المدخل التبايني في التحليل الرياضي كطريقة حديثة لتسوية معدلات الوفاة

إعداد

د./ محمد عبد اللطيف زايد
أستاذ مساعد بقسم الأساليب الكمية
كلية إدارة الأعمال بجامعة الملك فيصل
مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة - جامعة المنصورة
m.a.zayed@mans.edu.eg

د./ السيد الشربيني الأشقر
أستاذ مساعد بقسم العلوم الإدارية
كلية المجتمع بجامعة الملك سعود
مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة - جامعة المنصورة
sayed_alashkar@mans.edu.eg

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية

كلية التجارة – جامعة دمياط

المجلد الأول- العدد الثانى - الجزء الثانى - يوليو ٢٠٢٠

التوثيق المقترح وفقا لنظام APA:

زايد، محمد عبد اللطيف؛ الأشقر، السيد الشربيني (٢٠٢٠). المدخل التبايني في التحليل الرياضي كطريقة حديثة لتسوية معدلات الوفاة. المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية، كلية التجارة، جامعة دمياط، ١(٢) ج٢، ٥٤٩ - ٥٧٢.

رابط المجلة: https://cfdj.journals.ekb.eg/

المدخل التبايني في التحليل الرياضي كطريقة حديثة لتسوية معدلات الوفاة

د./ محمد عبد اللطيف زايد　　　د./ السيد الشربيني الأشقر

الملخص:

تعتبر عملية تمهيد معدلات الوفاة بعد حسابها خطوة أساسية عند إعداد جداول الحياة. وتهدف هذه الدراسة إلى تقديم إحدى الطرق الحديثة لتسوية معدلات الوفاة والتي تعتمد على المدخل التبايني في التحليل الرياضي والمقارنة بينها وبين بعض الطرق الأخرى وهي طريقة واتكر-هندرسون المعممة ونموذج ماكيهام والنماذج الأسية، بالتطبيق على معدلات الوفاة بجدول الحياة المختصر للسكان في جمهورية مصر العربية. ولذلك تسهم هذه الدراسة في إثراء الدراسات العربية في مجال العلوم الاكتوارية بتقديم بعض الطرق التي لم يتم تناولها كثيرا في الدراسات باللغة العربية، ولم يسبق تطبيقها على معدلات الوفاة للسكان في مصر. وأشارت النتائج إلى أن جميع الطرق المطبقة أعطت نتائج مقبولة من حيث الدقة والسلاسة، وأن المدخل التبايني يتسم بالمرونة في تحديد درجة التمهيد التي يراها الباحث مقبولة في ضوء مدى تفضيله للسلاسة عن الدقة أو العكس، كما أنه يمكن الاسترشاد بمعيار التحقق المتقاطع المعمم لاختيار قيمة مناسبة لمعلمة التمهيد. وتمت التوصية بدراسة مدى ملاءمة تطبيق طرق التسوية المقدمة في هذا البحث في حالة مجتمعات أخرى، وفي حالة العينات الكبيرة، وكذلك العمل على توفير وإتاحة البيانات الخاصة بالوفيات والسكان سواء على مستوى المجتمع السكاني ككل بشكل عام أو على مستوى مجتمع المؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية بشكل خاص.

الكلمات المفتاحية: التسوية - واتكر-هندرسون - المدخل التبايني - ماكيهام - معيار التحقق المتقاطع المعمم.

١- مقدمة:

عند إنشاء جدول الحياة، يعد وصف نمط الوفيات الفعلي غير المعروف، سواء للسكان أو من بيانات شركات التأمين، واحدة من أهم المهام في العلوم الاكتوارية، ومن الشائع أن تحتوي معدلات الوفاة المشاهدة على قيم شاذة أو متطرفة سواء لأسباب تتعلق بمصادر البيانات أو بالطرق المستخدمة في الحساب، الأمر الذي يجعل هذه المعدلات لا تمثل الحقيقة، لذلك تعتبر عملية تسوية (تمهيد، تدريج، تنعيم، تهذيب) معدلات الوفاة بعد حسابها خطوة غاية في الأهمية. وتسوية البيانات هي ببساطة عملية إيجاد تقديرات للبيانات الخام بطريقة تُظهر هذه التقديرات

مسواة وممهدة وفي نفس الوقت متسقة مع البيانات الأصلية. من تعريف التسوية، يجب أن نأخذ شيئان في الاعتبار بخصوص القيم الممهدة أو المقدرة: أولهما أن تكون قريبة من البيانات الخام، وثانيهما، وفي الوقت نفسه، أن نُظهِر بعض السلاسة.

ولم تقتصر الحاجة إلى تمهيد أو تسوية البيانات على مجال العلوم الاكتوارية وحدها، بل امتد ذلك إلى كثير من العلوم الأخرى، كالهندسة (Orfanidis, 2018) والرياضيات (Wahba, 1990)، لذلك ظهر الاهتمام منذ زمن بعيد باستحداث أو اقتراح أساليب أو وسائل لتمهيد البيانات تختلف فيما بينها تبعا لطبيعة البيانات وطريقة الحساب والهدف من التسوية. وأيا كانت الطريقة المستخدمة في التسوية، سواء كانت بيانية أو تعتمد على صيغ رياضية أو نماذج إحصائية، يوجد دائما سؤال يطرح نفسه وهو ما أفضل طريقة لتمهيد البيانات؟

لا توجد إجابة صريحة أو مباشرة على هذا السؤال تساعد الشخص القائم بالتسوية أو الخبير الاكتواري، ومع ذلك، هناك بعض العوامل التي يمكن أن توجه القرار حول اختيار الطريقة المناسبة للتسوية. العامل الأول هو مدى السلاسة المرغوبة في القيم المسواة أو الممهدة، والثاني هو شكل وخصائص توزيع البيانات الاكتوارية، والثالث اختيار النماذج والمعلمات وطريقة تقديرها، وقد يكون هناك عامل آخر يتعلق بكمية ومدى صعوبة الحسابات العددية المطلوبة، وإن كان هذا الأخير أقل أهمية في الوقت الحاضر في ظل تطور حزم البرمجيات المختلفة.

٢ـ هدف وحدود البحث:

تهدف هذه الدراسة إلى تسوية معدلات الوفاة بطريقة حديثة من طرق التحليل الرياضي وتدعى المدخل التبايني (variational approach) (Manejero & Mendoza, 2020)، ومقارنتها ببعض الطرق الأخرى لتسوية معدلات الوفاة مثل طريقة Whittaker-Henderson، ونموذج ماكيهام، والنماذج الأسية، وذلك بالتطبيق على معدلات الوفاة بجدول الحياة المختصر للسكان في جمهورية مصر العربية (ذكور وإناث) عام 2016م.

٣ـ أهمية البحث:

تتمثل أهمية هذه الدراسة في إثراء المكتبة العربية في مجال دراسات أساليب وطرق تمهيد وتسوية البيانات، وخاصة في مجال العلوم الاكتوارية، من خلال تقديم إحدى الطرق الجديدة لهذا الغرض، وكذلك عرض طريقة معممة معدلة تقوم على إحدى الطرق التقليدية (Whittaker-Henderson)، ولم يتم تناول هاتين الطريقتين كثيرا في الدراسات باللغة العربية، ولم يسبق تطبيقهما على معدلات الوفاة للسكان في مصر (على حد علم الباحثين).

٤ـ الدراسات السابقة:

هناك العديد من الدارسات التي تناولت واستخدمت طرق تدريج وتهذيب وتسوية معدلات الوفاة، حيث قامت دراسة (عابد، 1993) بتمهيد معدلات الوفاة المركزية لفئات العمر الكبيرة باستخدام صيغة جومبيرتز ومعدلات الوفاة المركزية لفئات العمر الصغيرة باستخدام الرسم البياني. ومن معدلات الوفيات المركزية الممهدة في برنامج (LIFTB) من مجموعة برامج (MORTPAK-LITE) المعتمدة من هيئة الأمم المتحدة لقياس الوفيات تم الحصول على جداول حياة مختصرة للذكور ثم الإناث لسكان المملكة العربية السعودية للسعوديين. كذلك هناك دراسة (مهدي، سالم، فوده& الأشقر، 2013) قامت بتمهيد معدلات الوفاة الخام التي تمثل خبرة المجتمع المصري من واقع الإحصاءات العامة للسكان، وكذلك من واقع خبرة شركات التأمين العاملة في السوق المصري باستخدام بطريقة سبنسر ذات الواحد وعشرين حداً.

أما دراسة (Abid, Kamhawey, & Alsalloum, 2006) فاعتمدت على طريقة هيليجمان وبولارد (Heligman and Pollard) لتسوية معدلات الوفاة الخام للمجتمع السعودي لكلا الجنسين في مختلف الأعمار، بغرض إنشاء جداول الاستعاضة (الرموز الحسابية) للمساعدة في حساب القيم الحالية الاكتوارية لمعاشات الحياة السعودية (SPVA). كما قامت دراسة (أحمد، 2012) باستخدام كل من الدوال الأسية واللوغاريتمية وكثيرات الحدود ودوال القوى في تسوية معدلات الوفاة الخام، بهدف الوصول إلى صيغ جديدة لتسوية بيانات الوفاة الخام، تتميز بالسهولة والبساطة في تقدير ثوابت هذه المعادلات بما يتيح لشركات تأمينات الحياة صغيرة الحجم استخدامها دون الحاجة لمستويات كبيرة من الخبرة والتكلفة.

اعتمدت دراسة (البلقيني، طاقية & درغام، 2013) على دراسة وتطبيق الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة الخام (كارنل kernel، تسوية الشرائح Splines، الانحدار الموضعي المرجح (LOESS) Locally-Weighted Regression، النماذج المضافة المعممة (GAM) Generalized Additive Models من البيانات الديموغرافية المصرية للوصول إلى معدلات الوفاة المسواة، ومن ثم المقارنة بين هذه الطرق للوصول الي أفضل طريقة لتسوية معدلات الوفاة الخام. وتوصلت الدراسة إلى أن طريقة التسوية باستخدام النماذج المضافة المعممة كانت أفضل الطرق اللامعلمية محل البحث لتسوية معدلات الوفاة الخام.

قامت دراسة (Dodd, Forster, Bijak, & Smith, 2017) بوصف المنهجية الإحصائية المستخدمة في إنشاء جدول الحياة الإنجليزي السابع عشر عن الفترة 2010-2012، حيث تم تسوية وتدريج معدلات الوفاة الخام باستخدام مزيج من النماذج الإضافية المعممة المختلطة generalized additive models والنماذج المعلمية ذات الأبعاد المنخفضة low dimensional parametric models.

قامت دراسة (البلقيني، واصف، & الميه، 2017) باستخدام طريقة بديلة لدالة جومبيرتز- ماكيهام (Beta Regression) في تسوية بيانات شركات التأمين، وتوصلت هذه الدراسة أن تلك الطريقة أفضل من استخدام النماذج الخطية المعممة وأعطت نتائج أفضل. كما قامت دراسة (عبد الباقي & متعال، 2018) باستخدام نموذج مدمج بين التمهيد الأسي ونموذج الانحدار التكيفي، بهدف تقدير معدلات الوفاة لعملاء شركات التأمين على الحياة ومتابعة تناقصهم بسبب الوفاة خلال فترة الدراسة.

قامت دراسة (Murray, 2016) بوصف بعض المعالم الهامة لتسوية أو تدريج البيانات السكانية بما في ذلك طرق تسوية W.F. Sheppard في أوائل القرن العشرين، ومقارنتها بالطرق الحديثة مثل الانحدار متعدد الحدود المحلي local polynomial regression ونماذج بيز للتسوية. كما قارنت دراسة (Murray & Bellhouse, 2019) بين طريقة W.F. Sheppard وطريقة Local Polynomial Regression بالتطبيق على بيانات من دراسة (Spencer, 1904)، وتوصلت الدراسة إلى إن طريقة Sheppard لتسوية البيانات تعطي نتائج مشابهة لنتائج طريقة Local Polynomial Regression لنفس البيانات.

قامت دراسة (Manejero & Mendoza, 2020) باستخدام طريقة variational approach بالتطبيق على معدلات وفيات الذكور الفلبينيين، ومتوسط درجات الحرارة العالمية، وسعر أحد أسهم eBay الشهري، ومقارنة النتائج مع طريقة ويتاكر-هندرسون Whittaker-Henderson والتي تعد من أشهر طرق تسوية البيانات المستخدمة من قبل الاكتواريين.

٥- منهجية البحث:

تعتمد هذه الدراسة على منهج وصفي تحليلي للمقارنة بين بعض طرق تمهيد وتسوية معدلات الوفاة بالتطبيق على جداول الحياة القومية المختصرة، التي تم نشرها بواسطة منظمة الصحة العالمية عن السكان في مصر عام 2016م (WHO, 2016).

١-٥ طرق تمهيد وتسوية احتمالات الوفاة:

تتعدد الطرق المستخدمة لتسوية أو تدريج معدلات الوفاة، لكن، بشكل عام، يمكن تصنيفها إلى ثلاث فئات رئيسية: التسوية بالرجوع إلى جدول معياري، التسوية البيانية، والتسوية باستخدام الصيغ الرياضية.

وللتسوية باستخدام الصيغ الرياضية أشكال عدة، ففي مجال العلوم الاكتوارية، وتحديدا تمهيد معدلات الوفاة، هناك مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها منها ما يعتمد على معادلات رياضية أو صيغ لامعلمية ومنها ما يعتمد على توفيق بعض أنواع التوزيعات الاحتمالية، ومن أمثلة ذلك: الصيغ القائمة على القيم المحورية والاستكمال، المتوسطات

المتحركة، المنحنيات والتوزيعات الاحتمالية، بعض الصيغ الرياضية الخاصة. وفي هذه الدراسة سيتم التركيز على الأسلوبين الأخيرين.

وعند استخدام التوزيعات الاحتمالية في تسوية البيانات، يتم توفيق نموذج أو معادلة تمثل توزيعا احتماليا لبيانات الوفيات أو التعرض للخطر أو معدلات الوفاة، وذلك من خلال تقدير مجموعة من المعلمات تختلف وفقا للنموذج أو المعادلة الخاصة بالتوزيع الاحتمالي. ومن النماذج أو المنحنيات الأكثر استخداما لهذا الغرض منحنيات جومبيرتز Gompertz ومنحنيات ماكيهام Makeham والنماذج الأسية (Benjamin, Pollard, & Haycocks, 1980). وفيما يلي الصيغ التي تمثل النماذج الثلاثة:

$$\hat{\mu}_x = Bc^x \quad \text{(نموذج جومبيرتز)} \quad (1)$$

$$\hat{\mu}_x = A + Bc^x \quad \text{(نموذج ماكيهام)} \quad (2)$$

$$\hat{q}_x = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{(التوزيع الأسي)} \quad (3)$$

$$\hat{q}_x = \alpha e^{\beta x} \quad \text{(النموذج الأسي ذو معلمتين)} \quad (4)$$

حيث: x يمثل العمر، و μ_x معدل الوفاة اللحظي، و q_x احتمال الوفاة و $A, B, c, \alpha, \beta, \lambda$ تمثل المعلمات المطلوب تقديرها.

أما فيما يتعلق بالصيغ الرياضية الخاصة، فهناك مجموعة كبيرة من الصيغ الرياضية المقترحة التي يمكن استخدامها في تسوية معدلات الوفاة، يعتمد أغلبها على نماذج انحدار لامعلمية أو على طرق التحليل الرياضي. وفيما يلي نقدم مجموعة من طرق التسوية والتي سيتم تطبيقها في هذا البحث:

(أ) طريقة Whittaker–Henderson

يعتبر أسلوب التسوية الذي اقترحه Whittaker-Henderson من الأساليب الشائعة الاستخدام لتمهيد وتسوية البيانات في كثير من المجالات، سواء في العلوم الاكتوارية أو الهندسة أو غيرها، والتي تأخذ في الاعتبار عاملي الملاءمة والنعومة في القيم الممهدة. ويفضل الكثير من الخبراء الاكتواريين استخدام هذه الطريقة لأنها تتسم بالمرونة في الاختيار بين مدى السلاسة، أو القرب من البيانات الخام / الفعلية، أو التوازن بين الاثنين (Henderson, 1924).

وتقوم هذه الطريقة على أساس شرائح التمهيد المنفصلة discrete smoothing splines للبيانات ذات المسافات المتساوية. وفيما يلي عرض موجز لهذه الطريقة.

إذا كان لدينا سلسلة من القيم $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$، وكان كل من λ, p أعداد حقيقية موجبة ($p < n$)، فإننا نريد إيجاد سلسلة القيم الممهدة $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ التي تحقق تدنية المقدار التالي:

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} \left(u_j - y_j \right)^2 + \sum_{j=1}^{n-p} \left(\Delta^p y_j \right)^2, \qquad (5)$$

حيث: Δ تمثل عامل الفرق الأمامي:

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j \ , \ \Delta^2 y_j = \Delta \left(\Delta y_j \right) = y_{j+2} + 2y_{j+1} + y_j \ , \ldots$$

ويقيس المجموع الأول في المعادلة رقم (5) دقة البيانات الممهدة، بينما يقيس الثاني درجة النعومة أو السلاسة للقيم الممهدة. ويتم اختيار قيمة المعلمة λ من جانب القائم بالتسوية، وتتحكم هذه القيمة في المفاضلة بين الدقة والنعومة: فإذا كانت $\lambda \to \infty$ فإن الحل يتقارب مع قيمة ثابتة تقريبا تمثل ناتج كثيرة حدود من الدرجة $(p-1)$، وإذا كانت $\lambda \to 0$ فإن الحل يتقارب مع القيم الأصلية لسلسلة البيانات.

وفي الإصدار الأصلي لهذه الطريقة، كانت قيمة p تساوي 3، وكانت المعادلات الواجب حلها للوصول إلى القيم الممهدة على الصورة التالية (Joseph, 1952):

$$y_j - u_j = \frac{1}{\lambda} \Delta^6 y_{j-3} \ , \ j = 4,5,\ldots,n-3 \qquad (6)$$

وبالنسبة للقيم الثلاثة الأولى والقيم الثلاثة الأخيرة، تضاف ست معادلات على الصورة السابقة يتم اختيارها بحيث يكون:

$$\Delta^3 y_j = 0 \ , \ j = 1,2,3,n-2,n-1,n \qquad (7)$$

وصياغة نظام المعادلات على الصورة السابقة يقتضي أن يكون كل من المجموع والعزمين الأول والثاني للقيم الأصلية وللقيم الممهدة متساويا، أي:

$$\sum_{j=1}^{n} j^r y_j = \sum_{j=1}^{n} j^r u_j \ , \quad r = 0,1,2 \qquad (8)$$

وبحل مجموعة المعادلات السابقة، استطاع Whittaker الوصول إلى القيم الممهدة.

ومنذ اقتراح هذه الطريقة لتسوية البيانات عام 1923، تم تقديم العديد من طرق التسوية التي تعتمد على تحسين هذه الطريقة سواء لتحقيق كفاءة أكبر في الحساب أو لمحاولة تقدير القيمة المناسبة لمعلمة التمهيد λ بعيدا عن الحكم الشخصي للقائم بالتسوية. ولا يتسع المجال لذكر جميع تلك الطرق، لكن نلقي الضوء على أحدها، حيث اقترح Orfanidis (Orfanidis, 2018) تعميما لطريقة Whittaker-Henderson يسمح بتخصيص أوزان للقيم وكذلك تحديد القيمة المثلى لمعلمة التمهيد λ. وتقوم هذه الطريقة المعممة على أساس تدنية المقدار التالي إلى أقل حد ممكن:

$$\min\ J=\sum_{n=0}^{N-1} w_n \left|u_n-y_n\right|^2+\lambda\sum_{n=0}^{N-1}\left|\nabla^p y_n\right|^2, \qquad (9)$$

حيث:

$\nabla^P y_n$: تمثل عامل الفرق الخلفي ($\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$) المحسوب p من المرات.

w_n : تمثل الأوزان المخصصة لنقاط البيانات.

ولاعتبارات حسابية وعملية، عادة تستخدم الصيغة التحويلية التالية عوضاً عن المعادلة (9):

$$\min\ J=(u-y)^T W\,(u-y)+\lambda y^T\left(D^T D\right)y, \qquad (10)$$

حيث:

W : مصفوفة قطرية تمثل الأوزان $\left(W=\text{diag}([w_0,w_1,\dots,w_{N-1}])\right)$.

D : مصفوفة ترشيحية convolutional matrix من الرتبة $(N+p)\times N$.

ويتم الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة التدنية السابقة كالتالي:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial J}{\partial y}=-2w\,(u-y)+2\lambda y^T\left(D^T D\right)y=0\\ &\Rightarrow\left(w+\lambda D^T D\right)y=wu\Rightarrow\hat{y}=\left(w+\lambda D^T D\right)^{-1}wu\end{aligned} \qquad (11)$$

وقد اقترح (Orfanidis, 2018) تقدير القيمة المثلى لمعلمة التمهيد λ باستخدام معيار التحقق المتقاطع المعمم (Generalized Cross Validation) على النحو التالي:

$$\min GCV\ (\lambda)=\frac{e^T W e}{\left[tr\left(I-H\right)\right]^2}, \qquad (12)$$

حيث:

H : تمثل مصفوفة التقدير (مصفوفة القبعة)

hat matrix $\left(H=(W+\lambda D^T D)^{-1}W\right)$.

e : يمثل الخطأ $\left(e=u-\hat{y}=(I-H)u\right)$.

(ب) المدخل التبايني (Variational Approach) لتمهيد البيانات

اقترح (Manejero & Mendoza, 2020) طريقة لتمهيد البيانات تقوم على مبادئ التحليل الرياضي وحساب المعادلات التفاضلية. في طريقة Whittaker-Henderson لتسوية البيانات، عندما تكون $p = 1$ فإننا في هذه الحالة نريد إيجاد مجموعة من المتجهات $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ باستخدام البيانات الخام $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ وبعض القيم أو الثوابت $\lambda \geq 0$ بحيث يتم تدنية المقدار المركب التالي (معادلة رقم (13)) إلى أقل حد ممكن.

$$F(y)+\lambda S(y)=\sum_{i=1}^{n} w_i\left(y_i-u_i\right)^2+\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta y_i\right)^2, \qquad (13)$$

حيث:

w_i: الأوزان المقابلة لنقاط البيانات. وهي قيم موجبة معرّفة من قبل المستخدم.

Δ : معامل الفروق $\left(\Delta y_i = y_{i+1}-y_i\right)$.

ويمكن الحصول على القيم الممهدة عن طريق تحويل المشكلة إلى نظام خطي (MacLeod, 1989; Nocon & Scott, 2012)، ثم حساب القيم الممهدة عن طريق:

$$y=\left(W+\lambda K^{T}K\right)^{-1}Wu, \qquad (14)$$

حيث:

λ: معلمة التمهيد،

W: مصفوفة الأوزان $n \times n$ وتحتوي أقطارها على قيم الأوزان w_i ،

y: متجه القيم الممهدة،

u: متجه القيم الأصلية أو البيانات الخام،

$$K_{n-1\times n} : K_y=\left(\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_{n-1}\right)^{T} \text{ ،} K_{ij}=(-1)^{1+j-i}\binom{1}{j-i}, i=1,\ldots,n-1 \; j=i,\ldots,i+1$$

ولحل نظام المعادلات السابق، يمكن إعادة صياغة المعادلة رقم (13)، عن طريق تمثيل بديل غير محدود الأبعاد، كما بالشكل التالي:

$$J(y)=\int_{\Omega} w(x)\left[y(x)-f(x)\right]^2 dx+\lambda\int_{\Omega}\left[\nabla y(x)\right]^2 dx, \qquad (15)$$

حيث: Ω هي منطقة في □$_n$ و $n \in$ □.

والخطوة التالية هي محاولة إيجاد مجموعة من القيم y^* التي تنتمي إلى فضاء احتمالي معين V بما يجعل المقدار السابق أقل ما يمكن، أي أن: $y^* = \arg\min_{y \in V} J(y)$ ، ولتحديد الفضاء الاحتمالي V يتم حل مشكلة أمثلية على الصورة التالية:

$$y^* = \arg\min_{y \in H^1(\Omega)} J(y) \qquad (16)$$

وقد اقترح (Manejero & Mendoza, 2020) استخدام ما يسمى "صياغة العنصر المحدود" Finite Element Formulation في حل المعادلات التفاضلية، والتي بمقتضاها يمكن التعبير عن المقدار السابق باستخدام المدخل التبايني Variational approach على النحو التالي:

$$\int_\Omega w(x) y_h(x) dx + \lambda \int_\Omega \nabla y(x) . \nabla y_h(x) dx = \int_\Omega w(x) f(x) u_h(x) dx \qquad (17)$$

ثم يتم استخدام مجموعة من التحويلات الخطية y_h لدوال خطية جزئيا $\phi_i(x)$ في الفضاء V_h تسمى "دوال الأساس basis functions"، أشهرها دالة لاجرانج Lagrange، يتحدد مجال كل منها بناء على تقسيم المجال المتصل Ω إلى أجزاء متقطعة، حيث:

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \phi_i(x) \qquad (18)$$

وأخيرا، يتم حل نظام المعادلات على الصورة:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} y_i \int_\Omega w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) + \lambda \nabla \phi_i(x) . \nabla \phi_j(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \int_\Omega w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \qquad (19)$$

لإيجاد قيم المعامِلات y_i ، ومن ثم التعويض بها في المعادلة رقم (18) للوصول إلى تقريب عددي للبيانات الممهدة.

وإذا كانت المعلمة λ محددة مسبقا، تعطي طريقتي Whittaker-Henderson وManejero & Mendoza نتائج متقاربة إلى حد ما. ومع ذلك، إذا أردنا دراسة سلوك القيم الممهدة مع تغيُّر معلمة التسوية λ أو إذا كانت البيانات المستكملة مضطربة، فقد تكون الطريقة الأخيرة أكثر عملية وفائدة.

مما سبق، وكنتيجة طبيعية لتعدد طرق أو أساليب التسوية، يتوقف اختيار مجموعة الطرق المستخدمة على اعتبارات السلاسة وشكل البيانات والمرونة في اختيار المعلمات، فإذا

كان التركيز ينصب على السلاسة وكانت البيانات كافية، لا يرجح استخدام الطريقة البيانية، حيث يُفترض أن الطرق الرياضية، خاصة تلك المعلمية، تعطي نتائج أكثر سلاسة حيث يمكن تحديد مقدار السلاسة من خلال تغيير قيم بعض المعلمات. كذلك يتحكم شكل البيانات في اختيار طريقة التسوية، فعلى سبيل المثال، إذا تم تجميع المعدلات ونريد قيمًا متدرجة لجميع الأعمار، فيجب أيضاً استخدام طريقة رياضية. وأخيراً يتأثر اختيار طريقة التسوية بكيفية تحديد المعلمات، حيث يمكن للتفسير السهل للمعلمات وتأثيرها أن يرشد الباحث إلى اختيار قيمها، بينما في طرق أخرى عليه أن يستخدم قيمًا مختلفة للمعلمات ثم مقارنة النتائج للوصول إلى القيم المناسبة.

٢.٥ اختبارات جودة توفيق معدلات الوفاة الممهدة:

يتم الحكم على جودة التسوية من وجهتي نظر: الأولى هي مدى سلاسة القيم الممهدة، والثانية هي مدى اقتراب القيم الممهدة من القيم الأصلية. وبشكل عام، عندما يكون حجم البيانات كبيرا نسبياً مع الثقة في دقة هذه البيانات، نختار الطريقة التي ترجح الاقتراب على السلاسة، أما إذا كانت البيانات حجمها ليس بكبير وبالتالي فان عنصر الثقة فيها يكون أقل، فان الأمر يستلزم ترجيح السلاسة على الاقتراب. وهناك مجموعة من الاختبارات التي يمكن استخدامها للحكم على مدى صلاحية طريقة التدريج المستخدمة منها:

١.٢.٥ اختبار χ^2 The Chi-Square Test

يعتبر هذا الاختبار شائع الاستخدام، فهو يظهر معقولية اقتراب الوفيات الملاحظة من الوفيات المتوقعة، ويتم في هذا الاختبار حساب قيمة χ^2 كالتالي:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}, \qquad (20)$$

حيث تمثل O القيمة الفعلية، وE القيمة المتوقعة أو الممهدة.

وتقارن القيمة المحسوبة بقيمة تستخرج من جدول توزيع χ^2 عند مستوى معنوية 5 % بدرجات حرية معينة، إذا كانت أصغر من القيمة الجدولية يقبل الفرض العدمي بدرجة ثقة 95%.

٢.٢.٥ اختبار ستيفينز لتجميع الإشارات Stevens' Test for the Grouping Signs

يعتمد هذا الاختبار على حساب الانحرافات بين القيم الممهدة والقيم الفعلية، وإذا كانت n_1 تمثل عدد الانحرافات الموجبة و n_2 تمثل عدد الانحرافات السالبة وG عدد مجموعات الانحرافات الموجبة، فإنه يتم إيجاد القيمة k^* بحيث:

$$k^* = \min(k) : \sum_{t=1}^{k} \frac{\binom{n_1 - 1}{t-1}\binom{n_2 + 1}{t}}{\binom{n_1 + n_2}{n_1}} \geq 0.05 \qquad (21)$$

وتكون التسوية مقبولة إذا كانت G أكبر من أو تساوي k^*.

٥-٢-٣ جذر متوسط مربعات البواقي Root Mean Square Error

وفقا لهذا المعيار، يتم حساب جودة توفيق المعدلات الممهدة من حيث مدى اقترابها من القيم الفعلية، بالاعتماد على حساب مجموع مربعات الخطأ العشوائي أو البواقي $\text{SSE} = \sum_x (q_x - \hat{q}_x)^2$ ثم إيجاد القيمة:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_x (q_x - \hat{q}_x)^2}{n}} \qquad (22)$$

وكلما كان المقدار السابق أقل كلما كان التنبؤ أكثر دقة.

٥-٢-٤ اختبار التمهيد Smoothness Test

يمكن اختبار مدى نعومة منحنى معدلات الوفاة الممهدة، رياضياً، عن طريق إيجاد المشتقات العليا لمعادلة التمهيد. ومن الناحية العملية، قد لا يكون هذا متاحا في كل الأحوال، لذا يتم عادة الاستدلال على درجة التمهيد من خلال حساب الفروق من الدرجة الثالثة للمعدلات الممهدة، ثم إيجاد القيمة:

$$\sum_x \left| \Delta^3 \hat{q}_x \right|, \qquad (23)$$

حيث: $\hat{q}_x$ هي معدلات الوفاة الممهدة، و Δ يمثل معامل الفروق $\left(\Delta \hat{q}_x = \hat{q}_x - \hat{q}_{x-1} \right)$

٦- التحليل والنتائج:

تم تطبيق الأساليب التالية لتسوية معدلات الوفاة لكل من الذكور والإناث في جدول الحياة القومي المختصر لمصر عن عام ٢٠١٦م (جدول رقم (١)):

(أ) المدخل التبايني (VA).

(ب) طريقة Whittaker-Henderson المعممة (WH).

(ج) نموذج ماكيهام (Makeham) والنموذج الأسي (Exp).

جدول رقم (١): احتمالات الوفاة بجدول الحياة القومي المختصر لمصر ٢٠١٦*

Females				Males			
x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x
<1	0.017	40-44	0.008	<1	0.018	40-44	0.014
1-4	0.003	45-49	0.016	1-4	0.003	45-49	0.027
5-9	0.002	50-54	0.031	5-9	0.003	50-54	0.054
10-14	0.002	55-59	0.054	10-14	0.003	55-59	0.091
15-19	0.003	60-64	0.098	15-19	0.006	60-64	0.146
20-24	0.003	65-69	0.122	20-24	0.007	65-69	0.171
25-29	0.003	70-74	0.207	25-29	0.007	70-74	0.274
30-34	0.004	75-79	0.303	30-34	0.008	75-79	0.375
35-39	0.006	80-84	0.447	35-39	0.01	80-84	0.528

* المصدر: منظمة الصحة العالمية (WHO, 2016)

كما تم إجراء كل من اختباري Ch-square (χ^2) وستيفنز للحكم على التسوية، وأيضاً تم حساب كل من RMSE ودرجة النعومة للمفاضلة بين طرق التسوية.

وقد تم حساب القيم الممهدة، وتقدير معلمات النماذج الإحصائية، وإجراء اختبارات التسوية باستخدام البرامج الإحصائية Excel, MATLAB R2020a. ونستعرض فيما يلي ملخص خطوات ونتائج التحليل.

(أ) المدخل التبايني (VA)

تم تطبيق هذا الأسلوب باستخدام عدة قيم لمعلمة التمهيد λ ($(0.01, 0.05, \lambda_{GCV})$ ، ومن الخصائص الرياضية له أن درجة سلاسة أو نعومة القيم الممهدة تزيد مع زيادة قيمة λ، وبالضرورة، تزيد أيضا انحرافات القيم الممهدة عن القيم الأصلية. ولأغراض المقارنة، تم اختيار إحدى قيم λ على أساس معيار التحقق المتقاطع المعمم (GCV) بتطبيق المعادلة رقم (12)، وكانت القيم للذكور والإناث هي 0.25 و0.15 على الترتيب.

وينتج عن تطبيق المدخل التبايني في التحليل الرياضي سلسلة من القيم الممهدة لكل من العمر ($\hat{x}$) ومعدلات الوفاة ($\hat{q}$) تبدأ عند أول قيمة للعمر وتنتهي عند آخر قيمة للعمر في سلسلة البيانات، لكن عدد القيم في هذه السلسلة الممهدة يزيد عن عدد القيم الأصلية، وبالتالي تم

الحصول على القيم الممهدة عن طريق تطبيق الاستكمال الخطي التالي لقيم $\hat{x}$ و $\hat{q}$ الناتجة عن أسلوب المدخل التبايني:

$$\hat{q}_x = \hat{q}_{x-a} + (\hat{q}_{x+b} - \hat{q}_{x-a})\left(\frac{a}{a+b}\right) \quad (24)$$

ويعرض الجدول رقم (2) قيم معدلات الوفاة الممهدة لكل من الذكور والإناث وفقا للمدخل التبايني باستخدام ثلاث قيم مختلفة لمعلمة التمهيد λ. وتُظهِر نتائج اختبارات التسوية المعروضة في الجدول رقم (5) أن التسوية كانت مقبولة في جميع الحالات، حيث كانت قيم χ^2 المحسوبة صغيرة وتقل عن نظيرتها الجدولية كما كانت $G \geq k^*$ في اختبار ستيفنز.

جدول رقم (٢): معدلات الوفاة المسواة باستخدام المدخل التبايني (VA)

Age	Females			Males		
	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.15$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$
<1	0.01630	0.01543	0.01430	0.01725	0.01632	0.01432
1-4	0.00334	0.00376	0.00430	0.00338	0.00384	0.00481
5-9	0.00201	0.00202	0.00204	0.00300	0.00300	0.00300
10-14	0.00201	0.00202	0.00204	0.00303	0.00307	0.00315
15-19	0.00299	0.00298	0.00296	0.00598	0.00596	0.00590
20-24	0.00300	0.00300	0.00300	0.00699	0.00698	0.00695
25-29	0.00301	0.00302	0.00304	0.00701	0.00702	0.00705
30-34	0.00401	0.00402	0.00404	0.00801	0.00802	0.00805
35-39	0.00600	0.00600	0.00600	0.01002	0.01004	0.01010
40-44	0.00806	0.00813	0.00823	0.01409	0.01420	0.01445
45-49	0.01607	0.01616	0.01627	0.02714	0.02731	0.02770
50-54	0.03108	0.03118	0.03131	0.05410	0.05422	0.05450
55-59	0.05421	0.05447	0.05481	0.09118	0.09140	0.09190
60-64	0.09780	0.09755	0.09722	0.14570	0.14533	0.14450
65-69	0.12261	0.12336	0.12436	0.17178	0.17275	0.17490
70-74	0.20711	0.20725	0.20743	0.27398	0.27395	0.27389
75-79	0.30348	0.30408	0.30486	0.37552	0.37617	0.37760
80-84	0.44412	0.44056	0.43585	0.52494	0.52116	0.51270

(ب) طريقة Whittaker-Henderson المعممة (WH)

تم تطبيق طريقة WH المعممة باستخدام قيمتين لدرجة الفروق $p=2, p=3$ (المعادلة رقم (5))، كما تم تحديد قيمة λ على أساس معيار التحقق المتقاطع المعمم

(λ_{GCV})بتطبيق المعادلة رقم (12)، وكانت القيم للذكور والإناث هي 0.25 و0.15 على الترتيب.

ويعرض الجدول رقم (3) قيم معدلات الوفاة الممهدة لكل من الذكور والإناث وفقا لهذه الطريقة. وتُظهر نتائج اختبارات التسوية المعروضة في الجدول رقم (5) أن التسوية كانت مقبولة.

جدول رقم (٣): معدلات الوفاة المسواة باستخدام طريقة WH المعممة

Age	Females		Males	
	WH (p=2)	WH (p=3)	WH (p=2)	WH (p=3)
<1	0.01583	0.01540	0.01617	0.01601
1-4	0.00485	0.00584	0.00573	0.00636
5-9	0.00170	0.00177	0.00260	0.00266
10-14	0.00183	0.00134	0.00314	0.00304
15-19	0.00271	0.00228	0.00537	0.00506
20-24	0.00296	0.00309	0.00670	0.00663
25-29	0.00311	0.00345	0.00706	0.00706
30-34	0.00394	0.00382	0.00763	0.00715
35-39	0.00549	0.00508	0.00928	0.00896
40-44	0.00824	0.00879	0.01442	0.01565
45-49	0.01601	0.01716	0.02827	0.03052
50-54	0.03108	0.03198	0.05442	0.05508
55-59	0.05560	0.05446	0.09134	0.08867
60-64	0.09125	0.08649	0.13586	0.13132
65-69	0.12900	0.13287	0.18345	0.18769
70-74	0.20487	0.20432	0.27014	0.26877
75-79	0.30816	0.30686	0.38218	0.37992
80-84	0.44236	0.44399	0.52124	0.52445

(ج) نموذج ماكيهام والنموذج الأسي

تم توفيق نموذج ماكيهام (المعادلة رقم (2)) والنموذج الأسي ذو المعلمتين (المعادلة رقم (4)) لاحتمالات الوفاة لكل من الذكور والإناث، وكانت نتائج تقدير النموذجين على النحو التالي:

$$\text{Females: } \hat{q}_x = -0.00045 + (0.0005)(1.086)^x ,$$

(نموذج ماكيهام)

$$\text{Males: } \hat{q}_x = \frac{8.302}{10^8} + (0.0014)(1.075)^x$$

$$\text{Females: } \hat{q}_x = 0.00049 e^{0.08275x} ,$$

(النموذج الأسي ذو معلمتين)

$$\text{Males: } \hat{q}_x = 0.00139 e^{0.07217x}$$

ويعرض الجدول رقم (4) قيم معدلات الوفاة الممهدة لكل من الذكور والإناث وفقا لكل من نموذج ماكيهام والنموذج الأسي. وتُظِهر نتائج اختبارات التسوية المعروضة في الجدول رقم (5) أن التسوية كانت مقبولة بشكل عام، مع ملاحظة أن قيمة χ^2 في حالة نموذج ماكيهام للإناث كانت كبيرة نسبيا مقارنة بالقيم المماثلة.

جدول رقم (٤): معدلات الوفاة المسواة باستخدام نموذج ماكيهام والنموذج الأسي

Age	Females		Males	
	Makeham	Exp.	Makeham	Exp.
<1	0.00051	0.00008	0.00144	0.00144
1-4	0.00060	0.00017	0.00166	0.00166
5-9	0.00091	0.00049	0.00238	0.00239
10-14	0.00138	0.00096	0.00342	0.00342
15-19	0.00208	0.00168	0.00491	0.00491
20-24	0.00315	0.00276	0.00704	0.00704
25-29	0.00477	0.00440	0.01010	0.01010
30-34	0.00721	0.00687	0.01448	0.01449
35-39	0.01091	0.01060	0.02078	0.02079
40-44	0.01650	0.01624	0.02981	0.02982
45-49	0.02496	0.02476	0.04276	0.04277
50-54	0.03775	0.03762	0.06134	0.06136
55-59	0.05709	0.05705	0.08800	0.08802
60-64	0.08634	0.08640	0.12624	0.12626
65-69	0.13059	0.13074	0.18110	0.18112
70-74	0.19751	0.19770	0.25980	0.25981
75-79	0.29872	0.29885	0.37270	0.37270
80-84	0.45180	0.45164	0.53466	0.53463

جدول رقم (٥): نتائج اختبارات جودة التسوية لمعدلات الوفاة

Method	Gender	Chi-sq.	Stevens				RMSE	Smoothness
			n_1	n_2	k^*	G		
VA ($\lambda = 0.01$)	F	0.00009	14	4	3	3	0.00073	0.23379
	M	0.00010	11	7	3	4	0.00079	0.32316
VA ($\lambda = 0.05$)	F	0.00044	13	5	3	3	0.00163	0.21747
	M	0.00048	12	6	3	4	0.00176	0.30112
VA ($\lambda = 0.15$)	F	0.00128	14	4	3	3	0.00283	0.19588
VA ($\lambda = 0.25$)	M	0.00226	12	6	3	4	0.00392	0.25217
WH (p=2)	F	0.00204	8	10	3	5	0.00294	0.07941
	M	0.00369	9	9	3	6	0.00462	0.08221
WH (p=3)	F	0.00507	9	9	3	5	0.00407	0.04098
	M	0.00646	8	10	3	6	0.00576	0.04295
Makeham	F	3.75957	9	9	3	3	0.00693	0.05154
	M	0.22121	10	8	3	3	0.00986	0.04892
Exp	F	0.55988	10	8	3	3	0.00694	0.05177
	M	0.22134	10	8	3	3	0.00986	0.04893

يتضح مما سبق أن جميع الطرق التي تم استخدامها في هذه الدراسة، لتسوية معدلات الوفاة للذكور والإناث لجدول الحياة القومي المختصر المصري، قد أعطت نتائج مقبولة. وبشكل عام يمكن ملاحظة الآتي:

١. أن زيادة دقة التقدير (RMSE) تعني بالضرورة انخفاض درجة النعومة أو التمهيد (smoothness)، والعكس صحيح، وهو ما يتضح من جدول رقم (5).

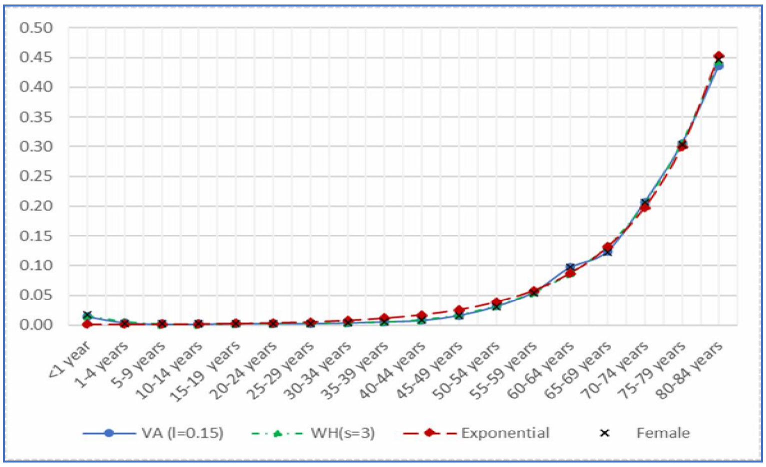
٢. أن المدخل التبايني يتسم بمرونة أكبر، مقارنة بباقي الطرق، في تحديد قيم معلمة التمهيد λ، وبالتالي اختيار درجة التمهيد التي يراها الباحث مقبولة.

٣. عند استخدام نموذج ماكيهام والنموذج الأسي، يلاحظ أن قيمة χ^2 تكون كبيرة نسبيا مقارنة بباقي الطرق، ويرجع ذلك بالدرجة الأولى إلى أن درجة التمهيد تكون أعلى عند استخدام النموذجين السابقين، كما أن القيم المقدرة عند الأعمار الصغيرة كانت بعيدة نسبيا عن القيم الأصلية.

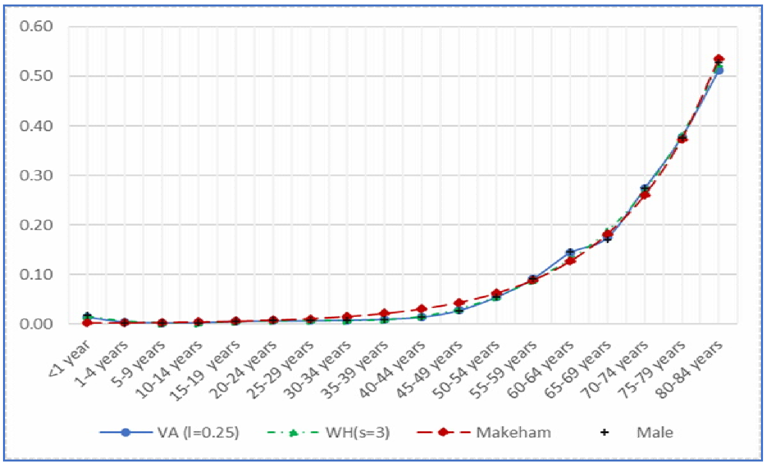
٤. أن معيار التحقق المتقاطع المعمم (GCV) يقدم وسيلة مقبولة لاختيار قيمة مناسبة لمعلمة التمهيد بما يحقق قدرا من التوازن بين الدقة والنعومة، وذلك عند تطبيق طرق VA و WH المعممة.

وطالما أن نتائج التسوية كانت مقبولة لجميع الطرق، لذا يمكن الاكتفاء في كل طريقة بالحالة التي يتحقق معها درجة أكبر من التمهيد أو النعومة في القيم المقدرة. ويوضح الشكلان أرقام (1) و (2) قيم احتمالات الوفاة الممهدة باستخدام كل من:

- المدخل التبايني (VA) - حالة $(\lambda = 0.25)$ للذكور و $(\lambda = 0.15)$ للإناث.
- طريقة Whittaker-Henderson المعممة (WH) عند $(p = 3)$.
- نموذج ماكيهام (Makeham) للذكور والنموذج الأسي (Exp) للإناث.



شكل رقم (١): احتمالات الوفاة الممهدة للإناث



شكل رقم (٢): احتمالات الوفاة الممهدة للذكور

ويتضح من الشكلين السابقين، أن طرق التسوية المستخدمة تعطي نتائج مقبولة من حيث كل من الدقة والسلاسة في المعدلات الممهدة، كما أن نتائج التسوية بالمدخل التبايني مقارنة بباقي الطرق كانت جيدة كما يتضح أيضاً من جدول (2) وجدول (5)، كما أن المدخل التبايني يتميز، كما ذكرنا، بمرونة أكبر في توجيه القيم الممهدة نحو السلاسة أو الدقة كما يرى الباحث وبما يتناسب مع طبيعة البيانات المستخدمة ويحقق أهداف الدراسة.

٧ـ التوصيات:

١. دراسة مدى ملاءمة تطبيق طرق التسوية المقدمة في هذا البحث، وخاصة المدخل التبايني، في حالة مجتمعات أخرى، وفي حالة العينات الكبيرة.

٢. العمل على توفير وإتاحة البيانات الخاصة بالوفيات والسكان سواء على مستوى المجتمع السكاني ككل بشكل عام أو على مستوى مجتمع المؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية بشكل خاص.

٣. الاستمرار في استكشاف ومواكبة الطرق الحديثة للتمهيد أو التسوية وتطبيقها.

المراجع:

Abid, A. D., Kamhawey, A. A., & Alsalloum, O. I. J. J. o. K. S. U. (2006). Graduating the Saudi crude mortality rates and constricting their monetary tables. 19(1), 23-39 .

Benjamin, B., Pollard, J. H., & Haycocks, H. W. (1980). The analysis of mortality and other actuarial statistics (Vol. 3): Heinemann London.

Dodd, E., Forster, J. J., Bijak, J., & Smith, P. W. (2017). Smoothing mortality data: the English Life Tables. Journal of the Royal Statistical Society, 181(3), 717–735 .

Henderson, R. (1924). A new method of graduation. Transactions of the Actuarial Society of America, 25, 29-40 .

Joseph, A. W. (1952). The Whittaker-Henderson Method of Graduation. Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994), Vol. 78, No. 1, pp.99-114

MacLeod, A. J. (1989). A note on the computation in Whittaker-Henderson graduation. Scandinavian Actuarial Journal, 1989(2), 115-117 .

Manejero, J. L., & Mendoza, R. (2020). Variational Approach to Data Graduation. Philippine Journal of Science, 149(2), 431-449 .

Murray, L., & Bellhouse, D. (2019). WF Sheppard's Smoothing Method: A Precursor to Local Polynomial Regression. International Statistical Review, 87(3), 604-612 .

Murray, L. L. (2016). Data Smoothing Techniques: Historical and Modern. Electronic Thesis and Dissertation Repository. 3679. https://ir.lib.uwo.ca/etd/3679 .

Nocon, A. S., & Scott, W. F. (2012). An extension of the Whittaker–Henderson method of graduation. Scandinavian Actuarial Journal, 2012(1), 70-79 .

Orfanidis, S. J. (2018). Applied Optimum Signal Processing - http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/aosp.

Spencer, J. (1904). On the Graduation of the Rates of Sickness and Mortality Presented by the Experience of the Manchester Unity of Oddfellows during the Period 1893-97. Journal of the Institute of Actuaries, 38(4), 334-343 .

Wahba, G. (1990). Estimating the smoothing parameter: Spline models for observational data. Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, 45-65 .

WHO, W. H. O. (2016). Life tables by country- Egypt. https://www.who.int/en

أحمد، أ. م. ف. (2012). نموذج مقترح لتسوية معدلات الوفاة الخام. المجلة العلمية للبحوث والدراسات التجارية، كلية التجارة وإدارة الأعمال، جامعة حلوان(1)، 423 - 452.

البلقيني، م. ت.، طاقية، ا. ع.، & درغام، م. س. (2013). استخدام الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة الخام: دراسة مقارنة. المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة - كلية التجارة، 37(3)، 599-621.

البلقيني، م. ت.، واصف، ج. ع.، & الميه، د. م. (2017). تحسين نموذج جومبيرتز ماكيهام لتسوية معدلات الوفاة. المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة - كلية التجارة، 41(1)، 409 - 431.

عابد، أ. ب. د. (1993). إعداد جداول حياة مختصرة للسكان السعوديين لكل من الذكور والإناث مجلة جامعة الملك سعود - العلوم الإدارية، 5(2)، 361-386.

عبدالباقي، ر. ص.، & متعال، م. ع. (2018). استخدام نموذج التمهيد الأسى والانحدار التكيفى في تقدير معدلات الوفاة بشركات التأمين. مجلة كلية التجارة للبحوث العلمية جامعة أسيوط - كلية التجارة (65)، 74 - 112.

مهدي، إ.، سالم، م.، فوده، م.، & الأشقر، ا. (2013). تمهيد دالة الوفيات لمجتمعي السكان والمؤمن عليهم في مصر مجلة الدراسات المالية والتجارية - كلية التجارة - جامعة بني سويف (3).

Variational Approach in Mathematical Analysis as a Recent Method for Graduating Mortality Rates

Dr. Mohammad A. Zayed
Assistant professor in Quantitative Methods Department School of Business
King Faisal University
Lecturer in Applied Statistics & Insurance Department
Faculty of Commerce Mansoura University
m.a.zayed@mans.edu.eg

Dr. Elsayed E. Elashkar
Assistant professor in Administrative Sciences Department Community College
King Saud University
Lecturer in Applied Statistics & Insurance Department
Faculty of Commerce Mansoura University
sayed_alashkar@mans.edu.eg

Abstract:

The process of smoothing mortality rates is considered a fundamental step when preparing life tables. This study aims to introduce a modern method of graduation, proposed by Manejero & Mendoza (2020), based on the variational approach in mathematical analysis, and compare it with other methods, Generalized Whittaker-Henderson, Makeham and exponential models, applied to mortality rates in the Egyptian national abridged life tables. Therefore, this study enriches Arabic studies in the field of actuarial sciences by offering methods that have not been covered much in Arabic literature, nor applied to Egyptian mortality rates. All the applied methods produced acceptable results in terms of accuracy and smoothness, and the method of variational approach had more flexibility in determining the desired degree of smoothness in light of the preference for smoothness over accuracy or vice versa, and that the generalized cross-validation criterion can be a guide for choosing an appropriate value for the smoothing parameter. It is recommended to apply the smoothing methods presented in this research on data from other populations, and for large samples, as well as making available the data on deaths and population both at national level,

in general, and for the Egyptian insurance companies (insureds' data), in particular.

Keywords: Smoothing - Whittaker-Henderson - variational approach - Makeham - generalized cross validation criterion.

(*) **د./ محمد عبد اللطيف زايد:** أستاذ مساعد بقسم الأساليب الكمية - كلية إدارة الأعمال بجامعة الملك فيصل - مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين - كلية التجارة - جامعة المنصورة

(**) **د./ السيد الشربيني الأشقر:** أستاذ مساعد بقسم العلوم الإدارية - كلية المجتمع بجامعة الملك سعود- مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين - كلية التجارة - جامعة المنصورة