم جمعها من المقابلات. قامت الباحثة بتدوين ملاحظات تأملية مباشرة عقب كل حصة وكذلك عقب كل مقابلة مع التلاميذ. اشتملت المذكرات الميدانية على ملاحظات الباحثة حول مشاركة التلاميذ المشاركين وفهمهم وافكارهم، وكذلك أفكار الباحثة وانطباعاتها وتأملاتها وتفسيرها لما لاحظته.

سابعا: فحص أوراق نشاط التلاميذ

أثناء المقابلات تم إعطاء كل زوج من التلاميذ ورقة نشاط تتضمن مهام الكسور وطلب منهم التعاون في حل المهام. تم جمع أوراق النشاط في نهاية كل مقابلة وفحصها من أجل تحليل مستوى فهم ازواج التلاميذ للكسور.

الصدق الداخلي: Internal validity

وفقا لـ (Creswell, 2014)، "يعني الصدق في البحوث النوعية أن الباحث يتحقق من دقة النتائج باستخدام إجراءات معينة" (ص ٢٠١). يعتمد الصدق على تحديد ما إذا كانت النتائج التي توصل إليها الباحث تعتبر صحيحة من قبل المشاركين، والباحث، والقارئ. بمعنى آخر، يتعلق الصدق بمسألة كيفية تطابق نتائج الدراسة مع الواقع (Creswell, 2014).

في البحث الحالي،تم القيام بما يلي لضمان صدق النتائج(Creswell,2014) :

- تم جمع البيانات بطرق متعددة. تم جمع البيانات من خلال المقابلات مع التلاميذ موضع البحث، وأوراق نشاط التلاميذ، والملاحظة، والمسودات الميدانية.
- تم عرض ومناقشة تفسيرات واستنتاجات الباحثة مع التلاميذ موضع البحث من خلال استخدام مجموعة نقاش مركزة من التلاميذ الستة وذلك أثناء قيام الباحثة بالتحليل لإتاحة الفرصة للتلاميذ بتوضيح قصدهم والتحقق من صحة تفكير الباحثة وتقديم معلومات إضافية إذا لزم الأمر.

الصدق الخارجي: External validity

يتعلق الصدق الخارجي بتعميم نتائج البحث (Merriam, 1998). لضمان الصدق الخارجي، قامت الباحثة بتقديم وصف تفصيلي لإجراءات البحث والنتائج ليتمكن القارئ من تقييم قابلية تطبيق النتائج ويحدد ما إذا كانت تتناسب مع وضعه وحالته.

الثبات: Reliability

يشير الثبات في البحوث النوعية إلى "مدى إمكانية تكرار النتائج (Yin, 2009). بمعنى آخر، إذا اتبع باحث لاحق نفس الإجراءات كما وصفها باحث سابق وأجرى نفس دراسة الحالة مرة أخرى، فيجب أن يتوصل الباحث اللاحق إلى نفس النتائج والاستنتاجات (Yin, 2009) . مع الأخذ في الاعتبار أن الباحثين النوعيين، بشكل عام، لا ينظرون إلى السلوك البشري باعتباره ثابتا، ولا يعملون على فكرة أنه لا يوجد سوى حقيقة واحدة يمكن تكرارها، إلا أنه من المستحسن أن يتخذ الباحثون النوعيون خطوات نحو زيادة ثبات عملهم (Merriam, 1998). لتحقيق ذلك، يوصي (Yin, 2009) الباحثين بتوثيق أكبر عدد ممكن من الخطوات الإجرائية التي اتبعوها في دراستهم للحالة وذلك من خلال استخدام بروتوكول لدراسة الحالة والاحتفاظ بقاعدة بيانات لدراسة الحالة.

في البحث الحالي، تم القيام بما يلي لضمان صدق النتائج (Yin, 2009) :

- تم إنشاء بروتوكول لدراسة الحالة هدف إلى تحديد الإجراءات الميدانية التفصيلية لإجراء البحث (ملحق ٥). تضمن البروتوكول: هدف البحث، أسئلة البحث، خطوات البحث واجراءاته، كيفية اختيار عينة البحث، أدوات وخطوات جمع البيانات.
- تم الاحتفاظ بقاعدة بيانات لدراسة الحالة شملت المقابلات المكتوبة. تعمل قاعدة بيانات دراسة الحالة كمصدر إثبات للأشخاص الذين يرغبون تكرار هذا البحث.

تحليل البيانات:

مر تحليل البيانات بالخطوات التالية:

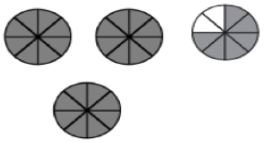
- تحديد سلوكيات التلاميذ المتوقعة لكل درس من دروس الكسور وذلك لكل مستوى من مستويات الفهم بما يتوافق مع نظرية بيري وكيرين للفهم (ملحق ٦). تم استنتاج هذه السلوكيات وتعديلها من بعض دراسات بيري وكيرين حول الكسور (Pirie & Kieren, 1994; Pirie & Kieren, 1992; Pirie & Martin, 2000)، وبعض الدراسات التي طبقت نموذج بيري وكيرين كاطار نظري لدراستهم مثل (Gulkilik et al., 2015; Duzenli-Gokalp & Sharma, 2010; Martin & Towers, 2015).
- نسخ تسجيلات المقابلات حيث تم كتابة الحديث الذي دار بين ازواج التلاميذ كلمة بكلمة (ملحق ٧).
- قراءة المقابلات المكتوبة عدة مرات بهدف البحث عن كلمات وجمل تتكرر في أقوال التلاميذ بشكل مستمر وتدل على حدوث أحد مستويات الفهم أو تدل على حدوث أحد سلوكيات الحديث الرياضي.
- استخدام الترميز Codes لسلوكيات التلاميذ المرتبطة بموضوع الكسور وفقا لمستويات الفهم لنموذج بيري وكيرين وأيضا وفقا لسلوكيات الحديث الرياضي (Hufferd-Ackles et al., 2004) (ملحق ٧). على سبيل المثال، في الدرس الأول، في مجموعة محمد وتسنيم، عندما عبر محمد عن الجزء الرمادي من الشكل على أنه نصف، تم تطوير الترميز (معرفة بدائية). وعندما استفسرت تسنيم "كيف عرفت؟"، تم تطوير الترميز (الاستفسار عن أفكار الآخرين). وعندما وضح محمد لتسنيم كيف عرف أن الجزء الرمادي عبارة عن نصف، تم تطوير الترميز (شرح وتفسير التفكير).
- تم قراءة الترميزات عدة مرات حتى تم التوصل إلى أنماط Patterns توضح العلاقة بين مستويات النمو لموضوع الكسور وسلوكيات الحديث الرياضي. على سبيل المثال، في المثال السابق لمحمد وتسنيم، تم تطوير النمط (الاستفسار أدى إلى شرح وتفسير التلميذ لتفكيره).
- تم تجميع الأنماط المتشابهة والمتقاربة بين أزواج التلاميذ في موضوعات رئيسة Themes. وبذلك تم تطوير أربعة موضوعات رئيسة: الاستفسار، شرح وتفسير التفكير، التبرير، تحمل المسئولية.
- تم استخدام مصادر البيانات الأخرى مثل المذكرات الميدانية والملاحظات الصفية للتحقق من صحة البيانات التي تم جمعها من خلال أداة المقابلة.

نتائج الدراسة وتفسيرها:

ساعد الحديث الرياضي بين التلاميذ على الانتقال من مستوى المعرفة البدائية إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي في موضوع الكسور. كذلك استطاع التلميذ ذو التحصيل الأكاديمي المنخفض الوصول إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي وفقا لنموذج بيري وكيرين. كشفت نتائج البحث عن أربعة سلوكيات أساسية للحديث الرياضي والتي كان لها دورا في نمو فهم التلاميذ الرياضي لموضوع الكسور كما أوضحه التحليل باستخدام نموذج بيري وكيرين. هذه السلوكيات هي: الاستفسار، شرح وتفسير التفكير، تبرير التفكير، تحمل المسئولية.

الاستفسار:

ساعد استفسار التلاميذ عن أفكار بعضهم البعض أثناء حلهم لأنشطة الكسور على نمو فهم التلاميذ لموضوع الكسور من مستوى المعرفة البدائية إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي. تتفق هذه النتيجة مع دراسة (Warner & Schorr, 2004) التي وجدت أن الأسئلة من تلميذ إلى تلميذ لعبت دورا رئيسيا في نمو الفهم الرياضي من المعرفة البدائية إلى إضفاء الطابع الرسمي لدى التلاميذ موضع الدراسة. تفسر الباحثة الأثر الايجابي للاستفسار على نمو الفهم الرياضي لدى التلاميذ بأن استفسار التلاميذ عن تفكير بعضهم البعض ساعد على تبرير التلاميذ لتفكيرهم ومن ثم الوصول إلى مستوى ملاحظة الصفات. على سبيل المثال، في درس العدد الكسري، عند إعطاء مجموعة محمد (متوسط) وتسنيم (متوسط) مهمة تتطلب التعبير عن الجزء الملون من الشكل، دار بينهما الحديث التالي:



محمد: الجزء الملون $\frac{٦}{٨}$ ٣ (امتلاك الصورة).

تسنيم: كيف عرفت؟ (الاستفسار عن أفكار الآخرين)

محمد: لان هناك ٣ كعكات صحيحة والكعكة الرابعة ملون فيها ٦ أجزاء من ٨ أجزاء، يعني $\frac{٦}{٨}$ (ملاحظة الصفات) (تبرير)

تسنيم: وممكن أيضا $\frac{٣}{٤}$ ٣ (امتلاك الصورة).

محمد: كيف حصلت على $\frac{٣}{٤}$؟ (الاستفسار عن أفكار الآخرين)

تسنيم: $\frac{٦}{٨}$ هي في نفس الوقت $\frac{٣}{٤}$. (ملاحظة الصفات)

تسنيم: كأنك مقسم الكعكة إلى ٤ أجزاء متساوية، الجزء الواحد عبارة عن ربع، وهناك ٣ أجزاء، كل منها عبارة عن ربع (تبرير) (ملاحظة الصفات)

في المثال السابق، بدأ محمد وتسنيم بمستوى امتلاك الصورة (خاصية لا حاجة إلى وجود حدود) فهما يعرفان كيفية تحديد العدد الكسري في الشكل المعطى. استفسار تسنيم ومحمد عن تفكير بعضهم البعض شجع كل منهما على تبرير تفكيره مما ساعدهما على فحص الصور العقلية التي قاما ببنائها وتوصلا إلى خصائص محددة للكسر الذي مثله (ملاحظة الصفات). كذلك شرح محمد وتسنيم لحلهما ساعد كل منهما على التعرف على أفكار جديدة وطرق تفكير مختلفة.

كذلك استفسار التلاميذ عن تفكير بعضهم البعض ساعد على معرفة ما يعرفه التلاميذ وكيف يفكرون في المفاهيم الرياضية مما ساعد على الكشف عن المفاهيم الخاطئة لديهم ومن ثم تعديلها. على سبيل المثال، في درس معنى الكسر، عند إعطاء مجموعة عبد الرحمن (متوسط) وخالد (ضعيف) مهمة تتطلب التعبير عن الجزء الملون من الشكل

دار الحديث التالي بينهما:

خالد: الجزء الأبيض ربع

عبد الرحمن: كيف عرفت؟ (الاستفسار عن أفكار الاخرين)

خالد: واضح من الرسم أن الجزء الابيض ربع لأنه صغير (معرفة بدائية) ممكن نقسم الشكل ربع، ربع، ربع، ربع، ربع، ربع، ربع، ربع (تكوين الصورة)

عبد الرحمن: يعني أنت قصدك كل جزء في الشكل عبارة عن ربع؟ (الاستفسار عن أفكار الاخرين)

خالد: ايوة. كل جزء ربع... لأنه صغير. (تكوين الصورة) (الكشف عن المفاهيم الخاطئة)

عبد الرحمن: لا مش مضبوط! الكسر عبارة عن رقمين، رقم في البسط وهو عبارة عن عدد الاجزاء الملونة، ورقم في المقام عبارة عن عدد كل الأجزاء. (إضفاء الطابع الرسمي) (نقد الفكرة المطروحة)

خالد: آه.. يعني الجزء الأسود عبارة عن $\frac{٨}{٣}$ *(تكوين الصورة)*

عبد الرحمن: لا! نكتب فوق (يقصد البسط) عدد الأجزاء الملونة يعني ٣، ونكتب تحت (يقصد المقام) عدد الأجزاء كلها يعني ٨، فتكون $\frac{٣}{٨}$ (شرح وتوضيح التفكير) (إضفاء الطابع الرسمي)

خالد: آه... طيب .. الجزء الرمادي $\frac{٤}{٨}$ (امتلاك الصورة) (البناء على أفكار الاخرين)

(تعديل التفكير) لان عدد الأجزاء الرمادي ٤، وعدد كل الأجزاء ٨ (تبرير التفكير) (ملاحظة الصفات)

عندما عبر خالد عن الجزء المظلل من الشكل على أنه ربع، سأل عبد الرحمن خالد كيف توصل إلى هذا الحل، وهنا اتضح مفاهيم خالد الخاطئة عن الكسور، فقد تصور خالد أن أي جزء صغير من كل هو عبارة عن ربع بغض النظر عن عدد الأجزاء المقسم إليها هذا الكل. تتفق هذه النتيجة مع ما أكده (Hufferd-Ackles et al., 2004; Warner & Schorr, 2004) أنه عندما يحظى التلاميذ بفرصة للاستفسار عن أفكار رفاقهم الرياضية، يكون لكل من يطرح الأسئلة ومن عليه تقديم الإجابة الفرصة لتجاوز المفاهيم الأولية حول الأفكار الرياضية المطروحة، فبينما يفكر التلاميذ في تفكيرهم ردا على الأسئلة التي يطرحها أقرانهم، فإن لديهم الفرصة لمراجعة وتنقيح وتوسيع طرق تفكيرهم. أثناء قيامهم بذلك، تصبح تصوراتهم وتمثيلاتهم السابقة أكثر دقة وربطا.

شرح وتفسير التفكير:

ساعد شرح التلاميذ وتفسيرهم لتفكيرهم الرياضي على نمو فهمهم الرياضي لموضوع الكسور والوصول إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي. أوضح (Warner, 2008) أن قدرة التلاميذ على شرح وتفسير أفكارهم هو معيار للفهم. تفسر الباحثة الأثر الايجابي لشرح وتفسير التلاميذ لتفكيرهم على نمو الفهم الرياضي لديهم بأن شرح التلاميذ لأفكارهم للآخرين شجع التلاميذ أنفسهم على التفكير في حلولهم واعادة النظر في أفكارهم ومن ثم إدراك المفاهيم الخاطئة لديهم أو عدم اكتمال أفكارهم مما أدى زيادة فهمهم الرياضي. على سبيل المثال، في درس معنى الكسر عند إعطاء مجموعة تسنيم (متوسط) ومحمد (متوسط) مهمة تتطلب التعبير عن الجزء الملون من الشكل

دار الحديث التالي بينهما:

محمد: الجزء الرمادي $\frac{1}{2}$ (معرفة بدائية)

تسنيم: كيف عرفت؟ (الاستفسار عن أفكار الاخرين)

محمد: كما لو كان الشكل يتكون من قطعتين متساويتين أحدهما لونها رمادي، يبقى الجزء الرمادي نصف. (شرح وتوضيح التفكير)

تسنيم: الجزء الأبيض $\frac{1}{2}$

محمد: لية؟! (الاستفسار عن أفكار الاخرين)

تسنيم: الشكل هنا مقسم إلى ثلاثة أجزاء والجزء الأبيض واحد منها، يبقى الجزء الأبيض ثلث. (تكوين الصورة)

محمد وتسنيم: صمت مع التحديق في الرسم.

تسنيم: ... لا لا...لا مش مضبوط! علشان نعبر عن الكسر لازم تكون كل الأجزاء متساوية. (المعرفة البدائية) (تعديل التفكير)

تسنيم: خلينا نقسم الشكل (تكوين الصورة)

شرح تسنيم لأفكارها لمحمد شجعها على التفكير في حلولها واعادة النظر في أفكارها ومن ثم إدراك المفاهيم الخاطئة لديها. فنجد تسنيم تقول: " الشكل هنا مقسم إلى ثلاثة أجزاء والجزء الأبيض واحد منها، يبقى الجزء الأبيض ثلث"، ثم بعد ذلك تكتشف خطأ تفكيرها: "ا لا...لا مش مضبوط! علشان نعبر عن الكسر لازم تكون كل الأجزاء متساوية". تتفق هذه النتيجة مع ما أكده (Warner, 2008) أن قدرة التلاميذ على التعبير عن أفكارهم وشرحها للآخرين يمكن أن يشكل آلية مهمة يمكن من خلالها تعديل معانيهم الرياضية وبالتالي زيادة الفهم. ومن ناحية أخرى، شرح التلاميذ لأفكارهم للآخرين أدى إلى تعرف التلاميذ الآخرين على أفكار جديدة وطرق تفكير مختلفة. كان هذا واضحا في بعض الحالات التي كان فيها للتلاميذ طرق مختلفة لنفس النشاط التعليمي. على سبيل المثال، في درس مقارنة الكسور في مجموعة عمر وخلف، توصل كل منهما إلى طريقة مختلفة لمقارنة الكسور، وعند العمل مع الجزء الثاني من ورقة النشاط استخدم خلف طريقة عمر (المقص) للمقارنة بين الكسور.

شرح وتفسير التلاميذ لتفكيرهم لرفاقهم ساعد على وجه الخصوص التلميذ ذا المستوى الأكاديمي المنخفض (خالد) على الفهم والبناء على أفكار زميله والوصول إلى الحل. تتفق هذه النتيجة مع الدراسات السابقة (بني خالد، ٢٠١٦؛ سيف، ٢٠٠٤) التي توصلت إلى أن تعليم الاقران له أثر إيجابي على تنمية مهارات الرياضيات لدى التلاميذ ذوي صعوبات التعلم. كذلك قيام بعض التلاميذ بالطي العكسي إلى مستويات الفهم الأقل تقدما ساعد التلاميذ في شرح تفكيرهم وساعد التلاميذ الاخرين على فهم تفكير رفاقهم. على سبيل المثال، في درس مقارنة الكسور، عند إعطاء مجموعة عبد الرحمن (متوسط) وخالد (ضعيف) المهمة " أي من الكسور الاتية أكبر؟ ولماذا؟ (استخدم الرسومات لتوضيح تفكيرك)"، دار بينهما الحديث التالي:

عبد الرحمن: $\frac{٥}{٦}$ أكبر من $\frac{٥}{٨}$ (امتلاك الصورة) لأن كل ما المقام يصغر يكون الكسر أكبر.

(إضفاء الطابع الرسمي)

خالد: (يحدق في الورقة في صمت)

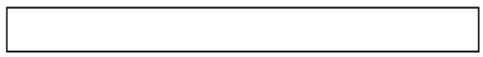
عبد الرحمن: خلينا نرسمها. هل تعرف ترسم $\frac{٥}{٦}$؟ (الطي العكسي لمستوى المعرفة البدائية)

خالد:

$\frac{٥}{٦}$

(تكوين الصورة)

عبد الرحمن: ارسم كمان $\frac{٥}{٨}$ بس تكون في نفس حجم الشكل السابق. (شرح وتوضيح)



خالد $\frac{٥}{٨}$ (تكوين الصورة)

عبد الرحمن: من الرسم مين متلون أكثر؟

خالد: الشكل الاول ... $\frac{٥}{٦}$ أكبر (امتلاك الصورة)

عبد الرحمن: يبقى لما يكون البسط متساوي، المقام الاصغر يكون الكسر أكبر.

الباحثة: خالد، هل تستطيع ان تحدد ايهما أكبر: $\frac{٤}{٧}$، $\frac{٤}{٥}$

خالد: $\frac{٤}{٥}$ أكبر (امتلاك الصورة) .... لأن ٥ اصغر من ٧ (ملاحظة الصفات)

بدأ عبد الرحمن بمستوى إضفاء الطابع الرسمي فهو يعرف جيدا طريقة عامة للمقارنة بين الكسور. لكن لمساعدة خالد، قام عبد الرحمن بالطي العكسي إلى مستوى المعرفة البدائية لمساعدة خالد على البناء على معرفته السابقة بالكسور وكيفية تمثيل الكسر. شرح وتوضيح عبد الرحمن ساعد خالد على إدراك أنه عند مقارنة الكسور يجب أن تكون الكسور من نفس الكل، ومن ثم بنى خالد على تفكير عبد الرحمن وتوصل إلى الكسر الأكبر (امتلاك الصورة)، كما تمكن من فحص الصور العقلية التي قام ببنائها والتوصل إلى طريقة للمقارنة بين الكسور (ملاحظة الصفات). من ناحية أخري، أثناء شرح وتفسير التلاميذ لتفكيرهم، كان من الواضح احترام وتقدير التلاميذ لتفكير بعضهم البعض. على سبيل المثال، في درس معنى الكسر (مجموعة خلف وعمر)، رغم أن خلف أكثر تفوقا في الرياضيات من عمر، إلا أنه عندما توصل عمر إلى طريقة للحل مختلفة عن طريقة عمر شجعه خلف قائلا "مضبوط كمل". هذا وفقا لـ (Martin & Towers, 2015) يظهر أن أفعال وأقوال المتعلمين تتداخل بشكل بناء لبناء فهم مجموعة من المتعلمين. وبالتالي فإن هذا يخلق بيئة تعليمية لا يتم فيها مشاركة الأفكار فحسب بل أيضا احترامها.

تبرير التفكير:

ساعد تبرير التلاميذ لتفكيرهم على نمو فهم التلاميذ لموضوع الكسور والوصول إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي. تتفق هذه النتيجة مع الدراسات السابقة (Staples, Bartlo, Thanheiser, 2012; Thanheiser et al., 2010) التي وجدت أن تبرير التلاميذ لتفكيرهم أدى إلى فهم أعمق للرياضيات. في البحث الحالي، عندما اختلف تفكير أحد التلميذين في المجموعة عن تفكير رفيقه كان لزاما على كل منهما تبرير طريقته في الحل لأقناع رفيقه بصلاحية تفكيره. كما أن أسئلة رفيق المجموعة مثل "كيف عرفت"، "انا لا افهم قصدك" شجعت التلاميذ على تبرير حلهم. تفسر الباحثة الأثر الايجابي لتبرير التلاميذ لتفكيرهم على نمو الفهم الرياضي لديهم بأن قيام التلاميذ بتبرير حلهم شجعهم على فحص الصور العقلية التي قاموا ببنائها والوصول إلى مستوى ملاحظة الصفات. كذلك محاولة التلاميذ لتبرير حلهم شجعهم على التعبير عن طريقتهم في الحل باستخدام المصطلحات الرياضية الرسمية حتى يتمكن رفاقهم من فهمهم مما ساعدهم على الوصول إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي. يتفق ذلك مع ما أكده (Staples, Bartlo, Thanheiser, 2012) أن تبرير التلاميذ لتفكيرهم يؤدي إلى فهم عميق للرياضيات لأنه يتطلب من التلاميذ أن يتصارعوا مع الأفكار الأساسية، ويعملوا علاقات، ويكتسبوا رؤى جديدة وذلك من خلال سماع شرح التلاميذ الآخرين أو من خلال توضيح تفكيرهم أثناء محاولتهم للتعبير عن أفكارهم. كذلك دفع التبرير التلاميذ إلى ما هو أبعد من تنفيذ الاجراءات إلى الفهم العميق، فمن أجل تبرير تفكيرهم، كان عليهم أن يبرروا ليس فقط "كيف" توصلوا إلى الحل، بل أيضا "لماذا" استخدموا هذه الطريقة في التفكير (Thanheiser et al., 2010).

رغم أن استماع التلاميذ لتبرير رفاقهم شجعهم على تعديل تفكيرهم والبناء على أفكار رفاقهم، إلا أنه في بعض الحالات قدم بعض التلاميذ تبرير خاطئ لفهم خاطئ وقام رفاقهم بالبناء على تفكيرهم الخاطئ. على سبيل المثال، في درس جمع الكسور، عند إعطاء مجموعة عبد الرحمن (متوسط) وخالد (ضعيف) مهمة تتطلب جمع كسرين، دار الحديث التالي بينهما:

عبد الرحمن: دي عملية جمع ... هنجمع $\frac{٥}{٦} + \frac{١١}{١٢}$ *(تكوين الصورة)*

خالد: صمت

عبد الرحمن: هل تتذكر كلام الأستاذ: "لما نجمع، نبحث عن مقام مشترك، ثم نضرب علشان نوجد البسط ثم نجمع البسوط". المقام هنا مختلف يعني احنا محتاجين مقام مشترك. (الطي العكسي إلى مستوى المعرفة البدائية) (شرح وتوضيح)

خالد: صمت

عبد الرحمن: هل ممكن نوحد المقام على ١٢؟ (استفسار)

خالد: ايوه لان ١٢ ضعف ٦ (ملاحظة الصفات)

عبد الرحمن: تمام. كمل.

خالد: $\frac{\quad}{١٢} + \frac{\quad}{١٢}$ (تكوين الصورة) (البناء على أفكار الاخرين) (يحدق في الورقة)

خالد: $\frac{٦٠}{١٢} + \frac{٦٦}{١٢}$ (تكوين الصورة)

عبد الرحمن: أذاي؟ (الاستفسار عن أفكار الأخرين)

خالد: وحدت المقام على ١٢، وكتبت في المقام ١٢، وضربت ٥×١٢=٦٠، ٦×١١=٦٦ (تبرير)

عبد الرحمن: طيب ماشي. $\frac{٦٠}{١٢} + \frac{٦٦}{١٢} = \frac{١٢٦}{١٢}$ (البناء على افكار الاخرين الخاطئة)

أثناء محاولاته لتكوين الصورة، قام خالد بمحاولة خاطئة لجمع الكسور وقدم له تبرير خاطئ الامر الذي أجازه عبد الرحمن وبنى عليه حله التالي. وهنا كان لابد من تدخل الباحثة لتصحيح المفاهيم الخاطئة ووضع الحديث في المسار الصحيح وذلك من خلال استخدام أسئلة ساعدت عبد الرحمن وخالد على الطي العكسي إلى مستوى المعرفة البدائية الخاصة بالكسور المتساوية، ومن ثم عدل عبد الرحمن وخالد تفكيرهما وتوصلا إلى جمع الكسرين.

مسئولية التعلم:

شجع الحديث الرياضي التلاميذ على تحمل مسئولية تعلمهم وتعلم رفاقهم. تتفق هذه النتيجة مع ما توصل إليه (Hufferd-Ackles et al., 2004) من أن الحديث الرياضي لا يؤدي فقط إلى تحمل التلاميذ مسؤولية تعلمهم ولكن أيضا مسئولية تعلم رفاقهم. ساعد تحمل التلاميذ لمسئولية تعلمهم وتعلم رفاقهم على نمو الفهم الرياضي لديهم. يتفق هذا مع ما أكده (Blumberg, 2009) أن توفير الفرصة للتلاميذ لتحمل مسئولية تعلمهم لا يؤثر فقط على مقدار ما يتعلمه التلاميذ في الفصل فحسب، بل يؤثر أيضا على مدى جودة تعلمهم. في البحث الحالي، مسئولية التلاميذ عن تعلمهم كانت واضحة في رغبتهم في طرح الأسئلة على رفاقهم من أجل تحقيق فهم أفضل، وفي حرصهم على الطي العكسي والعودة إلى طرق فهم أقل تطورا من أجل توسيع معرفتهم، وفي حرصهم على تبرير تفكيرهم لإثبات صلاحية تفكيرهم، وفي حرصهم على الاستماع إلى توضيحات وتبريرات رفاقهم للوصول إلى فهم أفضل. من ناحية أخرى، تحمل التلاميذ مسئولية تعلم رفاقهم من خلال حرصهم على فهم رفاقهم للمهمة المطروحة ومساعدتهم في التوصل للحل. فتارة نرى التلاميذ يساعدون رفاقهم على إعادة التفكير أو تعديل أفكارهم من خلال استخدام التمثيلات اللفظية. على سبيل المثال، في درس طرح الكسور، عند إعطاء مجموعة محمد (متوسط) وتسنيم (متوسط) مهمة تتطلب طرح الكسور، استخدمت تسنيم التمثيلات اللفظية لتساعد محمد على إدراك خطأه ومساعدته على المضي قدما في حل المشكلة:

محمد: نجمع $٣\frac{١}{٤}$، $٢\frac{٣}{٨}$ والناتج نطرحه من ١٠ (المعرفة البدائية)

تسنيم: $٣\frac{١}{٤}+ ٢\frac{٣}{٨}$ هنوحد المقام على ٨ لان ٨ ضعف ٤

$\frac{\quad}{٨}+\frac{\quad}{٨}$ (تكوين الصورة)

محمد: $\frac{٢}{٨}+\frac{٣}{٨}=٥\frac{٥}{٨}$ (امتلاك الصورة)

تسنيم: وبعدين عايزين نطرح ١٠– $٥\frac{٥}{٨}$

محمد: ١٠– $٥\frac{٥}{٨}=٥\frac{٥}{٨}$ (تكوين الصورة)

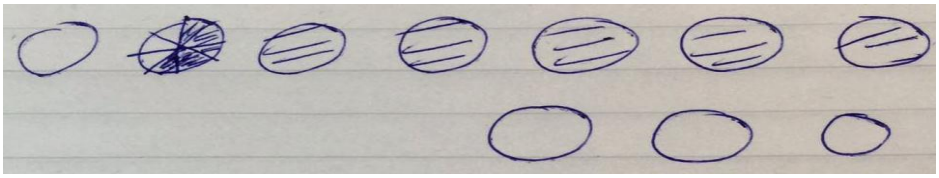
تسنيم: عملت ايه؟ (الاستفسار عن أفكار الآخرين)

محمد: طرحت الاعداد الصحيحة مع بعض ١٠–٥=٥ ونزلت الكسر ذي ما هو. (توضيح التفكير)

تسنيم: اذاي! معي ١٠ جنية صرفت منها $٥\frac{٥}{٨}$ يبقى الباقي نفس المبلغ $٥\frac{٥}{٨}$! كأني لم اصرف أي شيء! هل ينفع أن يكون معي ٢ بيتزا أكلت منها $١\frac{١}{٢}$ فيبقى الباقي منها $١\frac{١}{٢}$ بردوا! (نقد أفكار الآخرين)

محمد: طيب ممكن نرسمها. نرسم ١٠ دوائر ونحذف منها $٥\frac{٥}{٨}$ *(تكوين الصورة)*

محمد مع تسنيم: (تكوين الصورة) (البناء على أفكار الآخرين)



محمد: الباقي $٤\frac{٣}{٨}$ *(امتلاك الصورة)*

وتارة أخرى نجد التلاميذ يتصرفون كمعلمين يشرحون ويوضحون عندما لا يفهم رفاقهم. تجلى ذلك في درس الكسور المتساوية، عند إعطاء مجموعة عبد الرحمن (متوسط) وخالد (ضعيف) المهمة "أوجد كسور مساوية للكسر $\frac{١}{٣}$ "، ، دار بينهما الحديث التالي:

خالد: يعني ايه المطلوب؟! (طلب توضيح)

عبد الرحمن: عايزين نوجد كسور مساوية للكسر ثلث.

خالد: يعني أيه كسور متساوية؟ (طلب توضيح)

عبد الرحمن: يعني كسور لها نفس المقدار، يعني مثلا $\frac{١}{٢}$، $\frac{٢}{٤}$ كسور متساوية ... لها نفس الكمية (إضفاء الطابع الرسمي) (شرح وتوضيح)

عبد الرحمن:

عبد الرحمن: هل تعرف تكتب الكسر هنا (يقصد الشكل الأول)، والكسر هنا (يقصد الشكل الثاني) (الطي العكسي إلى مستوى المعرفة البدائية)

خالد: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤}$ (تكوين الصورة)

عبد الرحمن: من الرسم مين فيهم أكبر؟.... مين فيهم متلون أكثر؟ (شرح وتوضيح)

خالد: متساويين. (تكوين الصورة)

عبد الرحمن: دول اسمهم كسور متساوية.... متلونين بنفس المقدار (شرح وتوضيح)

عبد الرحمن: ممكن نحصل على الكسور المتساوية بضرب البسط والمقام في نفس الرقم، يعني مثلا $\frac{١\times٢}{٣\times٢} = \frac{٢}{٦}$ (إضفاء الطابع الرسمي) (شرح وتوضيح التفكير)

خالد: يعني ممكن نضرب في ٣؟ (تكوين الصورة) (البناء على أفكار الاخرين)

عبد الرحمن: ايوة. ممكن نضرب في أي رقم، بس لازم نضرب فوق وتحت في نفس الرقم. (إضفاء الطابع الرسمي) (شرح وتوضيح التفكير)

خالد: $\frac{١\times٣}{٣\times٣} = \frac{٣}{٩}$ (امتلاك الصورة) (البناء على أفكار الاخرين)

في المثال السابق، تحمل عبد الرحمن مسئولية تدريس خالد كيفية ايجاد الكسور خطوة بخطوة. وبالتالي، فإن التلاميذ لم يهتمون فقط بنمو فهمهم ولكن أيضا بنمو فهم رفاقهم أيضا.

توصيات البحث:

في ضوء النتائج التي توصل إليها البحث، توصي الباحثة بما يلي:

- تطوير مقررات الرياضيات من خلال تنظيمها في ضوء مراحل نمو الفهم الرياضي وفقا لنموذج بيري وكيرين.
- إتاحة الفرص أمام التلاميذ للمشاركة في الحديث الرياضي مع أقرانهم ومعلميهم.
- تشجيع معلمي الرياضيات على إتاحة الفرصة لتلاميذهم لطرح الأسئلة على بعضهم البعض لما له من دور في نمو الفهم الرياضي لدى التلاميذ.
- خلق بيئة تعليمية تحفز التلاميذ على شرح وتفسير تفكيرهم والذي من شأنه تسهيل نمو فهم التلاميذ الرياضي.
- تضمين التبرير في فصول الرياضيات.
- تدريس تحمل المسئولية ودمجها في المناهج التعليمية منذ وقت مبكر من أجل تحقيق تعليم وتعلم فعال.

البحوث المقترحة:

في ضوء النتائج التي توصل إليها البحث، تقترح الباحثة إجراء البحوث التالية:

- دراسة أثر استراتيجية الحديث الرياضي على متغيرات آخري مثل التفكير الإبداعي، والتفكير الناقد، ومهارات التفكير الاستراتيجي.
- دراسة دور الطي العكسي في تعليم وتعلم الرياضيات.
- دراسة الممارسات التدريسية لمعلم الرياضيات التي من شأنها تشجع التلاميذ على تبرير تفكيرهم في فصول الرياضيات،
- تصميم وحدات رياضية في ضوء مراحل نمو الفهم وفقا لنموذج بيري وكيرين لصفوف ومراحل متنوعة ودراسة أثرها على تنمية البراعة الرياضية.
- تحليل فهم التلاميذ الرياضي لموضوعات رياضية أخرى باستخدام نموذج بيري وكيرين.

المراجع:

أولا المراجع العربية:

أبو عره، رجاء لطفي أحمد، (٢٠١٤). *مراحل نمو الفهم الهندسي في موضوع المثلثات باستخدام الجيوجبرا لدى طلاب الصف الثامن الأساسي (دراسة نوعية).* رسالة ماجستير. جامعة النجاح الوطنية في نابلس، فلسطين.

بشاي، زكريا جابر حناوي (٢٠١٦). أثر استخدام استراتيجية محادثات الأعداد في تدريس وحدة مقترحة في الحساب الذهني على تنمية مهارات الطلاقة الحسابية لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية. *مجلة تربويات الرياضيات، ١٩* (١٣)، ٢٢٢-٢٦٢.

بني خالد، حمزة عايد (٢٠١٦). فاعلية برنامج معتمد على تعليم الأقران في تنمية مهارات الرياضيات لدى عينة ذوي صعوبات التعلم. *مجلة المعهد الدولي للدراسة والبحث*، ٢ (٢)، (١-١٧).

حسين، عبد الله أحمد (٢٠١٤). فاعلية استخدام الألعاب التعليمية في تعليم حل المسائل الحسابية الكلامية المرتبطة بالأشكال الهندسية والكسور لطالبات الصف الرابع من ذوات صعوبات تعلم الحساب. *مجلة البحث العلمي في التربية*، ٣(١٥)، ٦٤١-٦٥٤.

الحواس، محمد أحمد (٢٠١٦). أثر استخدام الوسائل التعليمية في تدريس الكسور والعمليات عليها على تحصيل طلاب الصف الخامس في محافظة القريات في الرياضيات وعلى اتجاهاتهم نحوها. *المجلة التربوية الدولية المتخصصة*، ٥(٣)، ٤٤٧-٤٦٧.

الرويلي، ماجد ونيس رغيان والشياب، معاز (٢٠١٧). *أثر استراتيجية النماذج في تنمية الفهم المفاهيمي للكسور المتكافئة لطلبة الصف الرابع الابتدائي في محافظة طريف*. رسالة ماجستير، جامعة اليرموك.

الزهراني، عبد العزيز بن عثمان معيض (٢٠١٨). فعالية برنامج تعليمي قائم على الوسائل المتعددة في علاج صعوبات العمليات على الكسور لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية. *دراسات تربوية ونفسية*، جامعة الزقازيق – كلية التربية، ١٠٠، ١-٤٥.

سيف، خيرية رمضان (٢٠٠٤). فعالية استراتيجية تدريس الأقران في تنمية مهارات الطرح والاتجاه نحو الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية لدولة الكويت، *المجلة التربوية- جامعة الكويت، ١٨* (٧٢)، ١١-٤٠.

شلش، لميس باسم محمد (٢٠١٨). أثر استخدام أنشطة إلكترونية تفاعلية في تعديل المفاهيم البديلة في موضوع الكسور العادية لدى طلبة الصف الخامس الأساسي. *مجلة دراسات العلوم التربوية*، ٤٥ (٣)، ٢٨٧-٣٠٠.

عطيفي، زينب محمود محمد كامل (٢٠٠٨). أثر استخدام التعلم التعاوني كأحد استراتيجيات التعلم النشط في تدريس وحدة الكسور لتلاميذ المرحلة الابتدائية على التحصيل والتفكير الابتكاري. *مجلة كلية التربية، جامعة أسيوط*، ٢٤(١)، ٤٢٩-٤٦٥.

علي، طلعت أحمد حسن (٢٠٠٤). فعالية برنامج لعلاج بعض صعوبات تعلم الكسور في الرياضيات لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي في ضوء أسلوبي المعالجة المعرفية المتتابع والمتزامن. *مجلة كلية التربية*، ٢٠ (٢)، ١٦٣-١٩٠.

الغزو، إيمان محمد (٢٠٠٥). فاعلية استخدام اليدويات في رفع تحصيل تلاميذ الصف الخامس من الناحيتين الإجرائية والمفاهيمية في موضوع الكسور بمادة الرياضيات. *دراسات في المناهج وطرق التدريس*، ١٠٦، ٤٤-٦٩.

مقدادي، ربي محمد فخري وملكاوي، آمال رضا حسن والزعبي، علي محمد علي (٢٠١٣). المعرفة المفاهيمية والمعرفة الإجرائية المتعلقة بالكسور وعلاقتهما بقلق الرياضيات لدى الطلبة/المعلمين. *دراسات العلوم التربوية*، ٤٠(٢)، ١٥٥٥-١٥٧٠.

ثانيا المراجع الأجنبية:

Barnes, D. (2008). Exploring talk for learning. In N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.), *Exploring talk in school* (pp. 1-15). Thousand Oaks, CA: Sage.

Bertolone-Smith, C. (2016). *A fourth-grade teaching experiment on fraction magnitude: Investigating student reasoning through mathematical discourse and design research*. Dissertation. University of Nevada, Reno.

Blumberg, P. (2009). *Developing learner-centered teaching: A practical guide for faculty.* Jossey-Bass Inc Pub.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*, 247-253.

Bruce, C., Chang, D., Flynn, T., & Yearley, S. (2013). *Foundations to learning and teaching fractions: Addition and subtraction*. Trent University Shelley Yearley, Trillium Lakelands DSB.

Chapin, S., O'Connor, C. & Anderson, N. (2009). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn.* USA: Math Solutions.

Creswell, J. W. (2014). *Research design qualitative, quantitative and mixed methods approaches* (4th ed.). Thousand Oaks, CA Sage.

Durfee A, M. (2018). *An exploratory case study of how high-performance team training develops sociomathematical norms and differing levels of math-talk.* Dissertation. Utah State University.

Duzenli-Gokalp, N., & Sharma, M. D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 5168-5171.

Foss, A. (2013). *Exploring the effects of implementing focus math talk practices in a fourth-grade classroom*. Thesis. Hamline University.

Frank, J. (2013). *The effects of using math talks to improve instruction in a kindergarten classroom*. Thesis. St. Catherine University.

Gokalp, N. (2012*). A study of sixth grade students' understanding of multiplication of fractions using Pirie and Kieren model*. Theses. Middle East Technical University.

Gulkilik, H., Ugurlu, H., & Yuruk, N. (2015). Examining students' mathematical understanding of geometric transformations using the Pirie-Kieren model. *Educational Sciences: Theory & Practice, 15*(6), 1531-1548.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. B. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. In E. A. Silver & P. A. Kenney (Eds.), *Lessons learned from research.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Maher, C.A. & Sigley, R. (2014) Task-based interviews in mathematics

Education. In S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 579-582). Dordrecht The Netherlands: Springer.

Martin, L. C. (2001). Growing mathematical understanding: Teaching and learning as listening and sharing. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter, *Proceedings of the Annual Meeting of the North American*. Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Martin, L. C., & Towers, J. (2015). Growing mathematical understanding through collective image making, collective image having, and collective property noticing. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 3-18.

McMillan, J. (2008). *Educational research: Fundamentals for the consumer* (5th ed.). Boston: Pearson.

Merriam, S. (1998). *Qualitative research and case study applications in education: Revised and expanded from case study research in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publication.

Mills, J. (2011). Body fractions: A physical approach to fraction learning. *Australian Primary Mathematics Classroom, 16*(2), 17-22.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

Okamoto, Y. (2015). *The implementation process and impact of a six-week*

number talk intervention with sixth grade middle school students in a large urban middle school. Dissertation. University of California.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Payan, E. (2017). *The impact of math talks on student achievement in kindergarten.* Theses. Hamline University

Pirie, S. & Kieren, T. (1992). Watching Sandy's understanding grow. *Journal of Mathematical Behavior,* 11, 243-257.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Beyond metaphor: Formalizing in mathematical understanding within constructivist environment. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 39-43.

Pirie, S. & Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 127-146.

Resnick, L., Asterhan, C., & Clarke, S. (2018). *Accountable talk: Instructional dialogue that builds the mind*. The International Academy of Education (IAE) and the International Bureau of Education (IBE) of the United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO).

Sengul, S. & Argat, A. (2015). The analysis of understanding factorial concept processes of 7^{th} grade students who have low academic achievements with Pirie Kieren theory. *7th World Conference on Educational Sciences*, (WCES-2015), 05-07 February 2015, Novotel Athens Convention Center, Athens, Greece.

Siegler, R.S., Fazio, L.K., Bailey, D.H. and Zhou, X. (2013) Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences, 17* (1), 13-19.

Staples, M., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 447- 462.

Thanheiser, E., Staples. M., Bartlo, J., Sitomer, A., & Heim, K. (2010). Justification in middle school classrooms: How do middle school teachers define justification and its role in the classroom? *Proceedings of the thirty-second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5-13

Warner, L. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematical Behavior, 27*(3), 206-227.

Warner, L. & Schorr, R. (2004). From primitive knowing to formalising: The role of student-to- student questioning in the development of mathematical understanding. In D. McDougall & J.A. Ross (Eds.) *Proceedings of theTwenty-Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Building Connections Between Communities* (pp. 429-437), Toronto, Ontario.

Washington, E. (2015). *The impact of the number talks strategy on student performance and attitudes of teachers and administrators in grades 3-8*. Dissertation. Dallas Baptist University.

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods* (4st ed.). Los Angeles: Sage.