



مجلة البحوث المالية والتجارية
المجلد (21) - العدد الرابع - أكتوبر 2020



دراسة مقارنة لثلاث طرق لاستكمال جداول الحياة المختصرة

**A Comparative Study for Three Methods to Interpolate
Abridged Life Tables**

محمد عبداللطيف زايد

Mohammad Zayed

أستاذ مساعد بقسم الأساليب الكمية
كلية إدارة الأعمال بجامعة الملك فيصل
مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة بجامعة المنصورة
m.a.zayed@mans.edu.eg

السيد الشريبي الأشقر

Elsayed Elashkar

أستاذ مساعد بقسم العلوم الإدارية
كلية المجتمع بجامعة الملك سعود
مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة بجامعة المنصورة
sayed_ashkar@mans.edu.eg

رابط المجلة: <https://jst.journals.ekb.eg/>

المخلص:

على الرغم من أهمية جداول الحياة المختصرة، إلا أنها لا تقي دائماً باحتياجات الباحثين، وفي كثير من الحالات يتطلب الأمر إعادة تبويبها في فئات أحادية. وتهدف هذه الدراسة إلى تقديم مجموعة من طرق الاستكمال التي لم يتم تناولها كثيراً في الدراسات العربية في مجال العلوم الاكتوارية، تتمثل في طريقة أكيفا وطريقة إننت-جونسون بالإضافة إلى طريقة تقوم على "المدخل التبايني" في التحليل الرياضي، بالتطبيق على جدول الحياة القومي المختصر لمصر لعام 2016م. وأشارت النتائج إلى أن طريقة إننت جونسون تعطي أقرب التقديرات للقيم الفعلية، وعند استخدام طريقتي أكيفا، الأصلية والمحسنه، أعطت الطريقة الأصلية تقديرات أدق لعدد الباقيين على قيد الحياة بالنسبة للإناث مقارنة بالطريقة المحسنة، بينما كان العكس هو الصحيح في حالة الذكور. وعند مقارنة طريقتي أكيفا مع المدخل التبايني، أعطى الأخير نتائج أفضل في جميع الحالات، كما أنه يتميز بالمرونة في اختيار قيمة معلمة الاستكمال للوصول إلى دقة تقارب نتائج طريقة إننت-جونسون. وتمت التوصية بالتوسع في دراسة خصائص طرق الاستكمال المقدمة في هذه الدراسة في حالة مجتمعات وبيانات ذات طبيعة مختلفة، وبالاستفادة من أسس التحليل الرياضي للوصول إلى تقريبات عديدة للقيم المستكملة باستخدام صيغ رياضية متعددة.

الكلمات المفتاحية: الاستكمال - أكيفا - المدخل التبايني - إننت-جونسون.



Abstract:

Despite the importance of abridged life tables, they do not always meet the needs of researchers, and in many cases, it is necessary to convert them into complete tables. This study aims to present a set of interpolation methods that have not been addressed much in Arab studies in the field of actuarial science, which are Akima method, Elandt-Johnson method, in addition to a method based on a “variational approach” in mathematical analysis, applied to Egypt’s abridged national life table of 2016. The results indicated that Elandt-Johnson method produces the closest estimates to the actual values, and that the original Akima method gave more accurate estimates of the number of survivors for females compared to the improved method, while the opposite was true in the case of males. When comparing Akima methods with the variational approach, the latter gave better results in all cases, and it is characterized by the flexibility to choose a value for the interpolation parameter to approximate the accuracy of Elandt-Johnson method’s results. It was recommended to further study the characteristics of the interpolation methods presented in this study in cases of populations and data of different natures, and to take advantage of the foundations of mathematical analysis to reach numerical approximations for the interpolated values using various mathematical formulas.

Keywords: Interpolation – Akima - variational approach – Elandt-Johnson.

1. مقدمة:

تعتبر جداول الحياة أداة هامة يعتمد عليها في تقدير احتمالات الحياة والوفاء بغرض الاستفادة منها في إعداد الخطط السكانية والصحية والاجتماعية على المستوى القومي. وفي مجال تأمينات الأشخاص، تشكل جداول الحياة، سواء القومية أو الاكتوارية، أحد الأسس الفنية للحسابات الاكتوارية.

ويتم عادة إعداد جداول الحياة القومية من الإحصاءات العامة للسكان والسجلات الحيوية، ولا اعتبارات تتعلق بطبيعة ووفرة البيانات، كثيرا ما يتم إعداد هذه الجداول على أساس مختصر، أي مبنية في فئات عمرية يزيد طول كل منها عن سنة.

وعلى الرغم من أهمية جداول الحياة المختصرة، إلا أنها لا تفي باحتياجات الباحثين في الدراسات الديموغرافية والخبراء الاكتواريين والفنيين في مجال تأمينات الأشخاص، وذلك لأن الأمر يحتاج في هذه المجالات إلى إعادة تبويب بيانات جداول الحياة المختصرة كفئات أحادية العمر بدلا من فئات خمسية أو عشرية. ومن هنا كان لابد من إيجاد وسائل من خلالها يمكن استكمال جدول الحياة المختصر وبالتالي التوصل إلى جدول حياة كامل يصلح للأغراض الديموغرافية والاكتوارية.

وقد ظهر الاهتمام منذ زمن بعيد باستحداث أساليب أو وسائل لاستكمال البيانات، سواء في مجالات العلوم الاكتوارية أو في العلوم الأخرى بشكل عام. وأيا كانت الطريقة المستخدمة في الاستكمال، بيانية كانت أو وفق صيغ رياضية، يظل اختيار الطريقة أو الطرق المناسبة للاستكمال، وبما يراعي طبيعة البيانات ويحقق الهدف من عملية الاستكمال، أمرا هاما. وفي حالات كثيرة، يتم استخدام أكثر من طريقة للاستكمال والمفاضلة بينها وفقا لتوجهات الباحث فيما يتعلق بدرجة الدقة المطلوبة وكذلك درجة التمهيد المطلوبة.

2. هدف وحدود البحث:

تهدف هذه الدراسة إلى تقديم مجموعة من الطرق المستخدمة في استكمال البيانات، تتمثل في طريقة أكوما Akima (بأسلوبها الأصلية، والمحسنة) وطريقة إندت - جونسون Elandt-Johnson واللذان يشجع استخدامهما في مجال العلوم الإكتوارية، بالإضافة إلى طريقة حديثة اقترحها (Manejero & Mendoza, 2020) تقوم على ما يسمى "المدخل التبايني" (variational approach) في التحليل الرياضي، وذلك بالتطبيق على عدد الباقيين على قيد



الحياة بجدول الحياة القومي المختصر لجمهورية مصر العربية لعام 2016، والصادر عن منظمة الصحة العالمية (WHO).

3. أهمية البحث:

تتمثل أهمية هذه الدراسة في إثراء المكتبة العربية في مجال دراسات أساليب وطرق استكمال البيانات، وبصفة خاصة في مجال العلوم الإكتوارية، من خلال عرض إحدى الطرق الجديدة لهذا الغرض، وكذلك عرض مجموعة من الأساليب، أكوما Akima والنت-جونسون Elandt-Johson، والتي لم يتم تناولها كثيراً في الدراسات باللغة العربية، ولم يسبق تطبيقها على جداول الحياة المختصرة للسكان في مصر (على حد علم الباحثين).

4. الدراسات السابقة:

هناك العديد من الدراسات التي تناولت واستخدمت طرق الاستكمال لدوال جدول الحياة المختصر، سواء كان الأمر يتعلق بالدالة I_x أو الدالة d_x أو الدالة q_x ، حيث اقترح Akima طريقتين، (Akima, 1970, 1991) لاستكمال الدوال أحادية القيمة ذات المتغير الواحد، ويتم تنفيذ كلتا التقنيتين في برنامج R تحت أسماء Akima Original و Akima Improvement، واستخدمت دراسة (Kostaki, 1991) طريقة Heligman - Pollard formula (H&P8) من أجل بناء جدول حياة كامل من جدول حياة مختصر بالتطبيق على بيانات الوفيات للسويد وذلك خلال الفترة من 1976م حتى 1980م وذلك لكلا الجنسين. قامت دراسة (Kostaki 1992) بعرض وتقييم طريقة Heligman-Pollard (H&P9) صيغة هيليجمان وبولارد ذات التسع معلمات، بالتطبيق على بيانات الوفيات لخمسة بلدان أوروبية ووصلت الدراسة إلى أن هذا الإصدار، الصيغة، يوفر تنعيم أقرب إلى بيانات الوفيات التجريبية من الصيغة الكلاسيكية ذات الثمانية معلمات، وبالتالي القضاء على مصدر الخطأ المنهجي في H&P8.

كما اقترحت دراسة (Ibrahim, 2008) إجراء لتقدير وحساب احتمالات الوفاة لآحاد الأعمار، عن طريق استكمال جدول الحياة المختصر، باستخدام نموذج Heligman-Pollard. مع تطرقها إلى شرح العديد من الطرق الأخرى، ونظراً لأن النموذج يتضمن معادلات غير خطية يتم حلها بدرجة من الصعوبة، فاستخدمت الدراسة برنامج (MATLAB 7.0)، وتم استخدام خوارزمية المربعات الصغرى غير الخطية مع القدرة على تقريب جميع المشتقات من أجل تقدير معلمات النموذج. وتعتمد هذه الخوارزمية على تعديل في إجراء تكرار Gauss Newton،

والمعروف باسم إجراء تكرار Levenberg-Marquardt. بالتطبيق على البيانات التجريبية لسكان ماليزيا للفترة 1991-2000 وكلا الجنسين.

واستخدمت دراسة (Anderson, 1999) طريقة Beer's Formula لبناء جدول حياة كامل للولايات المتحدة الأمريكية، بالتطبيق على الإحصاءات الحيوية والبيانات الطبية للسكان وذلك في سنة 1996م. كما قدمت دراسة (Kostaki & Panousis, 2001) عرضاً نقدياً وتقييماً ومقارنة لأداء مجموع من الطرق والأساليب لاستكمال جدول الحياة المختصر إلى جدول كامل، Relational -Lagrange -natural cubic spline -complete cubic spline - H&P8 H&P8 adjustment - Technique. كما قامت دراسة (الأشقر ، 2008) باستكمال الجدول المختصر باستخدام طريقة كوستاكي Kostaki، وطريقة Lagrange وطريقة Cubic Spline بهدف الوصول إلى جدول حياة كامل من واقع خبرة شركات التأمين المصرية.

كما قامت دراسة (عبد السلام، 2001) بتقديم الأسس العلمية التي تعتمد عليها الصيغ الرياضية التي تستخدم في التوليد في الأبعاد المتساوية ونظرية الفروق وتطبيقها في الأبعاد غير المتساوية (صيغة نيوتن للفروق المقسومة - قاعدة شبرد - قانون لاجرانج ... إلخ)، كما استخدمت الدراسة مؤثرات الفروق الوسطى لاستكمال بمسار واحد وأيضا بمسارين وبصيغ ستيرلنج (Strling)، بسل (Bessel)، أفيرت (Afarte) حيث تكون مسارات مستقيمة أو متعرجة.

وتناولت دراسة (واصف، 2003) استخدام نموذج لاجرانج كأحد طرق الاستكمال بهدف الوصول إلى جدول حياة كامل بالتطبيق على بيانات فعلية تبين الإحصاءات الخاصة بتعداد سكان مصر لعام 1996م وذلك فيما يتعلق بمتوسط عدد السكان وعدد الوفيات حسب الفئات العمرية والجنس. وقامت دراسة (Baili, Micheli, Montanari, & Capocaccia, 2005) بمقارنة أربع طرق استكمال، Elandt - Johnson و Kostaki و Brass logit و Akima، لبناء جداول حياة كاملة بكل طريقة من الطرق الأربع، بالاعتماد على جداول الحياة المختصرة تتعلق بـ 19 منطقة أو دولة أوروبية، من 1954 إلى 2000، وقد توصلت الدراسة إلى أن طريقة Elandt-Johnson للاستكمال كأفضل طريقة. وهذا ما توصلت إليه دراسة (الفراز & محمد، 2015) حيث استخدمت بيانات التعداد العام للسكان في سنة 1997م لدولة العراق لبناء جداول الحياة الكاملة باستخدام طريقتي استكمال، النيت جونسن Elandt-Johnson وطريقة أكوما Akima، من خلال الاعتماد على جداول الحياة المختصرة باستخدام طريقة كوال دمني، في بناء تلك الجداول، ولعل أهم ما ركزت عليه تلك الدراسة هو اختيار أفضل أسلوب لاستكمال الجداول المختصرة.



واعتمدت دراسة (Ibrahim & Siri, 2011) على تقييم ومقارنة أداء طريقتي King's Osculation و Heligman-Pollard بهدف استكمال جدول الحياة المختصر إلى جدول حياة كامل بالتطبيق على بيانات تجريبية عن جداول الحياة المختصرة للسكان الماليزيين للأعوام 1991 و 1995 و 1999م لكلا الجنسين. وقامت دراسة (Ibrahim, 2013) بمقارنة ثلاث طرق للاستكمال باستخدام Heligman-Pollard ونموذج Six-point Lagrangian، King's Osculatory بيانات على جداول الحياة المختصرة للسكان الماليزيين. وتوصلت الدراسة بأن طريقة استكمال Lagrangian ذات النقاط الست تنتج أفضل التقديرات لجدول الحياة الكاملة من جداول الحياة المختصرة لمدة خمس سنوات.

كما قامت دراسة (Riyana, Belwawin, Hasanah, & Ahmad, 2019) بتعديل طريقة استكمال Heligman-Pollard باستخدام معدلات الوفاة لتوزيع Gompertz. بالتطبيق على بيانات جدول حياة مختصر و جدول حياة كامل لبيانات الولايات المتحدة في عام 2014 كاختبار للطريقة المعدلة. حيث تم استخدام جدول الحياة المختصر لتقدير جدول الحياة الكامل باستخدام لطريقة المعدلة. وفي الوقت نفسه، تم استخدام جدول الحياة الكامل للولايات المتحدة في عام 2014م كبيانات مقارنة لتحديد الأخطاء.

5. منهجية البحث:

تتبع الدراسة منهجا مختلطا، وصفيا يتمثل في دراسة بعض أساليب استكمال البيانات، وتحليليا يتمثل في تطبيق الأساليب المقترحة لاستكمال بيانات عدد الباقيين على قيد الحياة بجدول الحياة القومي المختصر لجمهورية مصر العربية لعام 2016، والصادر عن منظمة الصحة العالمية (WHO, 2016)، ومن ثم حساب احتمالات الوفاة عند الأعمار المفردة من بداية الجدول وحتى العمر 90.

6. الأساليب الإحصائية المستخدمة

تناولت عدة دراسات طرق استكمال بعض دوال جدول الحياة المختصر، سواء دالة عدد الباقيين على قيد الحياة I_x أو عدد الوفيات d_x أو احتمالات الوفاة q_x ، ومن هذه الطرق الاستكمال البياني، الاستكمال وفق صيغ رياضية، والاستكمال بأسلوب القيم المحورية. وفي هذه الدراسة يتم استعراض وتطبيق مجموعة من طرق الاستكمال القائمة على الصيغ الرياضية، وفيما يلي نبذة مختصرة عن هذه الطرق:

1.6 طريقة أكوما The Akima Method

اقترح Akima (1970, 1991) طريقتان لاستكمال قيم الدوال أحادية القيمة ذات المتغير الواحد، كلاهما تستخدم دوال متعددة التعريف (piecewise) مكونة من عدة كثيرات حدود من الدرجة الثالثة (Akima, 1991). ويتم تمثيل كل قيمة في البيانات (y) بكثيرة حدود من الدرجة الثالثة في الفترة (x_i, x_{i+1}) كما يلي:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_i) + \alpha_2(x - x_i)^2 + \alpha_3(x - x_i)^3 \quad (1)$$

ويتم تحديد معاملات كثيرات الحدود من خلال قيم كل من y و \hat{y} المقدر عند النقاط P_i في نهاية الفترة، كما يلي:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= y_i, \\ \alpha_1 &= \hat{y}_i, \\ \alpha_2 &= -[2(\hat{y}_i - m_i) + (\hat{y}_{i+1} - m_i)] / (x_{i+1} - x_i), \\ \alpha_3 &= [(\hat{y}_i - m_i) + (\hat{y}_{i+1} - m_i)] / [(x_{i+1} - x_i)^2], \end{aligned} \quad (2)$$

حيث: m_i ميل الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين (P_i, P_{i+1})، أي:

$$m_i = (y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i) \quad (3)$$

ويكمن الاختلاف بين طريقتي الاستكمال لـ Akima في أسلوب تقدير المشتقة الأولى لدالة الاستكمال لكل نقطة بيانات، ففي الطريقة الأصلية، يتم تقدير المشتقة باستخدام إحداثيات لخمس نقاط ($P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$)، بينما في الطريقة الثانية يتم إيجاد المشتقة الأولى لكثيرة حدود من الدرجة الثانية يتم توفيقها لثلاث نقاط (P_{i-1}, P_i, P_{i+1}).

وفقا للطريقة الأصلية (Akima, 1970)، وباستخدام خمس نقاط بيانات، يتم تقدير المشتقة الأولى (الميل) لمنحنى القيم المستكملة عند النقطة P_i كالتالي:

$$\hat{y}_i = (|m_{i+1} - m_i| m_{i-1} + |m_{i-1} - m_{i-2}| m_i) / (|m_{i+1} - m_i| + |m_{i-1} - m_{i-2}|) \quad (4)$$

وفي طريقة Akima المحسنة، يتم الحصول على تقدير مبدئي للمشتقة الأولى كمتوسط مرجح لميل منحنى القيم المستكملة عند نقطتين متتاليتين كالتالي:

$$\hat{y}_i = (m_{i-1} w_{im} + m_i w_{ip}) / (w_{im} + w_{ip}), \quad (5)$$



حيث:

$$w_{im} = 1/|m_{i-1} - m_{i-2}|, w_{ip} = 1/|m_{i+1} - m_i| \quad (6)$$

ويقوم اختيار الوزن على إعطاء التقدير الأولي للمشتقة بناءً على نقاط البيانات على جانبي نقطة معنية وزناً متناسباً بشكل عكسي مع البعد عن هذه النقاط. وفي حالة استخدام أربع نقاط (P_i, P_j, P_k, P_l) ، يتم تقدير المشتقة الأولى عند نقطة البيانات P_i عن طريق كثيرة حدود من الدرجة الثالثة كما يلي:

$$F(i, j, k, l) = \left[\begin{aligned} &(y_j - y_i)(x_k - x_i)^2(x_l - x_i)^2(x_l x_k) \\ &+ (y_k - y_i)(x_l - x_i)^2(x_j - x_i)^2(x_j - x_l) \\ &+ (y_l - y_i)(x_j - x_i)^2(x_k - x_i)^2(x_k - x_j) \end{aligned} \right] \\ \left/ \left[(x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_l - x_i)(x_k - x_j)(x_l - x_k)(x_l - x_j) \right] \right. \quad (7)$$

ويكون مجموع مربعات الانحرافات الكلي هو:

$$V(i, j, k, l) = \sum [y - (b_0 + b_1 x)]^2, \quad (8)$$

ومجموع مربعات المسافة من P_i إلى نقاط البيانات الثلاث الأخرى هو:

$$D(i, j, k, l) = (x_j - x_i)^2 + (x_k - x_i)^2 + (x_l - x_i)^2 \quad (9)$$

وتستخدم طريقة Akima المحسنة أربع تقديرات أولية للمشتقة الأولى، يحسب كل منها على أنه المشتقة الأولى لكثيرة حدود من الدرجة الثالثة، يمكن تمثيلها كالتالي:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{imm} &= F(i, i-3, i-2, i-1), \\ \hat{y}_{im} &= F(i, i-2, i-1, i+1), \\ \hat{y}_{ip} &= F(i, i-1, i+1, i+2), \\ \hat{y}_{ipp} &= F(i, i+1, i+2, i+3), \end{aligned} \quad (10)$$

وتكون الأوزان الأربعة المقابلة للتقديرات الأولية الأربعة في المعادلة رقم (10) هي:

$$w_{imm} = 1/[V(i, i-1, i-2, i-1)D(i, i-3, i-2, i-1)],$$

$$w_{im} = 1/[V(i, i-2, i-1, i+1)D(i, i-2, i-1, i+1)],$$

$$w_{ip} = 1/[V(i, i-1, i+1, i+2)D(i, i-1, i+1, i+2)],$$

$$w_{ip} = 1/[V(i, i-1, i+1, i+2)D(i, i-1, i+1, i+2)], \quad (11)$$

ثم يتم إيجاد المتوسط المرجح التالي كتقدير نهائي للمشتقة الأولى لدالة الاستكمال:

$$\hat{y}_i = \frac{(\hat{y}_{imm} w_{imm} + \hat{y}_{im} w_{im} + \hat{y}_{ip} w_{ip} + \hat{y}_{ipp} w_{ipp})}{(w_{imm} + w_{im} + w_{ip} + w_{ipp})} \quad (12)$$

وعند نقاط البيانات الثلاث الأولى أو الأخيرة، لا تكون كل نقاط البيانات الأربع متاحة، ولا يمكن حساب جميع التقديرات الأساسية الأربعة. وفي مثل هذه الحالة، تستخدم فقط التقديرات الأولية المتاحة لتقدير قيمة y باستخدام المعادلات (1) و (2) و (3).

وعند استخدام أي من الطريقتين لاستكمال عدد الباقيين على قيد الحياة، فإذا كان ${}^A l_x$ ، ${}^C l_x$ يعبر عن عدد الأحياء عند العمر في الجدول المختصر والجدول الكامل على الترتيب، وكان ${}^A l_x = {}^A l_{x+5}$ ، فإن القيم المستكملة لعدد الباقيين على قيد الحياة لجميع الأعمار في الفترة $[x, x+5]$ تكون هي نفسها عدد الأحياء عند العمر x في الجدول المختصر، أي يكون ${}^C l_x = {}^A l_x$.

2.6 طريقة إنت - جونسون Elandt-Johnson Method

تقوم هذه الطريقة بشكل أساسي على استخدام مجموعة من المعاملات المحسوبة سلفاً وبعض المعلمات التي يتم تقديرها، لاستكمال عدد الأحياء في جدول الحياة وذلك بالاعتماد على العمر x وعدد الباقيين على قيد الحياة ${}^A l_x$ الذي يتم الحصول عليه من جدول الحياة المختصر (Elandt-Johnson & Johnson, 1980). ويتم تقدير عدد الباقيين على قيد الحياة بجدول الحياة الكامل ${}^C l_x$ باستخدام ثلاثة أنواع من مخططات الاستكمال تختلف حسب نطاق الأعمار: بالنسبة للأعمار من (0 - 9):

يتم ضرب المعاملات في الجدول (1) في ${}^A l_x$ بشكل خطي.

جدول رقم (1): المعاملات المستخدمة لحساب ${}^C l_2 - {}^C l_9$

| | ${}^A l_1$ | ${}^A l_5$ | ${}^A l_{10}$ | ${}^A l_{15}$ | ${}^A l_{20}$ | ${}^A l_{25}$ |
|------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ${}^C l_2$ | 0.562030 | 0.717600 | -0.478400 | 0.283886 | -0.100716 | 0.015600 |
| ${}^C l_3$ | 0.273392 | 1.047199 | -0.531911 | 0.299200 | -0.103747 | 0.015867 |
| ${}^C l_4$ | 0.096491 | 1.108800 | -0.328533 | 0.172800 | -0.058358 | 0.008800 |
| ${}^C l_6$ | -0.041667 | 0.798000 | 0.354667 | -0.152000 | 0.048000 | -0.007000 |



| | | | | | | |
|------------|-----------|----------|----------|-----------|----------|-----------|
| ${}^C l_7$ | -0.048872 | 0.561600 | 0.665600 | -0.240686 | 0.072758 | -0.010400 |
| ${}^C l_8$ | -0.037281 | 0.333200 | 0.888533 | -0.244800 | 0.070147 | -0.009800 |
| ${}^C l_9$ | -0.018379 | 0.140800 | 1.001244 | -0.160914 | 0.043116 | -0.005867 |

بالنسبة للأعمار من 10 إلى 74:

يتم ضرب المعاملات في الجدول (2) في ${}^A l_x$ بشكل خطي.

جدول رقم (2): المعاملات المستخدمة لحساب ${}^C l_{11} - {}^C l_{74}$

| | ${}^A l_{5m-10}$ | ${}^A l_{5m-5}$ | ${}^A l_{5m}$ | ${}^A l_{5m+5}$ | ${}^A l_{5m+10}$ | ${}^A l_{5m+15}$ |
|-----------------|------------------|-----------------|---------------|-----------------|------------------|------------------|
| ${}^C l_{5m+1}$ | 0.008064 | -0.07392 | 0.88704 | 0.22176 | -0.04928 | 0.006336 |
| ${}^C l_{5m+2}$ | 0.011648 | -0.09984 | 0.69888 | 0.46592 | -0.08736 | 0.010752 |
| ${}^C l_{5m+3}$ | 0.010752 | -0.08736 | 0.46592 | 0.69888 | -0.09984 | 0.011648 |
| ${}^C l_{5m+4}$ | 0.006336 | -0.04928 | 0.22176 | 0.88704 | -0.07392 | 0.008064 |

حيث:

m : دليل العمر، $m=2$ for ${}^C l_{11} - {}^C l_{14}, \dots, m=14$ for ${}^C l_{70} - {}^C l_{74}$

${}^A l_{5m+j}$: إجمالي عدد الباقيين على قيد الحياة عند العمر $5m+j$ من جدول الحياة

المختصر المتاح، $j = -10, -5, 0, 5, 10, 15$

${}^C l_{5m+i}$: إجمالي عدد الباقيين على قيد الحياة عند العمر $5m+i$ من جدول الحياة الكامل

المقدر، $i = 1, \dots, 4$

بالنسبة للأعمار من 75 فأكثر:

في حالة الأعمار الكبيرة، يستخدم توزيع Gompertz للبقاء على قيد الحياة:

$$S(x) = e^{\frac{R}{a}(1-e^{-ax})} = b^{1-cx} \quad \text{where } x > 0, R > 0, a > 0, b = e^{\frac{R}{a}} \text{ and } c = e^{-a} \quad (13)$$

عند العمر x والمعاملات a و R .

ويتم تقدير المعاملات b و c (دوال في المعلمتين a و R) لكل عمر x باستخدام المعادلة رقم (14)

بحساب اللوغاريتمات للنسبة بين كل قيمتين متتاليتين لـ ${}^A l_x$ ، وينتج عن هذا النظام قيم مقدرة

للمعاملات للعمر x (\hat{b}_x و \hat{c}_x). وتتوقف التقديرات عند $\bar{x} = \Omega - 10$ حيث Ω هو أكبر عمر في

جدول الحياة المختصر.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_x = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{-1/5} \\ \hat{c}_x = 10^{c_x^x (c_x^5 - 1)} \end{array} \right. \text{ where } \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \log_{\{10\}} \frac{A l_x}{A l_{x+5}} \\ y_2 = \log_{\{10\}} \frac{A l_{x+5}}{A l_{x+10}} \\ x = 75, 80, \dots, \Omega - 10 \end{array} \right. \quad (14)$$

بعد تقدير هذه المعلمات نحسب القيم المقدرة لدالة البقاء على قيد الحياة حسب المعادلة رقم (15).

$$\hat{S}(x+i) = \hat{b}_x^{1-\hat{c}_x^{x+i}} \quad \text{where } \begin{array}{l} i = 1, \dots, 4 \quad \text{for } x = 75, 80, \dots, \Omega - 15 \\ i = 1, \dots, (109 - \Omega) \quad \text{for } x = \Omega - 15 \end{array} \quad (15)$$

وبدءًا من قيم دالة البقاء على قيد الحياة $\hat{S}(x)$ ، يُقدَّر إجمالي عدد الباقيين على قيد الحياة في جدول الحياة الكامل ${}^c l_x$ كالتالي:

$${}^c l_{x+i} = A l_x \frac{\hat{S}(x+i)}{\hat{S}(x)} \quad \text{where } \begin{array}{l} i = 1, \dots, 4 \quad \text{for } x = 75, 80, \dots, \Omega - 15 \\ i = 1, \dots, (109 - \Omega) \quad \text{for } x = \Omega - 15 \end{array} \quad (16)$$

3.6 المدخل التبايني (Variational Approach) لاستكمال البيانات

يقوم هذا الأسلوب الذي اقترحه (Manejero & Mendoza, 2020)، على "صياغة العنصر المحدود" Finite Element Formulation في حل المعادلات التفاضلية. ويتم إيجاد القيم المستكملة \hat{y}_i باستخدام البيانات الخام y_i وقيمة ثابتة $\lambda \geq 0$ بحيث يتم تدنية المقدار التالي إلى أقل ما يمكن:

$$F(\hat{y}) + \lambda S(\hat{y}) = \sum_{i=1}^n w_i (\hat{y}_i - y_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^n (\Delta \hat{y}_i)^2, \quad (17)$$

حيث:

λ : قيمة غير سالبة، وتحدد درجة نعومة أو تمهيد القيم المستكملة،

w_i : أوزان يتم تحديدها وفقا لما يراه الباحث،

Δ : معامل الفروق $(\Delta \hat{y}_i = \hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i)$.

وللحصول على القيم المستكملة، يتم صياغة المشكلة في شكل نظام خطي كالتالي:

$$\hat{y} = (W + \lambda K^T K)^{-1} W y, \quad (18)$$

حيث:



W : مصفوفة قطرية تحتوي على قيم الأوزان w_i ،

$$K_{ij} = (-1)^{i+j-i} \binom{1}{j-i}, i=1, \dots, n-1 \quad j=i, \dots, i+1, \quad K_{\hat{y}} = (\Delta \hat{y}_1, \Delta \hat{y}_2, \dots, \Delta \hat{y}_{n-1})^T : K_{n-1 \times n}$$

ولحل النظام الخطي السابق، تُعاد صياغة المعادلة رقم (17) كما بالشكل التالي:

$$J(\hat{y}) = \int_{\Omega} w(x) [\hat{y}(x) - f(x)]^2 dx + \lambda \int_{\Omega} [\nabla \hat{y}(x)]^2 dx, \quad (19)$$

حيث: Ω هي منطقة في \mathbb{R}_n و $n \in \mathbb{N}$.

ثم يتم إيجاد مجموعة من القيم y^* تنتمي إلى فضاء احتمالي V بما يجعل المقدار السابق أقل ما يمكن، أي: $y^* = \arg \min_{\hat{y} \in V} J(\hat{y})$ ، ولتحديد الفضاء الاحتمالي V يتم حل مشكلة الأمثلية:

$$y^* = \arg \min_{\hat{y} \in H^1(\Omega)} J(\hat{y}) \quad (20)$$

ويمكن التعبير عن المقدار السابق باستخدام المدخل التبايني Variational approach على النحو التالي (Manejero & Mendoza, 2020):

$$\int_{\Omega} w(x) \hat{y}_h(x) dx + \lambda \int_{\Omega} \nabla \hat{y}_h(x) \cdot \nabla \hat{y}_h(x) dx = \int_{\Omega} w(x) f(x) y_h(x) dx \quad (21)$$

ثم يتم استخدام مجموعة دوال $\phi_i(x)$ في الفضاء V_h تسمى "دوال الأساس"، حيث:

$$\hat{y}_h = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \phi_i(x) \quad (22)$$

وأخيراً، يتم حل نظام المعادلات على الصورة:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \int_{\Omega} w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) + \lambda \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x) dx \\ & = \sum_{i=1}^n f_i \int_{\Omega} w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (23)$$

لإيجاد قيم \hat{y}_i ، ومن ثم التعويض بها في المعادلة رقم (22) للوصول إلى البيانات المستكملة.

7. التحليل والنتائج:

تم تطبيق الأساليب التالية لاستكمال عدد الأحياء لكل من الذكور والإناث في جدول الحياة القومي المختصر لمصر عن عام 2016م:
(أ) طريقة Akima.

(ب) طريقة Elandt-Johnson.

(ج) المدخل التبايني (VA).

وقد تم حساب القيم المستكملة لعدد الباقيين على قيد الحياة، وحساب احتمالات الوفاة باستخدام برامج Excel, R, MATLAB R2020a. وفيما يلي ملخص لخطوات ونتائج التحليل.

(أ) طريقة Akima

تم تطبيق كل من طريقتي Akima، الأصلية والمحسنة، على بيانات أعداد الباقيين على قيد الحياة لفئات جدول الحياة المختصر، ويعرض الجدولان رقم (3) ورقم (4) على الترتيب أعداد الباقيين على قيد الحياة عند الأعمار من صفر إلى 90 لكل من الذكور والإناث المستكملة بالطريقتين.

جدول رقم (3): عدد الأحياء المستكمل باستخدام طريقة Akima الأصلية

| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 1 | 98186 | 98315 | 24 | 96310 | 97220 | 47 | 92071 | 94804 | 70 | 57216 | 69985 |
| 2 | 98117 | 98234 | 25 | 96182 | 97171 | 48 | 91628 | 94540 | 71 | 54746 | 67895 |
| 3 | 98050 | 98158 | 26 | 96053 | 97121 | 49 | 91107 | 94232 | 72 | 52005 | 65554 |
| 4 | 97985 | 98089 | 27 | 95923 | 97068 | 50 | 90525 | 93891 | 73 | 49037 | 62922 |
| 5 | 97923 | 98029 | 28 | 95791 | 97007 | 51 | 89898 | 93530 | 74 | 45942 | 60052 |
| 6 | 97864 | 97981 | 29 | 95658 | 96942 | 52 | 89172 | 93107 | 75 | 42818 | 56999 |
| 7 | 97807 | 97941 | 30 | 95524 | 96873 | 53 | 88298 | 92585 | 76 | 39764 | 53819 |
| 8 | 97753 | 97902 | 31 | 95388 | 96804 | 54 | 87302 | 91988 | 77 | 36777 | 50585 |
| 9 | 97700 | 97865 | 32 | 95248 | 96731 | 55 | 86207 | 91337 | 78 | 33790 | 47333 |
| 10 | 97647 | 97828 | 33 | 95099 | 96651 | 56 | 85040 | 90656 | 79 | 30805 | 44067 |
| 11 | 97593 | 97792 | 34 | 94945 | 96567 | 57 | 83833 | 89939 | 80 | 27827 | 40788 |
| 12 | 97540 | 97758 | 35 | 94787 | 96478 | 58 | 82544 | 89134 | 81 | 24859 | 37497 |
| 13 | 97489 | 97727 | 36 | 94629 | 96385 | 59 | 81089 | 88199 | 82 | 21994 | 34193 |
| 14 | 97434 | 97696 | 37 | 94464 | 96285 | 60 | 79379 | 87090 | 83 | 19294 | 30871 |
| 15 | 97370 | 97661 | 38 | 94287 | 96174 | 61 | 77329 | 85764 | 84 | 16715 | 27524 |
| 16 | 97292 | 97619 | 39 | 94101 | 96055 | 62 | 75074 | 84243 | 85 | 14212 | 24148 |
| 17 | 97195 | 97571 | 40 | 93911 | 95931 | 63 | 72808 | 82604 | 86 | 11743 | 20737 |
| 18 | 97079 | 97521 | 41 | 93719 | 95807 | 64 | 70538 | 80883 | 87 | 9296 | 17112 |
| 19 | 96953 | 97469 | 42 | 93509 | 95674 | 65 | 68268 | 79115 | 88 | 6894 | 13149 |
| 20 | 96821 | 97418 | 43 | 93266 | 95524 | 66 | 66005 | 77335 | 89 | 4541 | 8925 |
| 21 | 96691 | 97367 | 44 | 92997 | 95361 | 67 | 63804 | 75567 | 90 | 2242 | 4517 |
| 22 | 96564 | 97318 | 45 | 92712 | 95189 | 68 | 61661 | 73780 | | | |
| 23 | 96437 | 97269 | 46 | 92419 | 95013 | 69 | 59493 | 71933 | | | |

جدول رقم (4): عدد الأحياء المستكمل باستخدام طريقة Akima المحسنة

| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 1 | 98186 | 98315 | 24 | 96311 | 97220 | 47 | 92060 | 94801 | 70 | 57273 | 70065 |
| 2 | 98113 | 98230 | 25 | 96182 | 97172 | 48 | 91631 | 94547 | 71 | 54746 | 67895 |
| 3 | 98046 | 98155 | 26 | 96053 | 97121 | 49 | 91129 | 94251 | 72 | 51980 | 65463 |
| 4 | 97982 | 98089 | 27 | 95923 | 97067 | 50 | 90552 | 93913 | 73 | 49048 | 62802 |
| 5 | 97921 | 98031 | 28 | 95791 | 97008 | 51 | 89898 | 93530 | 74 | 46000 | 59950 |
| 6 | 97864 | 97981 | 29 | 95659 | 96944 | 52 | 89137 | 93089 | 75 | 42889 | 56943 |



| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 7 | 97808 | 97936 | 30 | 95525 | 96876 | 53 | 88254 | 92577 | 76 | 39764 | 53819 |
| 8 | 97753 | 97895 | 31 | 95388 | 96804 | 54 | 87266 | 91999 | 77 | 36674 | 50624 |
| 9 | 97700 | 97858 | 32 | 95248 | 96728 | 55 | 86189 | 91357 | 78 | 33635 | 47386 |
| 10 | 97646 | 97823 | 33 | 95101 | 96650 | 56 | 85040 | 90656 | 79 | 30649 | 44112 |
| 11 | 97593 | 97792 | 34 | 94949 | 96567 | 57 | 83816 | 89900 | 80 | 27723 | 40813 |
| 12 | 97540 | 97762 | 35 | 94792 | 96479 | 58 | 82475 | 89065 | 81 | 24859 | 37497 |
| 13 | 97488 | 97730 | 36 | 94629 | 96385 | 59 | 80975 | 88120 | 82 | 22067 | 34178 |
| 14 | 97432 | 97697 | 37 | 94461 | 96284 | 60 | 79273 | 87030 | 83 | 19356 | 30855 |
| 15 | 97368 | 97660 | 38 | 94288 | 96176 | 61 | 77329 | 85764 | 84 | 16729 | 27517 |
| 16 | 97292 | 97619 | 39 | 94107 | 96061 | 62 | 75170 | 84299 | 85 | 14190 | 24148 |
| 17 | 97197 | 97572 | 40 | 93918 | 95938 | 63 | 72894 | 82674 | 86 | 11743 | 20737 |
| 18 | 97081 | 97523 | 41 | 93719 | 95807 | 64 | 70565 | 80937 | 87 | 9344 | 17146 |
| 19 | 96953 | 97472 | 42 | 93505 | 95669 | 65 | 68248 | 79141 | 88 | 6957 | 13258 |
| 20 | 96821 | 97420 | 43 | 93270 | 95523 | 66 | 66005 | 77335 | 89 | 4594 | 9092 |
| 21 | 96691 | 97367 | 44 | 93012 | 95367 | 67 | 63863 | 75575 | 90 | 2270 | 4667 |
| 22 | 96565 | 97317 | 45 | 92729 | 95198 | 68 | 61749 | 73828 | | | |
| 23 | 96439 | 97268 | 46 | 92419 | 95013 | 69 | 59580 | 72017 | | | |

(ب) طريقة Elandt-Johnson

تم تطبيق معاملات الاستكمال الموجودة بجدول رقم (1) للحصول على القيم المستكملة لعدد الباقيين على قيد الحياة لكل من الذكور والإناث من العمر 2 وحتى العمر 9 سنوات، والمعاملات الواردة في جدول رقم (2) للحصول على القيم المستكملة لعدد الباقيين على قيد الحياة لكل من الذكور والإناث من العمر 10 وحتى العمر 74 سنة، كما تم تقدير المعلمات \hat{b}, \hat{c} (المعادلات أرقام (13) و(14)) ثم حساب القيمة \hat{S} (المعادلة رقم (15)) لإيجاد عدد الأحياء المستكمل من العمر 76 وحتى نهاية الجدول عند العمر 90 وفقا للصيغة رقم (16). ويعرض الجدول رقم (5) عدد الباقيين على قيد الحياة لكل من الذكور والإناث وفقا لهذه الطريقة.

جدول رقم (5): عدد الأحياء المستكمل باستخدام طريقة إلت جونسون

| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 1 | 98186 | 98315 | 24 | 96181 | 97173 | 47 | 91622 | 94540 | 70 | 54746 | 67895 |
| 2 | 98102 | 98204 | 25 | 96053 | 97121 | 48 | 91128 | 94250 | 71 | 51974 | 65419 |
| 3 | 98018 | 98114 | 26 | 95924 | 97065 | 49 | 90556 | 93915 | 72 | 49053 | 62751 |
| 4 | 97937 | 98041 | 27 | 95793 | 97005 | 50 | 89898 | 93530 | 73 | 46018 | 59911 |
| 5 | 97864 | 97981 | 28 | 95661 | 96941 | 51 | 89133 | 93082 | 74 | 42907 | 56924 |
| 6 | 97797 | 97931 | 29 | 95526 | 96874 | 52 | 88268 | 92574 | 75 | 39764 | 53819 |
| 7 | 97738 | 97890 | 30 | 95388 | 96804 | 53 | 87300 | 92004 | 76 | 36809 | 50749 |
| 8 | 97686 | 97854 | 31 | 95245 | 96730 | 54 | 86225 | 91366 | 77 | 33816 | 47563 |
| 9 | 97638 | 97822 | 32 | 95097 | 96651 | 55 | 85040 | 90656 | 78 | 30808 | 44278 |
| 10 | 97593 | 97792 | 33 | 94946 | 96568 | 56 | 83777 | 89906 | 79 | 27814 | 40914 |
| 11 | 97560 | 97774 | 34 | 94790 | 96480 | 57 | 82386 | 89060 | 80 | 24859 | 37497 |
| 12 | 97516 | 97748 | 35 | 94629 | 96385 | 58 | 80854 | 88098 | 81 | 21975 | 34055 |
| 13 | 97457 | 97713 | 36 | 94462 | 96282 | 59 | 79171 | 87003 | 82 | 19192 | 30621 |
| 14 | 97383 | 97669 | 37 | 94288 | 96172 | 60 | 77329 | 85764 | 83 | 16541 | 27232 |
| 15 | 97292 | 97619 | 38 | 94108 | 96056 | 61 | 75224 | 84274 | 84 | 14049 | 23924 |

| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 16 | 97191 | 97572 | 39 | 93919 | 95935 | 62 | 72999 | 82656 | 85 | 11743 | 20737 |
| 17 | 97077 | 97523 | 40 | 93719 | 95807 | 63 | 70694 | 80941 | 86 | 9644 | 17710 |
| 18 | 96954 | 97472 | 41 | 93510 | 95676 | 64 | 68350 | 79159 | 87 | 7769 | 14879 |
| 19 | 96824 | 97420 | 42 | 93282 | 95535 | 65 | 66005 | 77335 | 88 | 6128 | 12276 |
| 20 | 96691 | 97367 | 43 | 93029 | 95380 | 66 | 63857 | 75633 | 89 | 4721 | 9928 |
| 21 | 96564 | 97319 | 44 | 92744 | 95208 | 67 | 61700 | 73876 | 90 | 3546 | 7854 |
| 22 | 96436 | 97271 | 45 | 92419 | 95013 | 68 | 59492 | 72028 | | | |
| 23 | 96308 | 97223 | 46 | 92049 | 94793 | 69 | 57188 | 70047 | | | |

(ج) المدخل التبايني (VA)

تم تطبيق هذا الأسلوب باستخدام قيمتين للمعلمة λ ، إحداهما $\lambda = 0.001$ وتعطي دقة تقدير عالية، والأخرى تم حسابها على أساس ما يسمى "معيار التحقق المتقاطع المعمم" (Generalized Cross Validation (GCV) (Wahba, 1990, Orfanidis, 2018) والذي يعطي تقديرا مقبولا لهذه المعلمة يحقق التوازن بين درجة الدقة ودرجة التمهيد للقيم المستكملة، وكانت قيم λ وفقا لهذا المعيار للذكور والإناث هي 0.226 و 1.221 على الترتيب.

وتم الحصول على القيم المستكملة لعدد الباقيين على قيد الحياة باستخدام صيغة الاستكمال الخطي التالية لقيم ${}^c l_x$ الناتجة عن تطبيق المدخل التبايني (زايد والأشقر، 2020):

$${}^c l_x = {}^c l_{x-a} + a \left(\frac{{}^c l_{x+b} - {}^c l_{x-a}}{a+b} \right) \quad (24)$$

ويعرض الجدولان أرقام (6) و(7) قيم معدلات الوفاة الممهدة لكل من الذكور والإناث وفقا للمدخل التبايني باستخدام قيمتين مختلفتين للمعلمة λ .

جدول رقم (6): عدد الأحياء المستكمل باستخدام طريقة VA ($\lambda = 0.001$)

| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 1 | 98186 | 98315 | 24 | 96181 | 97171 | 47 | 91410 | 94420 | 70 | 54734 | 67880 |
| 2 | 98105 | 98231 | 25 | 96053 | 97121 | 48 | 90906 | 94124 | 71 | 51750 | 65080 |
| 3 | 98025 | 98148 | 26 | 95920 | 97058 | 49 | 90402 | 93827 | 72 | 48753 | 62264 |
| 4 | 97944 | 98064 | 27 | 95787 | 96994 | 50 | 89890 | 93526 | 73 | 45757 | 59449 |
| 5 | 97864 | 97982 | 28 | 95654 | 96931 | 51 | 88926 | 92956 | 74 | 42761 | 56634 |
| 6 | 97809 | 97943 | 29 | 95521 | 96867 | 52 | 87955 | 92381 | 75 | 39765 | 53812 |
| 7 | 97755 | 97905 | 30 | 95388 | 96803 | 53 | 86983 | 91806 | 76 | 36783 | 50555 |
| 8 | 97701 | 97867 | 31 | 95236 | 96720 | 54 | 86012 | 91231 | 77 | 33802 | 47290 |
| 9 | 97647 | 97830 | 32 | 95085 | 96636 | 55 | 85031 | 90650 | 78 | 30821 | 44026 |
| 10 | 97593 | 97792 | 33 | 94933 | 96553 | 56 | 83498 | 89678 | 79 | 27840 | 40761 |
| 11 | 97533 | 97757 | 34 | 94781 | 96469 | 57 | 81956 | 88699 | 80 | 24865 | 37495 |
| 12 | 97473 | 97722 | 35 | 94629 | 96385 | 58 | 80414 | 87721 | 81 | 22236 | 34145 |
| 13 | 97413 | 97688 | 36 | 94447 | 96270 | 59 | 78872 | 86742 | 82 | 19613 | 30793 |
| 14 | 97353 | 97653 | 37 | 94265 | 96154 | 60 | 77318 | 85752 | 83 | 16989 | 27441 |
| 15 | 97292 | 97618 | 38 | 94083 | 96038 | 61 | 75065 | 84078 | 84 | 14366 | 24089 |
| 16 | 97172 | 97568 | 39 | 93901 | 95923 | 62 | 72800 | 82392 | 85 | 11753 | 20735 |

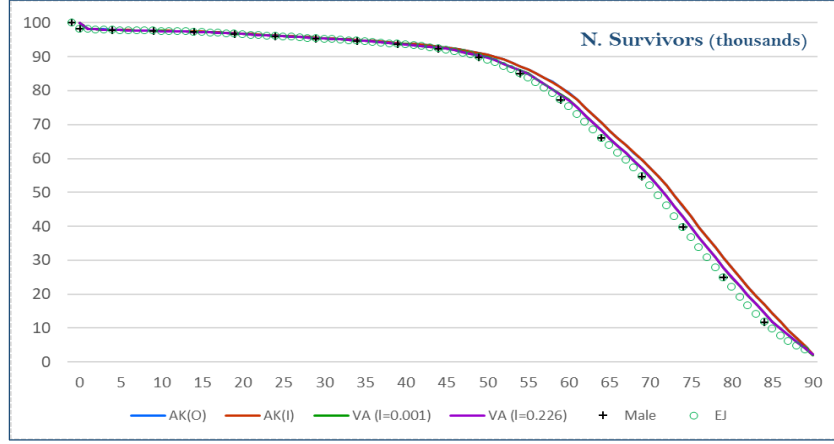


| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 17 | 97052 | 97518 | 40 | 93718 | 95806 | 63 | 70535 | 80707 | 86 | 9786 | 17281 |
| 18 | 96932 | 97468 | 41 | 93459 | 95648 | 64 | 68270 | 79021 | 87 | 7829 | 13825 |
| 19 | 96811 | 97418 | 42 | 93199 | 95490 | 65 | 66005 | 77332 | 88 | 5871 | 10369 |
| 20 | 96691 | 97367 | 43 | 92939 | 95331 | 66 | 63753 | 75447 | 89 | 3914 | 6912 |
| 21 | 96564 | 97318 | 44 | 92679 | 95172 | 67 | 61501 | 73559 | 90 | 1957 | 3456 |
| 22 | 96436 | 97269 | 45 | 92415 | 95011 | 68 | 59250 | 71671 | | | |
| 23 | 96308 | 97220 | 46 | 91914 | 94717 | 69 | 56998 | 69783 | | | |

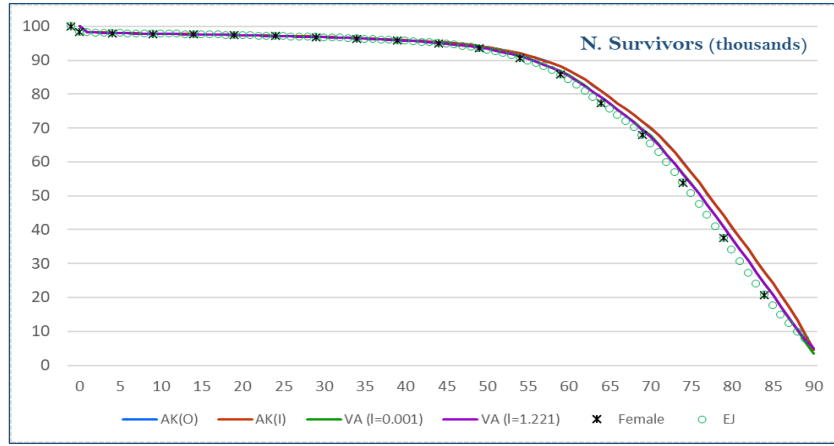
جدول رقم (7): عدد الأحياء المستكمل باستخدام طريقة VA ($\lambda: GCV_{\min}$)

| x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f | x | l_x^m | l_x^f |
|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|
| 1 | 98186 | 98315 | 24 | 96181 | 97167 | 47 | 91409 | 94397 | 70 | 54569 | 67377 |
| 2 | 98100 | 98196 | 25 | 96052 | 97113 | 48 | 90904 | 94093 | 71 | 51727 | 64865 |
| 3 | 98024 | 98137 | 26 | 95920 | 97054 | 49 | 90388 | 93762 | 72 | 48750 | 62164 |
| 4 | 97945 | 98068 | 27 | 95787 | 96992 | 50 | 89786 | 93373 | 73 | 45757 | 59374 |
| 5 | 97870 | 98004 | 28 | 95654 | 96928 | 51 | 88912 | 92887 | 74 | 42761 | 56520 |
| 6 | 97810 | 97952 | 29 | 95521 | 96862 | 52 | 87953 | 92340 | 75 | 39768 | 53564 |
| 7 | 97755 | 97909 | 30 | 95384 | 96792 | 53 | 86981 | 91758 | 76 | 36784 | 50451 |
| 8 | 97701 | 97869 | 31 | 95236 | 96715 | 54 | 85994 | 91135 | 77 | 33802 | 47245 |
| 9 | 97647 | 97831 | 32 | 95084 | 96633 | 55 | 84904 | 90427 | 78 | 30823 | 44001 |
| 10 | 97591 | 97794 | 33 | 94933 | 96549 | 56 | 83481 | 89576 | 79 | 27851 | 40735 |
| 11 | 97532 | 97758 | 34 | 94780 | 96461 | 57 | 81953 | 88636 | 80 | 24945 | 37445 |
| 12 | 97473 | 97722 | 35 | 94622 | 96367 | 58 | 80411 | 87642 | 81 | 22247 | 34123 |
| 13 | 97412 | 97687 | 36 | 94446 | 96262 | 59 | 78849 | 86577 | 82 | 19614 | 30782 |
| 14 | 97351 | 97650 | 37 | 94265 | 96149 | 60 | 77157 | 85369 | 83 | 16992 | 27431 |
| 15 | 97278 | 97610 | 38 | 94083 | 96033 | 61 | 75043 | 83915 | 84 | 14387 | 24071 |
| 16 | 97170 | 97565 | 39 | 93899 | 95912 | 62 | 72797 | 82320 | 85 | 11902 | 20696 |
| 17 | 97052 | 97517 | 40 | 93701 | 95782 | 63 | 70535 | 80661 | 86 | 9807 | 17299 |
| 18 | 96932 | 97467 | 41 | 93457 | 95637 | 64 | 68270 | 78963 | 87 | 7831 | 13918 |
| 19 | 96811 | 97418 | 42 | 93199 | 95480 | 65 | 66008 | 77213 | 88 | 5874 | 10618 |
| 20 | 96689 | 97368 | 43 | 92938 | 95316 | 66 | 63754 | 75386 | 89 | 3929 | 7536 |
| 21 | 96563 | 97318 | 44 | 92671 | 95140 | 67 | 61501 | 73506 | 90 | 2079 | 5006 |
| 22 | 96436 | 97269 | 45 | 92361 | 94935 | 68 | 59247 | 71579 | | | |
| 23 | 96308 | 97218 | 46 | 91907 | 94681 | 69 | 56975 | 69571 | | | |

ويوضح الشكلان أرقام (1) و (2) القيم المستكملة لعدد الباقيين على قيد الحياة لكل من الذكور والإناث على الترتيب للأعمار من بداية جدول الحياة وحتى العمر 90، بجميع طرق الاستكمال المطبقة في هذه الدراسة.



شكل رقم (1): عدد الأحياء المستكمل للذكور



شكل رقم (2): عدد الأحياء المستكمل للإناث

كما تم حساب متوسط الانحرافات المطلقة (Mean Absolute Deviations) MAD للقيم المستكملة، باستخدام الصيغة رقم (25)، وكانت النتائج كما بجدول رقم (8).

$$MAD = \frac{1}{n_A} \sum_{i=0}^{\omega_A} |{}^A l_i - {}^c l_i|, \quad (25)$$

حيث:

n_A : عدد الفئات في جدول الحياة المختصر،

ω_A : آخر عمر في جدول الحياة المختصر.

جدول رقم (8): متوسط الانحرافات المطلقة (MAD) للبيانات المستكملة

| AK(O) | | AK(I) | | EJ | | VA ($\lambda = 0.001$) | | VA ($\lambda = GCV_{\min}$) | |
|--------|--------|--------|--------|------|------|--------------------------|------|-------------------------------|--------|
| M | F | M | F | M | F | M | F | M | F |
| 963.07 | 884.70 | 958.20 | 888.60 | 0.00 | 0.00 | 3.38 | 2.91 | 50.66 | 102.33 |

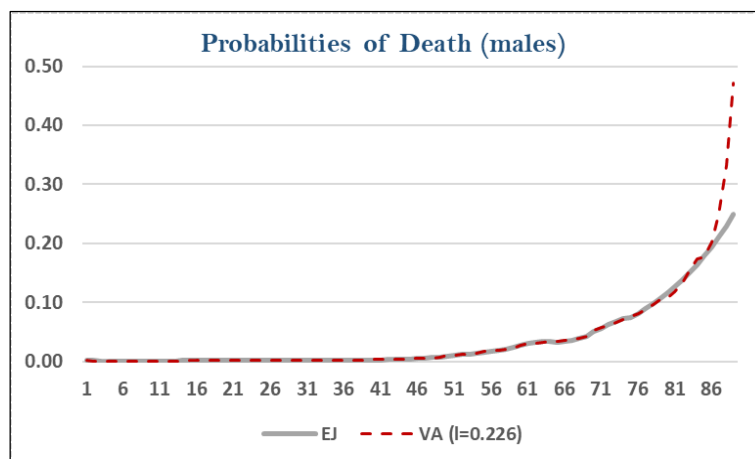


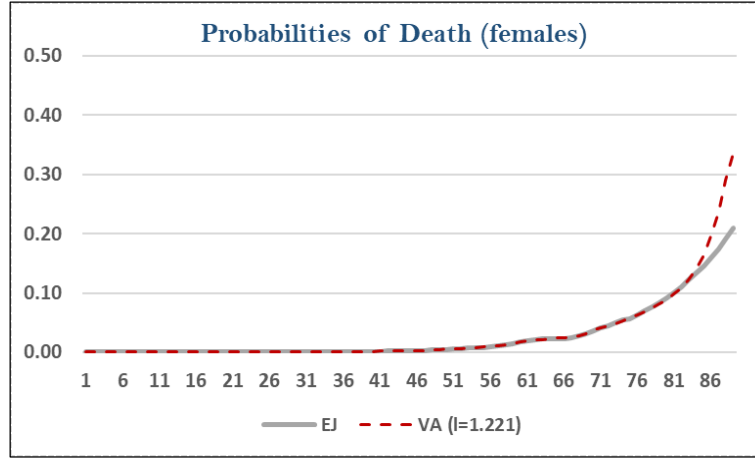
وبناء على النتائج المعروضة بالجداول والأشكال السابقة، وكذلك قيم متوسط الانحرافات المطلقة المعروضة بجدول رقم (8)، يتضح أن طريقة إينت جونسون تعطي أقرب التقديرات للقيم الفعلية، ويرجع ذلك إلى أنها تستكمل البيانات غير الموجودة فقط وبالتالي تتطابق القيم الناتجة عنها عند بداية كل فئة مع القيم الفعلية بالضرورة، وهو الأمر الذي يؤدي إلى زيادة الدقة في القيم المستكملة بهذه الطريقة.

وعند استخدام طريقتي Akima، يُلاحظ أن الطريقة الأصلية تعطي تقديرات أدق نسبياً لعدد الباقيين على قيد الحياة بالنسبة للإناث مقارنة بالطريقة المحسنة، بينما كان العكس هو الصحيح في حالة الذكور. أما بالنسبة للمدخل التبايني (VA)، ووفقاً لخصائص الحساب، تكون التقديرات أكثر دقة كلما قلت قيمة المعلمة λ .

وعند مقارنة طريقتي Akima مع المدخل التبايني، نجد أن الأخير يعطي نتائج أفضل في جميع الحالات، كما أنه يتميز بالمرونة في اختيار قيمة المعلمة λ وبحيث يمكن أن تصل نتائجه إلى نفس درجة الدقة لنتائج الطرق القائمة على معاملات ثابتة محددة سلفاً مثل إينت جونسون وغيرها.

والجدير بالذكر أنه بعد استكمال قيم عدد الباقيين على قيد الحياة (l_x^c)، يمكن حساب احتمالات الوفاة، وبالتالي إعداد جدول حياة كامل ينتهي عند العمر 91. وقد يقتضي الأمر، قبل إعداد الجدول، تمهيد قيم عدد الأحياء أو عدد الوفيات أو احتمالات الوفاة، ولكن يخرج ذلك عن نطاق اهتمام الدراسة الحالية. ويوضح شكل رقم (3) معدلات الوفاة للذكور والإناث المحسوبة من عدد الأحياء المستكمل بطريقتي EJ ، VA.





شكل رقم (3): احتمالات الوفاة للذكور والإناث

8. التوصيات:

1. التوسع في دراسة خصائص طرق الاستكمال المقدمة في هذا البحث في حالة مجتمعات مختلفة وبيانات ذات طبيعة مختلفة.
2. التنسيق بين الجهات المتعددة ذات الصلة بالبيانات السكانية والديموغرافية في مصر، في مجال جمع وتنظيم هذه البيانات وإتاحتها بشكل مفيد لمجتمع الباحثين ولأغراض التطوير والبحث العلمي.
3. بحث إمكانية تطبيق أسس التحليل الرياضي لمحاولة الوصول إلى تقريبات عديدة للقيم المستكملة باستخدام صيغ رياضية ونماذج أخرى تختلف في طبيعتها عما اقترحه كل من Manejero & Mendoza.



المراجع العربية:

- الأشقر، السيد الشرييني. (2008). بناء جدول حياة من واقع خبرة شركات التأمين المصرية. رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التجارة جامعة المنصورة.
- القرز، قتيبة نبيل & محمد، ذو الفقار جاسم. (2015). اختيار أفضل نموذج لبناء جداول الحياة في العراق. مجلة الاقتصاد والعلوم الإدارية، (85)، 360-360.
- زايد، محمد عبداللطيف، الأشقر، السيد الشرييني. (2020). المدخل التبايني في التحليل الرياضي كطريقة حديثة لتسوية معدلات الوفاة. المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية، كلية التجارة، جامعة دمياط، المجلد الأول، العدد الثاني، ج2.
- عبد السلام، ناشد محمود. (2001). الاستكمال الأمثل للجداول الاكتوارية وتوليد القيم الغير موجودة في نطاقها. مجلة المحاسبة والإدارة والتأمين، كلية التجارة، جامعة القاهرة (5).
- واصف، جمال عبد الباقي. (2003). نموذج لاجرانج كأساس لإستكمال جدول الحياة المختصر نحو جدول حياة كامل - دراسة تطبيقية على المجتمع المصري. المركز الديموجرافي بالقاهرة، المؤتمر السنوي الثالث والثلاثون لقضايا السكان والتنمية وتحديات القرن الحادي والعشرين.

المراجع الأجنبية:

- Akima, H. (1970). A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *Journal of the ACM*, 17(4), 589-602.
- Akima, H. (1991). A method of univariate interpolation that has the accuracy of a third-degree polynomial. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 17(3), 341-366
- Anderson, R. N. (1999). Method for constructing complete annual US life tables (Vol. 129): National Ctr for Health Statistics.
- Baili, P., Micheli, A., Montanari, A., & Capocaccia, R. (2005). Comparison of four methods for estimating complete life tables from abridged life tables using mortality data supplied to EURO CARE-3. *Mathematical Population Studies*, 12(4), 183-198.
- Elandt-Johnson, R. C., & Johnson, N. L. (1980). *Survival models and data analysis* (Vol. 110): John Wiley & Sons.
- Ibrahim, R. I. (2008). Expanding an abridged life table using the Heligman-Pollard model. *MATEMATIKA: Malaysian Journal of Industrial Applied Mathematics*, 24, 1-10.
- Ibrahim, R. I. (2013). Comparison of three methods for estimating complete life tables. Paper presented at the AIP Conference Proceedings.

- Ibrahim, R. I., & Siri, Z. (2011). Methods of expanding an abridged life tables: Comparison between two methods. *Sains Malaysiana*, 40(12), 1449-1453 .
- Kostaki, A. (1991). The Heligman-Pollard formula as a tool for expanding an abridged life table. *Journal of Official Statistics*, 7(3), 311-323 .
- Kostaki, A. (1992). A nine- parameter version of the Heligman- Pollard formula. *Mathematical Population Studies*, 3(4), 277-288.
- Kostaki, A., & Panousis, V. (2001). Expanding an abridged life table. *Demographic Research*, 5, 1-22 .
- Manejero, J. L., & Mendoza, R. (2020). Variational Approach to Data Graduation. *Philippine Journal of Science*, 149(2), 431-449 .
- Orfanidis, S. J. (2018). *Applied Optimum Signal Processing* - <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/aosp>.
- Riyana, M., Belwawin, S., Hasanah, N., & Ahmad, M. (2019). Heligman-pollard modification by using the makeham death rate to predict the life table of the elderly. Paper presented at the IOP Conference Series: Earth and Environmental Science.
- Wahba, G. (1990). Estimating the smoothing parameter: Spline models for observational data. *Society for Industrial Mathematics*, Philadelphia, 45-65 .
- WHO, W. H. O. (2016). Life tables by country- Egypt. <https://www.who.int/en>