استخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة في تسعير وثيقة تأمين جميع الأخطار المستقلة الصناعية

د/ محمود عبد العال مشعال

أستاذ مساعد بقسم الرياضة والتأمين والإحصاء

كلية التجارة – جامعة المنوفية

2015

الإطار العام للدراسة

أولا : مقدمة :

يعتبر تكلفة الحماية التأمينية من أهم العوامل المؤثرة فى المنافسة بين شركات التأمين على تقديم الخدمة التأمينية ، وحتى تتمكن شركات التأمين من التنافس فى سوق مفتوح بدون الإضرار بمصالحها فيجب عليها الالتزام بالأسس العلمية لتسعير الأخطار لتحقيق العدالة لطرفي التعاقد (المؤمن والمستأمن) بمعنى أن يتناسب السعر طردياً مع درجات الخطر، وأن يكون كافياً لتغطية قيمة المطالبات ، وأن يؤخذ فى الاعتبار معدلات التقلبات في الخسارة وهامش الربح والمصروفات الإدارية .

ولقد درجت شركات التامين قبل عام 1987 عند إبرام وثائق التأمين على أخطار الممتلكات إبرام وثيقة لكل خطر على حدة ، الأمر الذي واجهت منه عدة مشكلات منها الأعباء الإدارية ، الأخطار الرديئة وبالأخص عند إصدار وثائق تغطى بعض الأخطار لأول مرة بسبب الإقبال الشديد للمؤمن لهم المعرضين لهذه الأخطار، ولتفادى المشاكل المترتبة على الوثائق محددة الخطر قامت بتطبيق وثيقة التامين متعددة التغطيات وهى ما تسمى بالوثيقة المركبة اعتبارا من عام 1987 .

والوثيقة المركبة تقوم بتغطية كل الأخطار التي تشملها الوثيقة بسعر إجمالي موحد أقل من السعر الفردي لكل نوع من الأخطار (أي رسوم مخفضة) وتتميز بالشمولية لتغطيه كل الإخطار كافه (خطر الحريق – خطر السيارات – خطر الحوادث الشخصية) بسعر موحد غير قابل للتجزئة بالنسبة للمؤمن له ، بحيث لا تنتج له انتقاء احدى الأخطار دون غيرها .

وتتعهد شركة التامين عند إصدار الوثيقة المركبة بتعويض المؤمن له عن كافه الخسائر والأضرار الناتجة عن حدوث أي خطر من الأخطار المغطاة وذلك في أي وقت خلال الفترة التأمينية المحددة بالوثيقة، بما لا يتجاوز القيمة الفعلية للخسارة أو مبلغ التأمين المحددة سواء تحققت الخسارة بسبب إحدى هذه الأخطار أو كلها .

ومن أهم أنواع الوثائق المركبة التي صدرت في سوق التأمين المصري ، هي وثيقة حماية الأسرة ومسكنها باعتبارها توفر تغطية لمحتويات المسكن من أخطار الحريق والانفجار والزلازل والعواصف والرياح والفيضانات والشغب والاضطرابات وخلافه، والوثيقة البنكية التي تغطى كافة الأخطار التي تتعرض لها البنوك، ثم وثيقة جميع أخطار التركيب والمقاولين ، كما صدرت وثيقة عرفت باسم وثيقة تامين ضد جميع الأخطار ولكنها اقتصرت على تغطية خطري الحريق والسطو فقط ، وأخيراً صدور وثيقة جميع الأخطار الصناعية

وتختلف الوثائق الفردية عن الوثائق المركبة فى المعالجة الإحصائية للتسعير ، فتحقق الخطر فى الوثائق الفردية (التي تغطى خطر واحد) وما قد يترتب عليه من خسائر مالية إنما يخضع لتوزيع احتمالي معين بسيط (توزيع احتمالي متصل للخسارة لحساب متوسط الخسارة الواحدة ، وتوزيع احتمالي منفصل لعدد الحوادث لحساب معدل تكرار الحوادث) . لكن تحقق الخطر في الوثائق المركبة وما قد يترتب عليه من خسائر مالية إنما يخضع إلى توزيع احتمالي مركب (دمج توزع منفصل مع توزيع متصل) .

ومن خلال البحث الميداني تبين اعتماد شركات التأمين بالسوق المصري على تسعير وثائق التأمين المركبة على معيدي التأمين وهى لا تمثل خبرة السوق المصري ، مما أثر سلبياً على شركات التأمين ، خاصة في ظل تدخل عامل آخر مؤثر فى تحديد السعر هو المنافسة الشديدة والضارة بين الشركات للحصول على الأخطار دون التركيز على العوامل الفنية الاساسية لكل ما يتعلق بالخطر وظروفة، والجدول التالي يوضح أوجه المقارنة بين السعر الموحد والسعر الفعلي فى السوق المصرى على مستوى قطاع الصناعة:

جدول رقم (1)

المقارنة بين السعر الموحد والسعر الفعلي فى السوق المصرى لقطاع الصناعه

القطاع	السعر الموحد	السعر الفعلي					
		مباني		الآلات		بضائع تحت التشغيل	
		ادني سعر	اعلي سعر	ادني سعر	اعلي سعر	ادني سعر	اعلي سعر
١- قطاع الغزل والنسيج	2.5	1.5	10	3	15	3.5	20
٢- قطاع الصناعات الكيماوية	5	2	20	2.5	10	2.5	20
٣- قطاع الصناعات الغذائية	2.5	1.5	15	3.5	15	3.5	15
٤- قطاع المناجم والمحاجر	2.5	2	10	2	10	2	10
٥- قطاع الصناعات الهندسية والكهربية	5	1.5	20	4	20	4	20
٦- قطاع الأدوية والمستحضرات الطبية	3.5	1.5	12	3	12	3	12
٧- قطاع الصناعات الخشبية والأثاث	5	2.5	12.5	6	12.5	6	12.5
٨- قطاع مواد البناء والحراريات	2.5	1.5	10	2.5	10	2.5	10
٩- قطاع الصناعات المعدنية	5	2	3.5	3	5	3	5

المصدر : الهيئة العامة للرقابة على التأمين ، 2013 .

وتفيد الدراسات الأكاديمية ضرورة اعتماد شركات التأمين على نتائج عملياتها وخبراتها الفعلية خلال السنوات السابقة فى دراسة معدلات الخسائر للأخطار المختلفة واستخدام

تلك النتائج في تقدير التسعير الدقيق للتأمين (عبد المولى، المهدى، سالم، وأخرون،2008،ص 115) .

لذلك في هذا البحث يريد الباحث تسعير الوثيقة التي تغطى جميع الأخطار المستقلة الصناعية ، بالتطبيق على قطاع صناعة الحديد والصلب، ويتم تسعير هذه الأخطار من خلال استخدام النماذج المركبة (التوزيعات الاحتمالية المركبة) ،والذى يعتبر أكثر دقة من التوزيعات الاحتمالية البسيطة، ويكون متوسط هذا التوزيع المركب يمثل قسط الخطر وأن انحرافه المعياري يمثل احتياطي التقلبات العكسية ، مع التفرقة بين تسعير الأخطار المستقلة والأخطار غير المستقلة .

ثانيا : مشكله البحث :

بالرغم من أهمية توافر وثيقة التأمين المركبة لتغطية كافة الأخطار التي تتعرض لها المنشئات الكبيرة ، إلا أن هناك مشكلة تواجه شركات التأمين وهى تسعير وثيقة تأمين جميع الأخطار الصناعية بالسوق المصري ، والذى أتضح أنها تعانى من أوجه القصور التالية :

– لا يأخذ هذا السعر فى الاعتبار تناسب قيمة القسط مع درجة الخطر ، حيث هناك سعر موحد للآلات والمباني والسيارات لكل قطاع من قطاع الصناعات .

– تعتمد شركات التأمين المصرية في التسعير على أساس إيجاد القيمة المتوسطة المحسوب عليها أساس السعر لكل الأخطار الفردية المغطاة بوثيقة تأمين جميع الأخطار الصناعية .

– تعد عملية تسعير تأمين الوثائق المركبة من أصعب الأعمال الفنية التى تواجه شركات التأمين وحالياً تعتمد في تسعير تلك الوثيقة على أساس شرائح مطبقة بالخارج، وهذه الأسعار قد لا تناسب ظروف السوق المحلى .

ولهذا أثر ذلك سلباً فى نتائج شركات التأمين ، حيث تدخل فى تحديد السعر المنافسة الضارة دون التركيز على العوامل الفنية الأساسية لكل ما يتعلق بالخطر وظروفه، كما

وصل معدل الخسارة فى بعض الحالات لوثيقة التأمين المركبة إلى 400 % ، وكان من أشهرها هو ما حدث من حريق هائل لشركة (جهينة) لتصنيع الألبان ومشتقاتها فى أحد المصانع الجديدة التى تنشئها الشركة بتكلفة إجمالية 350 مليون جنيه مصري ، وقد تعرض المصنع لخسارة كلية له ولجميع منشئاته.

من هنا تتمثل مشكلة البحث فيما يلى :

وجود صورة جديدة من التغطيات التأمينية لوثيقة تأمين الممتلكات (والتي تشمل تغطية عدة أخطار بسعر موحد) بهدف توفير تغطيات أوسع أدت إلى وجود نتائج سيئة ، متمثلة في زيادة حدة الخسائر ومعدل تكرار الحوادث المتوقعة، لذلك أصبحت عملية تسعير وثائق تأمين المركبة – وثيقة تامين جميع الأخطار الصناعية – أهم المشاكل التي تواجه شركات التأمين والتي تعتمد في تسعير تلك الوثيقة على أساس شرائح مطبقة بالخارج، وهذه الأسعار قد تتفق أو تختلف مع ظروف السوق المحلى، علاوة على اختلاف درجة الخطر في كل الأسواق. بالتالي عدم ملائمة الأسعار السائدة لأخطار تلك الوثائق ومجالات التغطية التي تشملها .

ثالثا : أهداف البحث :

يهدف البحث إلى تصميم نموذج كمي مركب (يعتمد على التوزيعات الاحتمالية المركبة) في تقدير سعر التأمين لوثيقة تأمين جميع الأخطارالمستقلة الصناعية (بالتطبيق على الصناعات المعدنية)، بطريقة تتناسب مع درجة الخطورة وبما لا يخل بأسعار التغطيات الأخرى، ومع المقارنة بين نتائج تطبيق النموذج المقترح والتطبيق الحالي وفقا للسوق المصري .

رابعا : أهمية البحث :

١- من وجهه نظر المؤمن لهم :

أ- انخفاض التكلفة التأمينية والمتمثلة في انخفاض الأقساط المطلوبة والمصاريف المرتبطة باصدار الوثيقة.

ب – قلة عدد الوثائق الصادرة بشركات التأمين مما يجعلها سهلة الحفظ وبسيطة فى العمليات الحسابية الدفترية .

٢- من وجهة نظر شركات التامين (المؤمنين) :

أ- الوفر فى تكاليف إصدار هذا النوع من الوثائق لانخفاض المصاريف الإدارية والعمومية وتكاليف الإنتاج (حيث إن الوثائق الفردية متعددة الإصدارات، متعددة المصاريف الإدارية والعمومية وبالتالي ذات تكلفة إنتاج مرتفعة) .

ب- سهولة التسويق لوثائق التأمين المركبة لكونها منتج واحد يغطى عدة أخطار متنوعة وذلك من جهة تبسيط الإجراءات فيزيد بالتالي النشاط التسويقي .

ج – زيادة الاستقرار لاتساع نطاق الاكتتاب في هذه الوثائق لتغطيتها العديد من الأخطار التي يحتاجها العديد من المؤمن لهم . هذا في الوقت الذي قد يصعب فيه إصدار وثائق فردية لتغطية خطر ما منها لعدم توفر العدد الكافي من المؤمن لهم وذلك في حالات الوثائق التي تغطى خطر محدد ، الأمر الذي يؤدى إلى ربط تغطيتها مع تغطيات أخرى يتحقق لها ميزة قانون الأعداد الكبيرة .

<u>خامسا :منهجية البحث :</u>

١- مجال التطبيق : تم الاعتماد علي بيانات قطاع الصناعات المعدنية لتسعير الأخطار التي تتعرض لها الصناعة وهي خطر الحريق، وخطر السيارات،وأخطار الحوادث الشخصية، وتضم الصناعات المعدنية الشركات التالية :

- شركة الحديد والصلب المصرية بحلوان.
- الشركة الأهلية للصناعات المعدنية .
- شركة مصانع الدلتا للصلب بمسطرد .

ولقد اختار الباحث الصناعات المعدنية كمجال للتطبيق للأسباب التالية :

أ- يعتبر قطاع الصناعات المعدنية أحد أهم القطاعات الإنتاجية التي تعتمد عليها كل الأنظمة الاقتصادية في دول العالم المختلفة، ومن ثم أن وجود نظام تأميني للتامين على المصانع التي يشملها هذا القطاع يعتبر أهم الضرورات الملحة والهامة للحفاظ على هذه المصانع من المخاطر العديدة، والمتمثلة في مخاطر التشغيل من خطر الحريق والهندسي والمسؤوليات والحوادث الشخصية .

ب- أن عمليات هذا القطاع تتميز بأنها ذات كفاءة رأسمالية عالية ، وبالتالي بات من الضروري المحافظة على رأس مال هذا القطاع من خلال التامين عليه وتطوير العمليات التأمينية .

ج- ولقد أثبتت الإحصاءات الماضية خلال فترة الدراسة أن قطاع الصناعات المعدنية يحقق نتائج سيئة بالنسبة لأخطار الحريق ، السيارات ، الحوادث الشخصية ، حيث كانت معدلات الخسائر على التوالي 41% ، 79% ، 21%.

٢- الحدود الزمنية :

سوف تستخدم بيانات هذه الشركات بشكل إجمالي ، لتمثل بيانات قطاع الصناعات المعدنية ، وذلك عن الفترة من 1990حتى 2013 كفترة دراسة لهذا البحث .

٣- أسلوب البحث :

تقوم الدراسة على أساس التحليل العلمي لمفهوم وأهمية تطبيق التوزيعات الاحتمالية المركبة وأساليبها المختلفة ، كما تهتم الدراسة بالجوانب التطبيقية لجميع الأخطار الصناعية بالتطبيق على قطاع الصناعات المعدنية مستخدما التوزيعات الاحتمالية المركبة.

٤- متغيرات الدراسة :

يتوقف تسعير تأمين جميع الاخطار الصناعية على متغيرين أساسيين هما :-

- عدد الحوادث .
- حجم الخسائر.

٥- الأخطار التي يتم تسعيرها :

يتم التطبيق للأخطار المستقلة فى الصناعات المعدنية (خطر الحريق ،خطر السيارات ،خطر الحوادث الشخصية) وذلك بالنسبة لعدد الحوادث (n_1, n_2, n_3) وحجم الخسائر (x_1, x_2, x_3).

٦- النموذج المقترح :

النموذج المقترح هو التوزيعات الاحتمالية المركبة وهى عبارة عن نموذج رياضي مركب من توزعين احتمالين أو أكثر .فقد يكون توزيع منفصل مع توزيع منفصل أو توزيع متصل مع توزيع متصل أو توزيع منفصل مع توزيع متصل .

ويفضل الباحث استخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة فى تسعير وثائق التأمين المركبة لوجود عدة فوائد لا توجد فى غيرها من الطرق العادية (التوزيعات البسيطة) ، والتى يمكن إيجازها فيما يلى :

(أ) كثرة عدد المعالم فى التوزيع المركب وهو ما يودى إلى الدقة فى نتائج تسعير الخطر.

(ب) معلمة التوزيع الاحتمالي المركب متغير عشوائى وليست ثابته : بمعنى تأخذ قيم مختلفة تخضع لتوزيع احتمالي معين.

(ج) القضاء على التباين في درجة الخطر من سنة لأخرى (التحكم في الاختلافات بين الفترات الزمنية) نتيجة اعتبار أن معلمة التوزيع متغير عشوائي .

(د) يفترض التوزيع المركب عدم ثبات العوامل التي تؤثر على الظاهرة من عام لآخر، ومن منطقة لآخري وهو ما يناسب عملية التسعير.

سادساً: خطه البحث:

لتحقيق أهداف البحث ومنهجية البحث تم تنظيم البحث ليتضمن المباحث التالية:

المبحث الأول : خصائص التوزيعات الاحتمالية المركبة.

المبحث الثاني : التوزيعات الاحتمالية البسيطة التي تخضع لها بيانات الدراسة.

المبحث الثالث : دمج التوزيعات الاحتمالية.

المبحث الرابع : تسعير وثيقة تأمين جميع الأخطار المستقلة الصناعية.

النتائج والتوصيات والمراجع .

المبحث الأول

خصائص التوزيعات الاحتمالية المركبة

التوزيعات الاحتمالية المركبة هي دمج توزيع مع توزيع آخر(قد يكون دمج توزيع منفصل مع توزيع منفصل أو توزيع متصل مع توزيع متصل ، أو دمج توزيع منفصل مع توزيع متصل) لنحصل على توزيع مركب يلائم عملية التسعير ، وللتوزيعات المركبة عدة خصائص تتمثل فيما يلى :

أولا: فوائد التوزيعات المركبة :

أن نماذج التوزيعات الاحتمالية المركبة أفضل فى تسعير وثيقة التأمين المركبة من التوزيعات الاحتمالية البسيطة وذلك لوجود عدة فوائد لا توجد فى غيرها من الطرق العادية (البسيطة) يمكن إيجازها فيما يلى :

(أ) عدد المعالم

التوزيعات الاحتمالية البسيطة تحتوى على معلمة أو اثنين ، بينما التوزيعات المركبة تحتوى على عدة معالم اثنين أو أكثر، فكلما كانت معالم التوزيع أكثر كلما كان التوزيع النظري الذى يمثل الظاهرة محل الدراسة اقرب للتوزيع الفعلي ، مما يؤدى إلى الدقة فى نتائج تسعير الخطر.

(ب) ثبات المعلمة

التوزيع الاحتمالي البسيط يفترض ثبات المعلمة، بينما التوزيع الاحتمالي المركب يفترض أن معلمة التوزيع الاحتمالي متغير عشوائي تأخذ قيم مختلفة تخضع لتوزيع احتمالي معين، وهو ما يقضى على التباين فى درجة الخطر من سنة لأخرى (التحكم فى الاختلافات بين الفترات الزمنية).

(ج) العوامل التي تؤثر على الظاهرة :

فى التوزيعات البسيطة يفترض ثبات العوامل التى تؤثر على الظاهرة لثبات المعلمة، بينما فى التوزيع المركب يفترض تغيير العوامل التى تؤثر على الظاهرة من عام

لآخر، ومن منطقة لأخرى وهو ما يناسب عملية التسعير ، والذى يتم تحديده بناء علـــى بيانات تاريخية تتأثر بمجموعة من العوامل التي من المحتمـــل ألا يســـتمر تأثرهـــا فـــى المستقبل .

ثانيا: شروط تطبيق التوزيعات الاحتمالية المركبة :

أ- استقلال الأخطار : يشير الاستقلال إلى التفاوت بين مجموعات الخطر المراد تسعيرها، بمعنى تأخذ التوزيعات الاحتمالية المركبة في الحسبان عند تسعير الوثائق المركبة استقلال الأخطار (بمعنى أن حدوث أي خطر لا يؤثر تحققه على وقوع الخطر الآخر) ، مثل خطر الحريق وخطر السيارات وأخطار الحوادث الشخصية ، حيث أن كل خطر يختلف عن الآخر طبقاً للعوامل التى تؤثر فيه .

فإذا كان X, Y متغيرين عشوائيين (منفصلين أو متصلين)، $F_{X,Y}(X,Y)$ دالة التوزيع المشتركة و $F_{Y,}(y)$ ، $F_{X,}(x)$ دالتا التوزيع الهامشيتان ، فإن X, Y يكونان مستقلان إذا كان :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

أو :

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_{Y(y)}$$

ب- عدم تجانس الاخطار :هو اختلاف تباينات الأخطار التي يتم تسعيرها، وبالتالي يتحقق شرط الاستقلالية ، ويمكن قياس التجانس وعدم التجانس احصائياً من خلال تباين الأخطار.

إذا كان لدينا عينتان عشوائيتان مستقلتان $X = X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m$ ، $Y = Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_m$ مأخوذتان من مجتمع واحد ، ونريد اختبار تجانسها أو عدم

تجانسها، فيتم صياغة فرضية العدم H_0على النحو التالي (فوزى،2004،ص ص -237
: (236

$$H_0; F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv ..... \equiv F_k(x)$$

ثالثاً : التفرقة بين المفاهيم المختلفة :

عند تسعير الأخطار المركبة يجب التفرقة بين المصطلحات المتشابهة إحصائياً وهى تختلف فى معالجتها إحصائياً ، ويمكن توضيحها كالتالي :

١-**أسلوب الدمج**Compound distribution: يشمل أسلوب الدمج ما يلى :

أ- هو دمج توزيع منفصل مع توزيع منفصل (قد يكون نفس التوزيع أو مختلف) ، بمعنى دمج التوزيعات الممثلة لعدد الحوادث فى الأخطار المختلفة لتكون توزيعاً واحداً ، وكذلك دمج التوزيعات الممثلة لحجم الخسائر لتكون توزيعاً واحداً ، ثم استخدام التوزيع الجديد لعدد الحوادث مع التوزيع الجديد لحجم الخسارة لإيجاد الخسارة الإجمالية المتوقعة

.ب- دمج توزيع منفصل مع توزيع متصل آخر (قد يكون نفس التوزيع أو مختلف عنة) ، بمعنى دمج التوزيعات الممثلة لعدد الحوادث فى الأخطار المختلفة مع التوزيعات الممثلة لحجم الخسائر فى الأخطار المختلفة لتكون توزيعاً واحداً ، ثم استخدام التوزيع الجديد لإيجاد الخسارة الإجمالية المتوقعة .

٢- **التوزيعات المركبة لFeller distribution** : فى كثير من الأحوال نلاحظ أن معلمة أو معالم التوزيع تبدو هى الأخرى متغير عشوائى يتبع دالة كثافة احتمالية معينة ، ويكون معلمة أو معالم التوزيع تمثل توزيع احتمالي جديد ،نحضر التوقع والتباين له .

٣- **التوزيعات المشتركة Joint distribution** : هو دمج المتغيرات غير المستقلة (أي المرتبطة ببعضها) وبالتالي يكون لها توزيعات احتمالية مشتركة(المطرفى، جاهين، 2006،ص 172) ، ومن أمثلة الأخطار الغير مستقلة مثل خطر الحريق والأخطار المتحالفة ،حيث يتم دمج المتغيرات الممثلة لعدد الحوادث فى متغير واحد (n_1, n_2, n_3)،وبالمثل دمج المتغيرات الممثلة لحجم الخسارة فى متغير واحد

(x_1, x_2, x_3)، ثم يتم إيجاد توقع عدد الحوادث للمتغير الجديد الإجمالي والتوقع لحجم الخسارة للمتغير الجديد الإجمالي، وبالتالي نحصل على توقع حجم الخسارة الإجمالي المشترك.

رابعاً : أساليب تسعير وثيقة التأمين المركبة :

هناك عدة أساليب لتسعير الوثيقة المركبة وهى :

الأسلوب الأول :

نتنبأ بكل معدل خسارة لكل خطر $R_1, R_2, R_3, ...R_k$

ويكون معدل الخسارة الكلى كالتالى (سالم ، 2004):

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - (R_1 * R_2 + R_1 * R_3 + R_1 * R_4 + R_2 * R_3 + R_2 * R_4 + R_3 * R4)$$
$$+ (R_{123} + R_{124} + R_{134}) - (R_{1234})$$

ذلك يكون حاصل ضرب مبلغ التامين فى R يعطى سعر الوثيقة المركبة :

$$Rate = Amount * R$$

الأسلوب الثاني :

يتم تقدير الخسارة الإجمالية المتوقعة لكل خطر على حده وتقدير القيمة المتوقعة والتباين لقيم MPY باعتبارها متغير عشوائى يمثل أقصى خسارة إجمالية سنوية محتملة : (David,Cumins,1983,pp 263-275)

أي أن : $MPY_1 = E(N_1) * E(X_1)$

و حيث أن : $MPY_1, MPY_2, MPY_3, ...MPY_k$

تمثل متغيراً عشوائياً مطلوب تقدير القيمة المتوقعة له وكذلك التباين .

وبالتالي فإن أقصى خسارة مركبة يساوى :

$$MPY_1 + MPY_2 + MPY_3 + ... + .MPY_k$$

الأسلوب الثالث:

دمج التوزيعات الاحتمالية الممثلة لعدد الحوادث للأخطار المختلفة وإيجاد العـــدد المتوقع للحوادث من الأخطار المتنوعة خلال الفترة القادمة E(N) وكذلك التباين Var(N) ، ودمج التوزيعات الاحتمالية الممثلة لحجم الخسارة لتقدير القيمة المتوقعة لحجم الخســـارة من الأخطار المختلفة E(x) وتباين الخسارة Var(x) ثم تقدير الخسارة الإجمالية المتوقعـــة عن طريق استخدام العدد المتوقع من الأخطار المختلفة وكذلك الحجم المتوقـــع للأخطـــار المختلفة أيضا (Kotb,N.S.,2002,pp 81-88) .

الأسلوب الرابع:

دمج التوزيعات الممثلة لعدد الحوادث فى الأخطار المختلفة لتكون توزيعا واحـــدا وكذلك دمج التوزيعات الممثلة لحجم الخسائر لتكون توزيعا واحدا ثم دمج التوزيع الجديد لعدد الحوادث مع التوزيع الجديد لحجم الخسارة لإيجاد الخسارة الإجمالية المتوقعـــة مـــن تحقق الأخطار المختلفة فى الفترة القادمة.

الأسلوب الخامس :

يطلق على هذه الطريقة التوزيعات المختلطة غير المحدودة ويستخدم هذا الأسلوب فى الوصول إلى التوزيع المركب عن طريق أخذ أحد التوزيعات وبافتراض أن معالم ذلك التوزيع متغير عشوائى وله توزيع احصائى ، فيكون التوزيع الناتج من دمج التوزيع الأساسى مع توزيع المعلمة هو التوزيع المركب (Michael A Bean,2001,p202) .

الأسلوب السادس :

هذا النوع من التوزيعات المركبة قدمه فيلر(Feller,1983,pp.286-288) حيث افترض أن المتغير العشوائى له توزيع إحصائي يحدث بعدد مرات متغيرة ، واهتم بتوزيع مجموع ذلك المتغير حتى القيمة n ، حيث n هى الأخرى متغير عشوائى لها توزيع احتمالي ، ويعد توزيع المجموع هو توزيع مركب ايضا .

لو افترضنا أن x_i متغير عشوائى يتبع توزيع بواسونى بمعلمة λ حيث ان:

n ، i =1,2,3,…,n متغير عشوائى يتبع توزيع احتمالي، لذا فإن أجمالي قيمة المطالبات تتحدد كما يلى:

$$S_N = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

وحيث أن:

S : متغير عشوائى يعبر عن إجمالي قيم المطالبات للمحفظة .

X_i : متغير عشوائى يعبر عن قيمة المطالبة , ولكل قيم X توزيع احتمالي معين بمتوسط μ وتباين σ^2 N :متغير عشوائى يعبر عن عدد المطالبات(وهو مستقلاً تماما عن قيم المطالبات)، والدالة المولدة للاحتمالات بفرض أن عدد المطالبات يتبع توزيع بواسون F(s)، حيث أن :

$$F(s) = = \sum_{\infty} s^x \,.\, p(x)$$

$$\sum_{\infty} s^x . \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^x}{x!}$$

$$F(s) = e^{-\lambda}\, e^{s\lambda}$$

$$= e^{-\lambda + \lambda s}$$

وبفرض أيضاً أن قيم المطالبات يتبع توزيع احتمالي معين فإن متوسط التوزيع الاحتمالي الإجمالي هو عبارة عن حجم الخسائر المتوقعة ويمكن حسابة من خلال التوزيع الاحتمالي المركب الإجمالي المطالبات كما يلى (John Netter , William : Wassermann,1993,p.180)

$$E(S) = \int_0 s.f(s)ds.$$

إذاً التوقع: $E(s) = \lambda\, P$

المبحث الثاني

التوزيعات الاحتمالية البسيطة التي تخضع لها بيانات الدراسة

تم اختبار جودة المطابقة للتوزيعات الاحتمالية التى نخضع لها بيانات الدراسة وبالتالى أمكن تحديد نوع التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لعدد الحوادث والمتصلة لحجم الخسائر كالتالى :

أولاً : تحديد دالة التوزيع المنفصل والمتصل لخطر : الحريق ، والسيارات ، والحوادث الشخصية :

عدد الحوادث متغير عشوائي يأخذ القيم ٠,1,2,3,...,m ومن خلال التوزيعات الاحتمالية يمكن قياس العدد المتوقع للحوادث، وأهم هذه التوزيعات (Vaugh ,E.J,1992,p550):

- توزيع بواسون — توزيع ذات الحدين
- توزيع ذات الحدين السالب — التوزيع الهندسى .

ومن خلال اختبارات جودة المطابقة فإنه أمكن تحديد التوزيعات الاحتمالية المتقطعة لعدد الحوادث (توزيع بواسون ، توزيع ثنائى الحدين ، توزيع ثنائى الحدين السالب) :

(١)توزيع بواسون:

يعتبر التوزيع البواسونى من أهم التوزيعات المتقطعة فى مجال التأمينات العامة حيث إنه يستخدم فى تحليل عدد الحوادث ، ويفترض هذا التوزيع أن جميع الوحدات المعرضة للخطر متجانسة ولها نفس معدل التكرار ، وهذا التوزيع ذو معلمة واحدة وهى λ ، ومتوسط هذا التوزيع يتساوى مع تباينه .

وبفرض أن x عدد المطالبات تتبع توزيع بواسون، فإن دالة الكتلة الاحتمالية تكون كالتالي:

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,3,\ldots,\alpha$$

حيث أن:

λ : معلمة التوزيع (وهى متوسط عدد الحوادث)

x: المتغير العشوائي (عدد الحوادث المطلوب حساب احتمال وقوعها)

وتوقع التوزيـــع: $E(x) = \lambda$

وتباين التوزيـــع: $Var(x) = \lambda$

أى أن الوسط الحسابي لهذا التوزيع = تباين التوزيع = λ

(٢) توزيع ثنائي الحدين :

وبفرض أن (x) يتبع التوزيع ثنائي الحدين ، فإن دالة كثافته الاحتمالية تكون كالتالي:

$$f_{(x)} = C_x^r p^x (1-p)^{x-r}$$

حيث أن :

P ،r : هما معلمتا التوزيع وأن :

P : احتمال وقوع الحادث .

1–P : احتمال عدم وقوع الحادث.

r : تعبر عن عدد الوحدات المعرضة للخطر خلال الفترة الزمنية المحددة .

x : قيمة المتغير العشوائى(يعبر عن عدد المطالبات).

ويتحدد متوسط وتباين التوزيع كالتالي :

الوسط الحسابي: $E(x) = rp$

التبـــايـــن: $Var(x) = rp(1-p)$

(٣) توزيع ذات الحدين السالب :

يعد هذا التوزيع أحد التوزيعات المتقطعة ذات الأهمية التطبيقية فى كثير من المجالات العلمية، حيث يمتاز توزيع ثنائي الحدين السالب بأنه ذو معلمتـــين "لـــذلك فإنـــه يفضـــل استخدامه كتوزيع احتمالي لعدد المطالبات عن توزيع بواسون ذي المعلمة الواحدة ، كمـــا أنه توزيع يأخذ فى اعتباره عدم التجانس بين الوحدات المؤمن عليها (عاشـــور ،2002، ص 302).

وبفرض أن (x) يتبع التوزيع ثنائى الحدين السالب، فإن دالة الكتلـــة الاحتماليـــة تكون كالتالي :

$$f_{(x)} = C_x^{x+r-1} p^r (1-p)^x$$

حيث أن :

r ، p : هما معلمتا التوزيع.

P: احتمال وقوع الحادث.

1−P : احتمال عدم وقوع الحادث.

x : قيمة المتغير العشوائي(يعبر عن عدد المطالبات).

ويتحدد متوسط وتباين التوزيع كالتالي:

متوسط التوزيع: $$E(x) = \frac{r(1-p)}{p}$$

تبـــايـــن التوزيع:

$$Var(x) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

- **توزيعات احتمالية متصلة " تحديد دالة التوزيع لحجم الخسارة " .**

يعتبر حجم الخسارة العامل الثاني المؤثر فى الخسارة، بعد عامل تكرار الخســـارة، ومـــن أهم التوزيعات المستخدمة لقياس شدة الخسارة هى (حمزة،1990،ص 58) :

- التوزيع الأسى
- توزيع جاما

- توزيع وايبل - التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي
- توزيع باريتو - توزيع بيتا

لكن من خلال اختبارات جودة المطابقة فإنه أمكن تحديد التوزيعات الاحتمالية المتصلة لحجم الخسائر (توزيع جاما ، الأسى ، وايبل) لإخطار الحريق والسيارات والحوادث الشخصية لقطاع الصناعات المعدنية .

(١) توزيع جاما:

يعتبر توزيع جاما من أهم التوزيعات المتصلة والهامة لدراسة توزيع حجم المطالبات وتحليل الأخطار غير المتجانسة، وله علاقة بالعديد من التوزيعات، ويقال للمتغير العشوائي x يتبع توزيع جاما بمعالم α, β ، إذا كانت دالة كثافة الاحتمال تأخذ الصورة التالية (Hossack, I. B,1999,p.76) :

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} (\beta x)^{\alpha - 1}$$

ويتحدد متوسط وتباين التوزيع كالتالي :

متوسط التوزيع : $E(x) = \frac{\alpha}{\beta}$

تباين التوزيع : $V(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

(٢) التوزيع الأسى:

يعد التوزيع الأسى حالة خاصة من توزيع جاما ويستخدم بكثرة فى مجال التأمين ، حيث معظم البيانات مثل بيانات أخطار الحريق والسيارات تتبع الأسى .ويقال أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الاحتمالي الأسى إذا كانت دالة كثافة الاحتمال هى (الدش،2006،ص 430) :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad x \geq 0 \quad , \quad \lambda > 0$$

حيث إن λ : معلمة النموذج

توقع التوزيع : $E(x)=\frac{1}{\lambda}$

تباين التوزيع : $Var(x)=\frac{1}{\lambda^2}$

(٣) توزيع وايبل:

إن هذا التوزيع له استخدامات هامة فى مجال التأمينات العامة ، ويقال إن المتغير (x) يتبع توزيع وايبل إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية (المطرفى، جاهين،2006،ص 165) :

$$f(x)=\lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1}.e^{-(\lambda x)^{\alpha}} \quad ; \quad x \geq 0$$

حيث أن λ,α هما معلمتا التوزيع ، x تمثل حجم الخسارة

توقع التوزيع : $E(x)=\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\lambda$

تباين التوزيع : $V(x)=\left[\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})-\left\{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}\right\}^{2}\right]\lambda^{2}$

المبحث الثالث

دمج التوزيعات الاحتمالية

يعرف التوزيع المندمج بأنه دالة احتمالية تجمع بين عدة متغيرات عشوائية مستقلة فى آن واحد، فعلى فرض أن X_1, X_2 متغيران عشوائيان عندئذ فإن النموذج الرياضى الاحتمالي الذى يعبر عن سلوك هذين المتغيرين معاً يسمى التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X_1, X_2 ، وللوصول إلى ذلك يجب التعرف على دالة كثافة الاحتمال المشترك ، ودالة توليد العزوم للتوزيعات الاحتمالية المشتركة.

دالة كثافة الاحتمال المشتركة :

إذا فرضنا أن (X,Y) متغيران عشوائيان فإنه يمكن تعريف دالة كتلة (كثافة)الاحتمال المشتركة والتى يرمز لها بالرمز $f_{X,Y}(X,Y)$ كالتالى (المطرفى، جاهين2006،ص ص173-174) :

أولاً: فى حالة التوزيعات المنفصلة :

تعرف دالة التوزيع المشتركة للمتغيرين العشوائيين المنفصلين (X,Y) من العلاقة

$$f_{X,Y}(X,Y) = p(X = x, Y = y$$

وهذه الدالة الاحتمالية تحقق شروط الدوال الاحتمالية وهى :

$$(1)\, f_{X,Y}(X,Y) \geq 0$$

$$(2) \sum_x \sum_y f_{x,y}(x_i, y_i) = 1$$

ثانياً: فى حالة التوزيعات المتصلة :

تعرف دالة التوزيع المشتركة للمتغيرين العشوائيين المتصلين (X,Y) من العلاقة التالية:

$$f_{X,Y}(X,Y) = p(X \leq x, Y \leq y$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$

ودالة التوزيع المشتركة السابقة تحقق شروط الدوال الاحتمالية وهى :

$$(1)\, f_{X,Y}(X,Y) \geq 0$$

$$(2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

توزيع مجموع المتغيرات العشوائية المستقلة :

نفرض أن : $X_1, X_2, ..., X_n$ تمثل n من المتغيرات العشوائية المستقلة ، كل منها يتبع التوزيع الاحتمالي $fx_i(x_i)$ ، يمكن إيجاد التوزيع الاحتمالي لمجموع هذه المتغيرات وليكن $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ باستخدام طريقة دالة توليد العزوم ، كما يلى : (Emiliano A.Valdez, 2014,p. 78)

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{th(x)}) = M_X[Q(t)]$$

حيث $Q(t)$ دالة رياضية فى t ، وبمعرفة دالة توزيع العزوم للمتغير العشوائى X يمكن التعرف على دالة توزيع العزوم للمتغير العشوائى Y ، ومن ثم معرفة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائى الجديد .

وإذا كان المتغيران العشوائيان (X,Y) مستقلين ، فإن دالة توليد العزوم المشتركة تأخذ الصورة التالية (Martin Haugh ,2010,p. 158) :

١- فى حالة المتغيرات المنفصلة : $M_X(u) = \sum_x \sum_y e^{ux} fx,y(x,y)$

٢- فى حالة المتغيرات المتصلة :

$$M_X(u,v) = \int_x\int_y e^{ux} fx,y(x,y)dxdy$$

وسوف نستعرض فى هذا المبحث دمج التوزيعات المنفصلة مع التوزيعات المنفصلة ، والتوزيعات المتصلة مع التوزيعات المتصلة ، **ثم** تقدير معالم التوزيعات الاحتمالية المركبة.

أولاً : دمج التوزيعات المنفصلة :

(1) دمج توزيع بواسونى مع ثنائي الحدين السالب :

نفرض ان x تتبع توزيع بواسونى بدالة كتلة احتمالية:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,\ldots,r$$

أى أن : X ~ Poisson(λ)

ونفرض أن y تتبع توزيع ثنائى الحدين السالب بدالة كتلة احتمالية:

$$P(y) = C_{r-1}^{r+y-1} P^{r} q^{y}$$

حيث أن :

r> 0y = 0,1,…,r

q = 1−p

إذا دالة الاحتمال المشترك للدالتين معا :

P(x,y) = p(x) . p(y)

$$P(z1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} * C_{r-1}^{r+y-1} P^{r} q^{y}$$

نفرض أن لدينا التحويل الأحادي $u = X$، $z = x + y$ ، حيث أن z,u أرقام صحيحة موجبة.

وبإجراء التحويلات العكسية والتى تأخذ الشكل التالي :

Z = x + y ⇒y = Z – x

U = x ⇒x = u

ولتحويل دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين x,y إلي المتغيرين u,z يتم الآتي:

$$P(z1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{u}}{u!} * C_{r-1}^{r+z-u-1} P^{r} q^{z-u}$$

وإذا كان المطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي الهامشي(الحدي) للمتغيرz يتم التجميع على حدود المتغيرu كالتالي:

$$p_3(z) = \sum_{u=0}^{z} p(u,z)$$

$$P_3(z) = \sum_{u=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{u}}{u!} * C_{r-1}^{r+z-u-1} P^{r} q^{z-u}$$

$$P_3(z)=e^{-\lambda}p^r q^z \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1}\frac{q^{-u}\lambda^u}{u!}$$

$$P_3(z)=e^{-\lambda}p^r q^z \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1}\frac{(q/\lambda)^u}{u!}$$

نضع فى المعادلة السابقة $w=\dfrac{\lambda}{q}$

نحصل على دالة التوزيع المركب والناتج من دمج توزيعي بواسون وثنائي الحدين السالب:

$$P_3(z)=e^{-\lambda}p^r q^z \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1}\frac{(w)^u}{u!}$$

وهناك شكل أخر للدالة السابقة والتى تعطى من خلال المعادلة التالية :

$$\mathrm{p3(z1)} := \sum_{u=0}^{z1} \frac{1}{u!}e^{-\lambda}\cdot\lambda^{u}\cdot \mathrm{combin}(r+z1-u-1, z1-u)\cdot p^{r}\cdot q^{z1-u}$$

(٢) دمج توزيع ثنائى الحدين السالب مع توزيع ثنائي الحدين السالب :

بفرض أن y , x متغيران مستقلان كل منهما يتبعان التوزيع ثنائي الحدين السالب

- بفرض أن x تتبع توزيع ثنائى الحدين السالب بدالة كتلة احتمالية :

$$P1(x)=C_{r1-1}^{r1+x-1}P_1^{r1}q^x$$

$x \sim N,B(r_1,P_1)$

- ونفرض أن y تتبع توزيع ثنائي الحدين السالب بدالة كتلة احتمالية :

$$P2(y)=C_{r2-1}^{r2+y-1}P_2^{r2}q^y$$

$y \sim N,B(r_2,P_2)$

ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين معا كالتالي:

$P(x,y) = P_1(x) \, . \, P_2(y)$

$$P(z) = C_{r1-1}^{r1+x-1} p_1^{r1} q_1^{x} * C_{r2-1}^{r2+y-1} p_2^{r2} q_2^{y})$$

وبافتراض أن :

$$q_1 = 1 - P_1 \quad , \qquad q_2 = 1 - P_2$$

مع أجراء التحويلات التالية :

التحويل الأحادي $u = x$ ، $z = x + y$ ، حيث أن z, u أرقام صحيحة موجبة.

وبإجراء التحويلات العكسية والتى تأخذ الشكل التالي :

$Z = x + y \Rightarrow y = Z - x$

$U = x \Rightarrow x = u$

ولتحويل دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين x,y إلي المتغيرين u,z يتم التجميع علي حدود uكالاتي :

$$p_3(z) = \sum_{u=0}^{z} p(u, z)$$

$$P_3(z) = \sum_{u=0}^{z} (C_{r1-1}^{r1+u-1} p_1^{r1} q_1^{u} C_{r2-1}^{r2+z-u-1} p_2^{r2} q_2^{z-u})$$

وبإجراء بعض الاختصارات علي المعادلة السابقة ينتج ما يلى :

$$P_3(z) = p_1^{r1} p_2^{r2} q_2^{z} \sum_{u=0}^{z} (C_{r1-1}^{r1+u-1} C_{r2-1}^{r2+z-u-1} q_1^{u} q_2^{-u})$$

$$P_3(z) = p_1^{r1} p_2^{r2} q_2^{z} \sum_{u=0}^{z} (C_{r1-1}^{r1+u-1} C_{r2-1}^{r2+z-u-1} (q_1 / q_2)^{u}$$

وبوضع $W = \frac{q1}{q2}$ فى المعادلة السابقة ينتج الشكل النهائي من التوزيع الحدي الثنائي

من دمج توزيع ذي الحدين السالب مع توزيع ذي الحدين السالب أيضاً

$$P_3(z) = p_1^{r1} p_2^{r2} q_2^{z} \sum_{u=0}^{z} (C_{r1-1}^{r1+u-1} C_{r2-1}^{r2+z-u-1} (w)^{u}$$

(٣) دمج توزيع بواسون مع ثنائي الحدين السالب مع ثنائى الحدين السالب :

بفرض أن L, x , y متغيرات مستقلة، فيها المتغيرانx , y يتبعان توزيع ثنائي الحدين السالب، والمتغير L متير عشوائى يتبع توزيع بواسون .

بفرض أن:

$x \sim N,B(r_1,P_1)$

$y \sim N,B(r_2,P_2)$

$L \sim$ Poission (λ)

حيث أن L ،y، x متغيرات مستقلة, لذا فإن:

$P(x,y,L) = P_1(x) \ . \ P_2(y) \ .P_3(L)$

$$p(z) = p(x,y,L) = C_{r1-1}^{r1+y-1}).p_1^{r1}.q_1^{y}(C_{r2-1}^{r2+x-1}).p_2^{r2}q_2^{x}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{L}}{L!}$$

وبافتراض التحويلات الخطية التالية :

$$L = u$$
$$V = L + X$$
$$S = L + X + Y$$

والتحويلات العكسية :

$$u = L$$
$$x = v - u$$
$$y = s - v$$

حيث أن:-

$$q1 = 1 - p1$$
$$q2 = 1 - p2$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة عن القيم L,y,x تنتج المعادلة الآتية:

$$p(z) = p(u,v,s) = (c_{r1-1}^{r1+s-v-1}).p_1^{r1}.q_1^{s-v}(c_{r2-1}^{r2+v-u-1}).p_2^{r2}q_2^{v-u}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{u}}{u!}$$

من المعادلة السابقة يمكن إيجاد التوزيع الهامشي للمتغيرz والتجميع علي حدود u,v كالآتي:

$$p(z)=\sum_{v=0}^{s}\sum_{u=0}^{v}p(u,v,s)$$

ثانـ $$p(z)=p_1^{r1}p_2^{r2}q_2^{v}e^{-\lambda}\sum_{v=0}^{s}\sum_{u=0}^{v}\left[(_{r1-1}^{r1+s-v-1})q_1^{s-v}(c_{r2-1}^{r2+v-u-1})q_2^{-u}\frac{\lambda^u}{u!})\right]$$

ياً : دمج التوزيعات المتصلة:

(1) دمج توزيع جاما مع توزيع وايبل:

بافتراض أن x متغير عشوائي يتبع توزيع وايبل، بدالة كثافة :

$$f_1(x)=\frac{\beta}{\eta\beta}x^{\beta-1}e^{-(\frac{x}{n})^{\beta}}$$

x ~ Weibul (η,β)

وبافتراض أن y متغير عشوائي يتبع توزيع جاما ، بدالة كثافة:

$$f_2(y)=\frac{\theta^n}{\Gamma n}y^{n-1}e^{-\theta y}$$

y ~ Gamma (η,θ)

لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين x,y.

$$f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$$

$$f(x,y)=(\frac{\beta}{\eta\beta}x^{\beta-1}e^{-(\frac{x}{n})^{\beta}})*\frac{\theta^n}{\Gamma n}y^{n-1}e^{-\theta y}$$

وبإجراء التحويلات الخطية وبافتراض أن:

أن لدينا التحويل الآحادى التالى : $x=u$, $z=x+y$

إذاً التحويل العكسى يأخذ الشكل التالى : $u=x$, $y=z-w$

فإن دالة التوزيع الاحتمالى المشترك بين Y_1,Y_2 تعطى بـــ(الطويل، مجدى، 2000، ص ص ٢٧٥-٢٧٦) :

$$g(y_1,y_2)=f\left[w_1(y_1,y_2).w_2(y_1,y_2)\right]|J|$$

حيث يعتبر $|J|$ تحويل جاكوب ويعطى بــ :

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1$$

وبإجراء التفاضل الجزئي للمتغيرين x,y بالنسبة للمتغيرين u,z كالتالي :

$$f(u,z)=f(x,y)|J|$$

$$f(u,z)=(\frac{\beta}{\eta\beta}x^{\beta-1}e^{-(\frac{x}{n})^{\beta}})*\frac{\theta^n}{\overline{)n}}y^{n-1}e^{-\theta y})|J|$$

ثم بالتعويض في المعادلة السابقة عن قيم x,y تنتج المعادلة التالية:-

$$f(u,z)=(\frac{\beta}{\eta\beta}u^{\beta-1}e^{-(\frac{u}{n})^{\beta}})*\frac{\theta^n}{\overline{)n}}(z-w)^{n-1}e^{-\theta(z-w)})|J|$$ وي

تم إيجاد التوزيع الهامشي (الحدي) للمتغير z بإجراء التكامل علي حدود المتغير u.

$$g(z)=\int_0^z f(u,z)du$$

$$f(u,z)=\int_0^z(\frac{\beta}{\eta\beta}u^{\beta-1}e^{-(\frac{u}{n})^{\beta}})*\frac{\theta^n}{\overline{)n}}(z-w)^{n-1}e^{-\theta(z-w)})|J|$$

$$f(u,z)=\frac{\beta}{\eta\beta}\frac{\theta^n}{\overline{)n}}\int_0^z(u^{\beta-1}e^{-(\frac{u}{n})^{\beta}})*(z-w)^{n-1}e^{-\theta(z-w)})|J|$$

وبالتعويض فى المعادلة السابقة عن: $A_2=\frac{\beta}{\eta\beta}\frac{\theta^n}{\Gamma n}$

فإن التوزيع الهامشى للتوزيع الجديد:

$$g\ (z) = A_2 \int_0^z \ (u^{\beta-1} e^{-(\frac{u}{n})^{\beta}}) * (z-w)^{n-1} e^{-\theta(z-w)}) \left| J \right|$$

ويمكن كتابة الدالة السابقة بشكل أخر بعد أجراء الاختصارات :

$$g(z) := A2 \cdot \int_0^z (z-u)^{\beta-1} \cdot u^{n-1} \cdot e^{-\left[\theta \cdot u + \left(\frac{z-u}{\eta}\right)^{\beta}\right]} du$$

(2) دمج توزيع جاما مع الأسى :

بفرض أن x، y متغيران مستقلان ، حيث أن x متغير عشوائى يتبع توزيع جاما ، y متغير عشوائى يتبع التوزيع الأسى:

x ~ Gamma

y ~ exp.

حيث أن :

$$f_1(x) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} x^{n-1} e^{-\theta x}$$

$$f_2(y) = \alpha e^{-\alpha y}$$

لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين x,y.

$$f\ (x, y) = f_1(x).f_2(y)$$

$$f(x, y) = \frac{\theta^n}{\overline{)n}} x^{n-1} e^{-\theta x} * \alpha e^{-\alpha y}$$

وبافتراض أن :

$$x = u \quad \rightarrow \quad x = u$$

$$z = x + y \rightarrow y = z - u$$

وبإجراء التفاضل الجزئي للمتغيرين x,y بالنسبة للمتغيرين z, كالتالى :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(u,z) = f(x,y)|J|$$

$$f(u,z) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} x^{n-1} e^{-\theta x} * \alpha e^{-\alpha y} |J|$$

ثم بالتعويض في المعادلة السابقة عن قيمx,y تنتج المعادلة التالية:-

$$f(u,z) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} u^{n-1} e^{-\theta u} * \alpha e^{-\alpha(z-u)} |J|$$

ويتم إيجاد التوزيع الهامشي (الحدي) للمتغير z بإجراء التكامل علي حدود المتغير .u

$$g(z) = \int_0^z f(u,z)\,du$$

$$g(u,z) = \frac{\theta^n \alpha}{\Gamma n} \int_0^z u^{n-1} e^{-\theta u} * e^{-\alpha(z-u)} |J|$$

وبفرض أن:

$$A_1 = \frac{\theta^n . \alpha}{\Gamma n}$$

$$g(z) = A_1 \int_0^z (u)^{n-1} e^{-[\theta.(z-u)+\alpha.u]} du$$

ونثبت أنها دالة كثافة احتمال :

$$\int_{0}^{1000000000} g(z)dz = 1$$

(3) دمج التوزيع الأسى مع وايبل :

نفرض أن x ،y متغيران مستقلان فإن:

x ~ exp

y ~ weib.

حيث أن:

$$f1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$f_2(y) = \frac{\beta}{\eta\beta} y^{\beta-1} e^{-(\frac{y}{n})^{\beta}}$$

لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين x,y.

$$f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$$

$$f(x,y) = \alpha e^{-\alpha x} * \frac{\beta}{\eta\beta} y^{\beta-1} e^{-(\frac{y}{n})^{\beta}}$$

وبفرض أن :

$u = x \Rightarrow x = u$

$z = x+y \Rightarrow y = z-u$

وبإجراء التفاضل الجزئي للمتغيرين x,y بالنسبة للمتغيرين z,كالتالى :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(u,z) = f(x,y)|J|$$

$$f\ (u,z) = (\alpha e^{-\alpha x} * \frac{\beta}{\eta\beta} y^{\beta-1} e^{-(\frac{y}{n})^{\beta}})|J|$$

ثم بالتعويض في المعادلة السابقة عن قيمx,y تنتج المعادلة التالية:-

$$f\ (u,z) = (\alpha e^{-\alpha u} * \frac{\beta}{\eta\beta} (z-u^{\beta-1}.e^{-(\frac{z-u}{n})^{\beta}})|J|$$

ويتم إيجاد التوزيع الهامشي (الحدي) للمتغير z بإجراء التكامل علي حدود المتغير .u

$$g(z) = \int_{0}^{z} f\ (u,z)du$$

$$f\ (u,z) = \int_0^z\ (\alpha e^{-\alpha u} * \frac{\beta}{\eta\beta} (z-u^{\beta-1}.e^{-(\frac{z-u}{n})^{\beta}})|J|$$

وبف $f\ (u,z) = \alpha \frac{\beta}{\eta^{\beta}} \int_0^z\ (\alpha e^{-\alpha u} * \frac{\beta}{\eta\beta} (z-u^{\beta-1}.e^{-(\frac{z-u}{n})^{\beta}})|J|$

رض أن :

$$A_2 = \alpha.\frac{\beta}{\eta^{\beta}}$$

إذا دالة التوزيع الهامشى :

$$g(z) = A_2 \int_{0}^{z}\ (z-u)^{\beta-1} e^{-[\alpha u + (\frac{z-u}{\eta})^{\beta}]} du$$

وتم إثبات انها دالة كثافة احتمال:

$$\int_{0}^{1000000} g(z)dz = 1$$

(4) دمج توزيع جاما مع التوزيع الأسى مع توزيع وايبل:

-نفرض أن x تتبع التوزيع جاما بدالة احتمال :

$$f_1(x)=\frac{\theta^n}{\Gamma n}x^{n-1}e^{-\theta x}$$

-نفرض أن y تتبع التوزيع الأسى بدالة احتمال :

$$f_2(y)=\alpha e^{-\alpha y}$$

- نفرض أن z تتبع توزيع وايبل بدالة احتمال :

$$f_3(z)=\frac{\beta}{\eta\beta}z^{\beta-1}e^{-(\frac{z}{n})^{\beta}}$$

لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين z,y,x كالتالى :

$$f(x,y,z)=f_1(x)\,f_2(y)\,f_3(z)$$

$$f_1(x,y,z)=\frac{\theta^n}{\Gamma n}x^{n-1}e^{-\theta x}*\alpha e^{-\alpha y}*\frac{\beta}{\eta\beta}z^{\beta-1}e^{-(\frac{z}{n})^{\beta}}$$

بإجراء التحويلات الخطية التالية :

x = u $\Rightarrow$u = x

Z = x + y $\Rightarrow$y = Z – u

S = x + y+Z$\Rightarrow$ Z = S – V

وبإجراء التفاضل الجزئي للمتغيرين z.y,x بالنسبة للمتغيراتS,V,U التالى :

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial L}{\partial u} & \frac{\partial L}{\partial v} & \frac{\partial L}{\partial s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$f(u,v,S) = f(x,y,z)|J|$$

$$f(u,v,s) = (\frac{\theta^n}{\Gamma n} x^{n-1} e^{-\theta x} * \alpha e^{-\alpha y} * \frac{\beta}{\eta\beta} z^{\beta-1} e^{-(\frac{z}{n})^{\beta}})|J|$$

ثم بالتعويض في المعادلة السابقة عن قيمx,y تنتج المعادلة التالية:-

$$f(u,s,z) = (\frac{\theta^n}{\Gamma n} u^{n-1} e^{-\theta u} * \alpha e^{-\alpha(z-u)} * \frac{\beta}{\eta\beta}(s-v)^{\beta-1} e^{-(\frac{s-v}{n})^{\beta}})|J|$$

ويتم إيجاد التوزيع الهامشي (الحدي) للمتغير S بإجراء التكامل :

$$g(s) = \int_0^s \int (x,y,z) du.dv$$

$$g(s) = \int_0^s \int (\frac{\theta^n}{\Gamma n} u^{n-1} e^{-\theta u} * \alpha e^{-\alpha(z-u)} * \frac{\beta}{\eta\beta}(s-v)^{\beta-1} e^{-(\frac{s-v}{n})^{\beta}})|J|$$

$$g(s) = \alpha \frac{\beta}{\eta^{\beta}} \cdot \frac{\theta^n}{\overline{)n}} \int_0^s \int (u^{n-1} e^{-\theta u} * e^{-\alpha(z-u)} * (s-v)^{\beta-1} e^{-(\frac{s-v}{n})^{\beta}})|J|$$

وبفرض أن :

$$A(4) = \alpha \frac{\beta}{\eta^{\beta}} \cdot \frac{\theta^n}{\overline{)n}}$$

إذاً دالة الاحتمال المشترك للثلاثة توزيعات المندمجة (توزيع جاما مع التوزيع الأسى مع توزيع وايبل) هى :

$$g(s) := A4\cdot\int_0^s\int_0^v (s-v)^{\beta-1}\cdot e^{-\theta\cdot(v-u)-\left(\frac{s-v}{\eta}\right)^{\beta}}\cdot(v-u)^{n-1}\cdot e^{-\alpha\cdot u}\,du\,dv$$

ويمكن إثبات أن g(s) دالة كما يلى :

$$\int_0^{10000000000} g(z)\,dz = 1$$

رابعاً: تقدير معالم التوزيعات الاحتمالية المركبة:

لتحديد معالم التوزيع تم استخدام العزوم المركزيـــة حـــول الصـــفر للتوزيعـــات المتقطعة والمستمرة والتى تم اختبار جودة مطابقتهـــا ســـواء للأخطـــار (الحريـــق مـــع السيارات) ، (الحريق مع الحوادث الشخصية) ، (السيارات مع الحوادث الشخصـــية) ، (الحريق مع السيارات مع الحوادث الشخصية) .و تم تقدير معالم التوزيع المركـــب مـــن خلال معادلات العزوم الأربعة (Han-Shiang au,1984,pp 20-30).

نرمز لعزوم حجم الخسائر M_x ، ولعزوم عدد الحوادث M_n ، العزوم الاجمالية ML

$$\mu L = \mu_x \mu_n$$

$$\mu_2(L) = \mu_x^2\,\mu_2^{(n)} + \mu_n\,\mu_2^{(x)}$$

$$\mu_3(L) = \mu_x^3\,\mu_3^{(n)} + \mu_n\,\mu_3^{(x)} + 3\mu_x\mu_2^{(x)}\,\mu_2^{(n)}$$

$$\mu_4(L) = \mu_x^4\,\mu_4^{(n)} + \mu_n\,\mu_4^{(x)} + 4\mu_x\mu_3^{(x)}\,\mu_2^{(x)}$$
$$+ 6\mu_x^2\,\mu_2^{(x)}[\mu_n\mu_2^{(n)} + \mu_3^{(n)}] +$$
$$+ 3[\mu_2^{(x)}]^2\,[\mu_n^2 - \mu_n + \mu_2^{(n)}]$$

ثم يتم إيجاد معامل الالتواءβ_1 والتفرطح β_2 وبالتالي تحديد قيمة معامل بيرســـون لتحديـــد نوع التوزيع الاحتمالي المركب المناسب من خلال المعادلة الآتية (شحاتة،2001،ص12) :

$$K = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

ومن خلال قيمة k يمكن تحديد نوع التوزيع المركب.

فمن خلال نتائج التحليل الإحصائي وجدنا أن قيمة kفى جميع الحالات أقل من الواحد الصحيح ، إذا التوزيع الاحتمالي المركب الناجم من دمج التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة (الثنائية والثلاثية) يتمثل فى دالة احتمالية على شكل دالة جاما المركبة وهى :

$$f(L) = \frac{\theta^n}{\Gamma n} L^{n-1} e^{-\theta L}$$

ومعالم هذا التوزيع θ ،n.

المبحث الرابع

تسعير وثيقة تأمين جميع الأخطار المستقلة الصناعية

يتكون سعر التأمين من جزأين هما الخطر Rate of Risk وعبء الخطر Cost of Risk لذلك يتم تحديد السعر فى مرحلتين (David,Cummins,1983,pp 263-275) :-

المرحلة الأولى : تحديد السعر المبدئي " الصافى "

يعتمد السعر المبدئي P على عاملين أساسيين هما معدل تكرار المطالبة $E(n)$، متوسط قيمة المطالبة $E(x)$، وتشمل هذه المرحلة :

أ-**تحديد السعر الصافى الخام** : وهو السعر الذى يكفى لسداد التعويضات دون أخذ الانحرافات فى الاعتبار (أى تقلبات مستقبلية فى قيمة التعويضات) ، وطبقاً لهذه الطريقة فإن نموذج القسط الصافى Pure Risk لوحدة الخطر يتم تحديده على أساس إيجاد القيمة المتوقعة لقيمة التعويضات ، ومن ثم يتم حساب القسط الصافى المتوقع من المعادلة الأتية :

$$P=E(Y).E\ (X)$$

حيث يرمز :

P : قسط الخطر .

E (Y) : معدل تكرار المطالبة .

$E\ (X)$: متوسط قيمة المطالبة .

ب- **تحديد السعر الصافى النهائي** : وذلك بإضافة التقلبات العكسية فى التعويضات لمواجهة الانحرافات بين الخسائر الفعلية والخسائر المتوقعة إلى السعر الصافى الخام . طبقاً لهذه الطريقة فإن القسط المحسوب يحسب على أساس تقدير جزأين فى معادلة حساب السعر، وهما القيمة المتوقعة لقسط الخطر وقيمة الانحرافات المتوقعة فى قيمة التعويضات

إذاً القسط الصافى = قسط الخطر + مخصص الانحرافات

المرحلة الثانية : تحديد السعر الإجمالي (التجارى) :

وذلك بإضافة الأعباء المختلفة على السعر الصافى ، وعبء الخطر يمثل النفقات والمصاريف التى تبذلها الشركة عند قيامها بأعمال التأمين مثل العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية وهامش الربح وهذه الأعباء تعكس التكاليف الإدارية والخدمات المرتبطة بعمليات الاكتتاب والتفتيش وتسوية الخسائر بالإضافة إلى ضمان هامش ربح وتشمل هذه المرحلة :

أ-القسط التجارى = القسط الصافى + التحميلات

حيث تشمل التحميلات :

- عمولة الإنتاج .
- مصاريف الإصدار .
- المصاريف الإدارية والعمومية .
- مصاريف التحصيل والأرباح .

وعادة ما تكون المصروفات والأرباح نسبة من القسط التجارى :

والقسط التجارى يتم تحديده من المعادلة الآتية (GeorgE,Rejda,2000,p 610):-

$$GP = \frac{P}{1-\pi} = \frac{p}{1-(a+b)}$$

حيث إن :

GP : القسط التجاري

a+b معدل عبء القسط حيث أن :

a متوسط معدل مصروفات العمولات وتكاليف الإنتاج والمصاريف الإدارية

b : نسبة هامش الربح تتراوح ما بين ٢.٥% ، ٥ % من القسط التجارى (عبدة، 1994،ص، 445).

ب – سعر الخطر :

$$\text{سعر الخطر} = \frac{\text{قسط الخطر}}{\text{مجموع مبالغ التأمين للمحفظة}}$$

وسوف يتم تسعير وثيقة جميع الأخطار الصناعية ذات الأخطار الآتية (الحريــق ، السيارات ، الحوادث الشخصية) كالتالى:

- تسعير كل خطر علي حدة .
- تسعير كل خطرين معا .
- تسعير الأخطار الثلاثة مجتمعة .
- مقارنة أسعار التأمين التجاري بالوثيقة المركبة بمثيلاتها للوثائق الفردية الســائدة في السوق المصري.

(١) تسعير كل خطر علي حدة:

تم تحديد التوزيع الاحتمالى النظرى الأمثل والمناسب لتوزيع احتمالى معلــوم مــن خلال اختبار جودة المطابقة للبيانات الفعلية ، ولو البيانات تخضع لأكثر مــن توزيــع احتمالي يتم المقارنة بين التوزيعين حسب أكبر قيمة P.Value .

(أ) تسعير خطر الحريق:

تخضع بيانات عدد الحوادث الي توزيع بواسون بمتوسط = 1.6 ، بينما تخضع بيانات حجم خسارة الحريق الي التوزيع جاما بمتوسط = (3.547×10^5)

بالتالي فان القسط الصافي لخطر الحريق:

$$P = E(n).E(x)$$

$$P = (1.6).(3.547 * 10^5) = 567520$$

والقسط التجاري لخطر الحريق GP:

$$GP = P/[1-(a+b)]$$
$$GP = 567520/[1-(0.175+0.05)]$$
$$= 567520/0.775 = 732283$$

وسعر التأمين r = القسط التجارى لخطر الحريق / مجموع مبالغ التأمين خلال فترة الدراسة لخطر الحريق

$$r = \frac{732283}{7792344254} = 0.0094$$

(ب) تسعير خطر السيارات:

من خلال اختبار جودة المطابقة للبيانات الفعلية وجدنا أن بيانات عدد الحـــوادث لخطر السيارات تخضع لتوزيع ثنائي الحدين السالب ، بمتوسط قدره 136.29 بينمـــا تخضع بيانات حجم الخسائر للسيارات للتوزيع الأسى بمتوسط قدره (1.55×10^5)

إذ القسط الصافي لخطر السيارات :

$$P = E(n).E(x)$$
$$P = (136.29)*(1.55*10^5) = 21124950$$

والقسط التجارى:

$$GP = P/[1-(a+b)]$$
$$GP = 21124950/[1-(0.175+0.05)]$$
$$= 21124950/0.775 = 27258321$$

وسعر تأمين السيارات r :

وسعر التأمين r = القسط التجاري لخطر السيارات / مجموع مبالغ التأمين خلال فترة الدراسة لخطر السيارات

$$r = \frac{27258321}{174708415} = 0.1209$$

(ج) تسعير خطر الحوادث الشخصية :

تخضع بيانات عدد الحوادث الشخصية الى توزيع ثنائى الحدين السالب بمتوسـط قدره 134.83 ، بينما بيانات حجم خسائره تخضـع لتوزيـع وايبـل بمتوسـط وقـدره (1.757×10^5)إذا القسط الصافى لخطر الحوادث الشخصية :

$$P = E(n).E(x)$$

$$P = (134.83)*(1.757*10^5) = 2.369*10^7$$

والقسط التجارى :

$$GP = P/[1-(a+b)]$$

$$GP = 2.369*10^7 / [1-(0.175+0.05)]$$

$$= 2.369*10^7 / 0.775 = 30567265$$

وسعر التأمين لخطر الحوادث الشخصية r :

$$\text{وسعر التأمين } r = \frac{\text{القسط التجاري لخطر الحوادث الشخصية}}{\text{مجموع مبالغ التأمين خلال فترة الدراسة لخطر الحوادث الشخصية}}$$

$$r = \frac{30567741}{1895276003} = 0.016$$

(٢) تسعير كل خطرين معا:

يتم إيجاد القسط الصافى للخطرين معا من خلال المعادلة الآتية:

$$E(c) = \int_0^{E(y)} f(T)dT + \frac{1}{2}\Delta$$

Or:

$$E(c) = \int_0^{E(y)} F(T)dT + \alpha\Delta$$

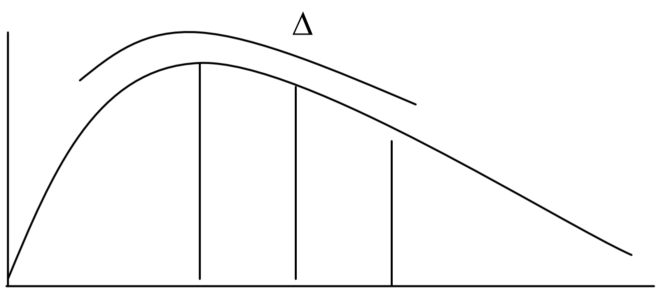
حيث أن :

$$\Delta = \int_{0}^{E(x)+E(y)} F(T)dT - \int_{0}^{E(y)} F(T)dT$$

وتتمثل α بالوسط الحسابى المرجح ويحسب كالتالى (عبد الجليل ،2005،ص 188)):

$$\alpha = \frac{\text{القيمة المتوقعة للخطر(١)} \times \text{معدل خسارته} + \text{القيمة المتوقعة للخطر(٢)} \times \text{معدل خسارته}}{\text{القيمة المتوقعة للخطر (١)} + \text{القيمة المتوقعة للخطر (٢)}}$$

ويمكن توضيح مما سبق فى الشكل التالى:



E(y) E(c) E(x) + E(y)

حيث أن :

E(y) : هو القسط الصافى الأكبر

E(y) + E(x): هو مجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر على حدة

Δ : الفرق بين مجموع القسطين والقسط الأكبر

E(c) : القسط الصافى للخطرين معا ، والمطلوب تقديره والذى ينحصر بين

E(x) +E(y) ، E(y)

(أ) تسعير خطرى الحريق والحوادث الشخصية معا:

$$\Delta = \int_{E(y)}^{E(x)+E(y)} f(T)dt = 5.404x10^{-3}$$

إيجاد القيمة المتوقعة الحريق والسيارات معا :

$$E(c) = \int_{0}^{E(y)} f(T)dT + \frac{1}{2}.\Delta$$

$E(c) = 2.397x10^7$

اذا القسط الصافي لخطري الحريق والحوادث الشخصية = (2.397×10^7)

تحديد الخصم للخطرين:

$$d = 1 - \frac{E(c)}{E(x)+E(y)} = 0.012$$

إذاً قيمة الوفر فى الأقساط :

$S = 0.012 \times 24259521 = 291114$

قيمة الخصم من الخطر الثاني فقط:

$$dx = 1 - \frac{E(c)-E(y)}{E(x)} = 0.499$$

والقسط التجاري للخطرين معا:

$$GP = \frac{P}{1-(a+b)}$$

$= (2.397x10^7)/0.775$

$= 30929032$

∴ سعر تأمين الخطرين معا = القسط التجاري / مجموع مبالغ تأمين الحريق والسيارت معا

$$r = \frac{30929032}{7967052669} = 0.0039$$

(ب) تسعير خطرى السيارات والحوادث الشخصية معا:

حيث أن E(y) هى القسط الصافى لخطر الحوادث الشخصية

E(x) هى القسط الصافى لخطر السيارات

$$\Delta = \int_{E(x)}^{E(x)+E(y)} f(T)dT = 0.28$$

$$E(c) = \int_{0}^{E(x)} f(T)dT + \frac{1}{2}.\Delta = 1.796x10^{7}$$

إذا القسط الصافى لخطرى السيارات والحوادث الشخصية معا

$= 1.796 \times 10^{7}$

معدل الخصم للخطرين معاً :

$$d = 1 - \frac{E(c)}{E(x)+E(y)} = 0.32$$

إذاً قيمة الوفر فى الأقساط :

S = $0.32 \times 44816951 = 14341424$

بالتالى يتحدد القسط التجارى كالتالى:

GP = $(1.796 x 10^{7})/0.775$

$= 23174194$

وسعر التأمين:

$$r = \frac{23174194}{2069984818} = 0.011$$

(ج) تسعير خطرى الحريق والسيارات معا:

حيث أن: E(x) هى القسط الصافى لخطر الحريق

E(y) هى القسط الصافى لخطر السيارات

$$\Delta = \int_{E(y)}^{E(y)+E(x)} f(T)dT = 0.027$$

$$E(c) = \int_{0}^{E(y)} f(T)dT + \frac{1}{2}.\Delta$$

Or:

$$= \int_{0}^{E(y)+E(x)} F(T)dT - \int_{0}^{E(y)} F(T)dT = 2.765x10^{6}$$

والخصم

$$d = 1 - \frac{E(c)}{E(x)+E(y)} = 0.09$$

إذاً قيمة الوفر فى الأقساط :

S = 0.09 × 21692470=1952322

والقسط التجارى GP :

GP = $(2.765\times10^{6})/0.775$

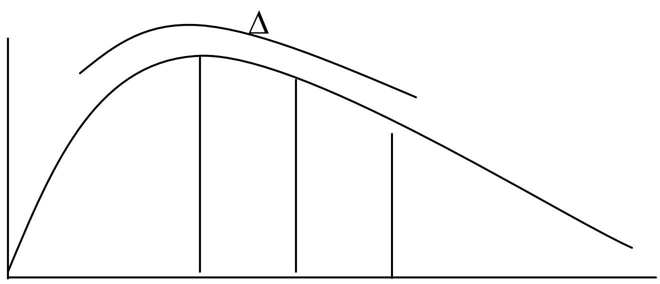
= 3567742

وسعر التأمين r :

$$r = \frac{3567742}{9687620257} = 0.00037$$

(٣) تسعير الأخطار الثلاثة مجتمعة (الحريق مع السيارات مع الحوادث الشخصية):

تم التوصل الى التوزيع المركب للأخطار الثلاثة وهو توزيع جاما المركب:



E(y)   E(c)   E(x) + E(y) + E(L)

حيث أن E(x) + E(y) + E(L) هو مجموع الثلاثة أقساط بإعتبار شراء كل خطر على حدة

القسط الأول (خطر الحريق):

$$E(x) = 567520$$

والقسط الثانى (خطر السيارات)

$$E(y) = 21124950$$

والقسط الثالث (خطر الحوادث الشخصية)

$$E(L) = 23692001$$

وبالتالى تكون قيمة الأقساط الثلاثة عند شراء كل خطر على حدة

$$E(x) + E(y) + E(L) = 45384471$$

ويمكن تقدير القسط الصافى المطلوب كالتالى:

بإفتراض أن القسط المطلوب تقديره سيقع ما بين E(L) , E(x) + E(y) + E(L) ويــتم تقدير القسط المطلوب من خلال المعادلة الآتية:

$$\int_{0}^{E(c)} f(T)dT = \int_{0}^{E(L)} f(T)dT + \frac{1}{2}\Delta_1$$

حيث أن :

$$\Delta_1 = \int_{E(L)}^{E(x)+E(y)+E(L)} f(T)dT = 0.028$$

ومعامل الترجيح α :

$$\alpha = \frac{567520x.3934 + 2473975x.7630 + 2565x.1844}{567520 + 2473975 + 2565} = .69$$

وبالتالي يمكن تقدير القسط الصافي للأخطار الثلاثة مـن خـلال البرنـامج الإحصـائي Mathcad بالقيمة التالية:

$$E(c) = \int_{0}^{E(x)+E(y)+E(L)} f(T)dT = \int_{0}^{E(y)} f(T)dT$$

$E(c) = 2.5508 \times 10^{7}$

كما يتيح للمؤمن له خصما عند شرائه للإخطار الثلاثة كالتالى :

نسبة الخصم = ١− أقساط الأخطار الثلاثة مجتمعة / مجموع الأقساط الثلاثة

$$d = 1 - \frac{E(c)}{E(x) + E(y) + E(L)}$$

$d = 0.055$

إذاً قيمة الوفر فى الأقساط :

$S=0.0554x\ 45384471=2514299$

أما القسط التجارى للأخطار الثلاثة مجتمعة:

$GP = P/(1-(a+b)$

$GP = (2.5508\ x10^{7})/(1-(0.225) = 32913548$

كذلك سعر التأمين التجارى يتم حسابه عن طريق قسمة القسط التجـارى علـى مجمـوع مبالغ التأمين للأخطار الثلاثة كالتالى:

سعر التأمين r :

$$r = \frac{32913548}{9862328672} = 0.00333$$

النتائج والتوصيات والمراجع

أولاً : النتائج :

١- إن من أهم الأخطار التى تتعرض لها قطاع الصناعات المعدنية هى أخطار الحريق ، السيارات ، الحوادث الشخصية . حيث بلغت معدلات الخسارة للأخطار الثلاثة خلال فترة الدراسة على التوالى : (41 % ، 79 % ، 21 %) .

٢ – ارتفاع سعر التأمين التجاري لخطر السيارات ، حيث وصلت إلى 0.1209 ، ويرجع ذلك لارتفاع معدل الخسائر لنفس الخطر والذي وصل إلى 79 % .

٣- انخفاض سعر التأمين التجارى لخطر الحريق حيث وصل إلى 0.0094 لانخفاض معدل الخسارة لنفس الخطر والذي وصل إلى 41% ، ولو استبعدنا حادث حريق عام2003 والذي بلغت خسائره حوالي 5 مليون جنية لأصبح معدل الخسارة 14% .

٤- سعر التأمين التجاري للأخطار الثنائية أقل من مجموع سعري التأمين لكل خطر على حدة ، فعلى سبيل المثال :

- سعر التأمين التجارى لخطرى الحريق والسيارات معاً بلغ 0.0037 وهو أقل من مجموع سعرى كل خطر على حدة وهو ما أدى إلى تخفيض فى القسط بمقدار ١٩٥٢٣٢٢ .

- سعر التأمين التجارى لخطرى الحريق والحوادث معاً بلغ 0.0039 وهو أقل من مجموع سعرى كل خطر على حدة وهو ما أدى إلى تخفيض فى القسط بمقدار291114 .

- سعر التأمين التجارى لخطرى السيارات والحوادث الشخصية معاً بلغ 0.011 وهو أقل من مجموع سعرى كل خطر على حدة وهو ما أدى إلى تخفيض فى القسط بمقدار 13441424.

- سعر التأمين التجاري للإخطار الثلاثية أقل من مجموع سعرى التأمين لكل خطر على حدة:

فسعر التأمين التجاري لإخطار الحريق والسيارات والحوادث الشخصية معاً يعادل 0.0033 وهو أقل من مجموع سعرى كل خطر على حدة وهو ما أدى إلى تخفيض فى القسط بمقدار2514299 .

٦- يتضح أن استخدام الوثيقة المركبة للإخطار الثلاثة تؤدى إلى التوفير فى التكلفة النهائية بنسبة 5.5 %، وهو ما يحقق وفر فى الأقساط بما يعادل 2514299

٧- إن الأسعار المقدرة للتأمين التجارى لكل خطر على حدة يكون كالتالي :

البيان	القسط الصافى	القسط التجارى	سعر التأمين التجارى
الحريق	567520	732283	0.0094
السيارات	21124950	27258321	0.1209
الحوادث الشخصية	23692001	30567265	0.016

٨- أن الأسعار المقدرة للتأمين التجاري لكل خطرين معاً يكون كالتالي :

البيان	القسط الصافى	القسط التجارى	نسبة الخصم	سعر التأمين التجارى
الحريق و الحوادث	23973012	30929032	0.012	0.0039
الحريق و السيارات	2765011	3567742	0.09	0.0037
السيارات و الحوادث	17960241	23174194	0.32	0.011

٩- أن الأسعار المقدرة للتأمين التجارى للثلاثة أخطار معاً يكون كالتالى :

البيان	القسط الصافى	القسط التجارى	نسبة الخصم	سعر التأمين التجارى
الحريق و الحوادث والسيارات	25508201 1	32913548	0.055	0.003

ثانياً : التوصيات .

١. التأكد على أهمية استخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة في تسعير الوثائق المركبة لما لها من أهمية تتميز بها عن التوزيعات البسيطة ، ومن أهمها :

- كثرة عدد المعالم التي يحتويها التوزيع المركب ، فكلما كانت معالم التوزيع أكثر . كان التوزيع النظري الذي يمثل الظاهرة محل البحث أقرب للتوزيع الفعلي وبالتالي يؤدى إلى الدقة في نتائج التسعير .
- معلمة التوزيع المركب متغير عشوائي : حيث تفترض التوزيعات الاحتمالية المركبة أن معلمة التوزيع الاحتمالي متغير عشوائي يأخذ قيماً مختلفة ، وهو ما يقضى على درجة التباين في درجة الخطر من سنة لأخرى ، وبالتالي يأخذ هذا التوزيع تغير العوامل التي تؤثر على الظاهرة محل البحث في الحسبان .

٢. اهتمام شركات التأمين بإصدار الوثائق المركبة في كافة فروع التأمينات العامة ، نظراً لفوائدها المتعددة ومن أهمها :-

- تقليل التأخير فى تسوية التعويضات لتغلبها على بعض المشاكل الفنية (مشاكل تسوية التعويضات لصعوبة إمكانية الفصل بين الخسائر الناجمة عن كل خطر ، وتعذر تحديد السبب القريب للخسارة) .
- تحقيق معدلات ربحية أعلى لشركة التأمين نظراً لإمكانية ترشيد تكلفة التغطية التأمينية لهذه الوثائق لدى شركة التأمين .
- الوفر في تكاليف إصدار هذا النوع من الوثائق لانخفاض المصاريف الإدارية والعمومية وتكاليف الإنتاج .

٣. الاسترشاد مبدئياً بالسعر المقترح لوثيقة جميع الأخطار الصناعية ، على أن يعاد النظر في هذه الأسعار كل فترة لتقييم النتائج الفعلية للتطبيق وتعديلها وفقاً لما يسفر عنة المتغيرات الاقتصادية أو الاجتماعية أو السياسية . تؤدى إلى تغيير البيانات .

٤. وجود نظام تأميني للتأمين على المصانع التي يشملها هذا القطاع يعتبر أهم الضرورات الملحة والهامة للحفاظ على هذه المصانع من المخاطر العديدة والمتمثلة في مخاطر الحريق والسيارات والحوادث الشخصية .

ثالثا: المراجع :

أولا: المراجع العربية :

١- اسماعيل ، عماد عبدالجليل "تسعير وثيقة التأمين الشاملة لفنادق والقرى السياحية ، رسالة دكتوراه ، كلية التجارة ، جامعة القاهرة ، 2005.

٢- الخواجة ،حامد عبد القوى، "تسعير وثائق التأمين المركبة باستخدام التوزيعات الاحتمالية "، رسالة دكتوراه، كلية التجارة، جامعة بورسعيد،2008.

٣- الدش ،عفاف على ، " الاستدلال الإحصائي " ، كلية التجارة ، جامعة حلوان ، 2006

٤- الطويل، مجدى،" الاحتمالات - النظرية والتطبيق"، دار النشر للجامعات ، مصر،القاهرة، 2000.

٥- جلول ، محمد عطية ، "إعداد وتسعير وثيقة تأمين شاملة للأخطار الصناعية" ، رسالة دكتوراه ، كلية التجارة بسوهاج – جامعة جنوب الوادي ، 1998 .

٦- جونسون، ريتشارد , تعريب د. عبد المرضى حامد عزام " التحليل الإحصائى للمتغيرات المتعددة من الوجهة التطبيقية , كلية الاقتصاد والإدارة , جامعة الملك سعود , فرع القصيم , المملكة العربية السعودية , 1997.

٧- حسان ، محمد فؤاد ، "الأخطار الهندسية ونموذج كمي مقترح لتسعـــير جميع الأخطار" ، مجلة آفاق جديدة ، كلية التجارة – جامعة المنوفية ، السنة الرابعة عشـــر العدد (1 ، 2) ، 2002 .

٨- حمزة ،ممدوح ، استخدام التوزيعات الاحتمالية فى تسعير التأمين مع التطبيق على تأمين السطو محلات تجارية، رسالة دكتوراه ، كلية التجارة، جامعة القاهرة ، 1990 .

٩- شاهين ، سامية سعد زغلول ،" نحو بناء نموذج كمي لوثيقة تأمين ممتلكات شاملة " ، رسالة دكتوراه ، كلية التجارة ، جامعة المنصورة ، 1994.

١٠- شحاتة، هشام، "حول بعض خواص عائلة توزيعات احتمالية ذات أربعة معالم"، رسالة ماجستير ، معهد الدراسات والبحوث الإحصائية ،جامعة القاهرة،2001.

١١- عاشور ، سمير & أبو الفتوح ،سامية ،"العرض والتحليل الإحصائى باستخدام SPSS" الجزء الثانى"، الإحصاء التطبيقى المتقدم، معهد الدراسات والبحوث الاحصائية – جامعة القاهرة، 2005.

١٢- عبد المولى ،محمد & المهدى ،محمد ،سالم &محمود ،وأخرون، "تسعير أخطار الشركات الصناعية – دراسة تطبيقية"، مجلة التجارة والتمويل ، كلية التجارة ، جامعة طنطا ،العدد الأول يناير ،2008.

١٣- ....،"تسعير أخطار الوثيقة المركبة – دراسة تطبيقية ،المجلة المصرية للدراسات التجارية ،كلية التجارة ،جامعة المنصورة ،العدد الثانى ،يوليو ،2008.

١٤- عبده ، السيد عبد المطلب ، " التأمين – الأسس العلمية والقواعد العملية " دار النهضة العربية ، 1994.

١٥- فوزى، عبد الحفيظ محمد ،"الاستدلال الإحصائى 2 – نظرية اختبار الفرضيات"، مجموعة النيل العربية ،القاهرة،2004.

١٦- هرمز ، امير حنا ، "الاحصاء الرياضى" ، جامعة الموصل – العراق ، 1990 .

ثانيا: المراجع الاجنبية :

1- Berm´udez, L. and D. Karlis. Bayesian multivariate poisson models for insurance ratemaking. Insurance: Mathematics and Economics 48 (2), ,2012.

2- Boucher, J., M. Denuit, and M. Guill´en , Models of insurance claim counts with time dependence based on generalization of Poisson and negative binomial distributions. Variance 2 (1),2008.

3- Chapman & Hall. Frees, E. W., P. Shi, and E. A. Valdez , Actuarial applications of a hierarchical insurance claims model. ASTIN Bulletin 39 (1),2009.

4- David L.Bickel hampt," General insurance", Richard D.Irwin, inc., 2001.

5- Dey, D. and Y. Chung , Compound poisson distributions: properties and estimation. Communications in Statistics-Theory and Methods 21 (11), 2002.

6- Emiliano A.Valdez" Multivariate negative binomial models for insurance claim counts", Risk Management in Insurance Universidad de Barcelona, Spain 16 July 2014.

7- Georg E . Rejda " principles of Risk management and insurance " , Seven th Ed. , Addison . wesly , London , 2000.

8- Jose Mar ´ıa Sarabia and Emilio Gomez-D ´ eniz . "Construction of multivariate distributions: a review of some recent results". SORT 32 (1) January-June 2008.

9- John Netter , William Wassermann , "Applied Statistic , Division of Simon ,U.S.A ,1993.

10- Hossack, I. B. "Introductory statistics with applications in general insurance", Cambridge university press, 1999.

11- José María Sarabia and Emilio Gómez-Déniz, “Multivariate Poisson-Beta Distributions with Applications to Insurance Data” University of Piraeus July 10-12, 2007.

12- feller,William, “an introduction to probability theory and its application”, Vol. 1, 3th Ed.Wiley Eastern limited, 1983.

13- Kotb, N.S., "The compound Distributions", M.Sc. thesis, Department of Statistics, Faculty of Commerce AL. Azhar Univ., 1999.

14- .... "Estimation of the parameters of compound Distributions, P.HD. thesis, Department of statistics, faculty of commerce, AL-Azhar Univ., 2002.

15- Ronald E. Walpale, "Probability & Statistics for engineers , Scientists, "prentice-Hall, Inc, 2002.

16- Martin Haugh,” Multivariate Distributions and Dimension Reduction Techniques”, Quantitative Risk Management Spring 2010.

17- Merran Evans, and Nicholas Hastings, Brain, Peacock," statistical Distributions", New Yourk,2000.

18- Michael A. Bean, "probability The science of uncertainty with Applications to Investments, Insurance, and Engineering", Ph.D., FSA, university of Western ontario,2002.

19- Merran Evans, Nicholas Hastings, Brain, and Peacock, "Statistical Distributions", New York, 2000.

20- - Shi, P. and E. Frees , Long-tail longitudinal modeling of insurance company expenses. Insurance: Mathematics and Economics 47 (3), 2011.

21- Peng Shi and Emiliano A. Valdez "Multivariate Negative Binomial Models for Insurance Claim Counts" September 10, 2012.

22- Norman L. Johnson , samuel Kotz," Continuous Univariate Distributions", Volume 2, 2Ed., New York, John Wiley, Sons, Inc., 1990.

23- Vaugh , E.J ., " Fundamentals of Risk &Insurance " , New York : John Wiley & Sons , 1992.

نتائج التحليل الإحصائي

Goodness-of-Fit Tests

Uncensored Data - Col_1

Data variable: Col_1

20 values ranging from 0.0 to 5.0

Fitted Distributions

Poisson
mean = 1.6

The Stat Advisor

Goodness-of-Fit Tests for Col_1

Chi-Squared Test

	Expected	*Observed*	*Upper*	*Lower*	
Chi-Squared	*Frequency*	*Frequency*	*Limit*	*Limit*	
0.00	*4.04*	*4*	*0.0*		*at or below*
0.37	*6.46*	*8*	*1.0*	*1.0*	
0.91	*5.17*	*3*	*2.0*	*2.0*	
0.10	*4.33*	*5*		*3.0*	

Chi-Squared = 1.37969 with 2 d.f. P-Value = 0.501653

Kolmogorov-Smirnov Test

Poisson	
	DPLUS
	DMINUS
	DN
	P-Value

The StatAdvisor

Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0.05, we can not reject the idea that Col_1 comes from a Poisson distribution with 95% confidence.

Uncensored Data - Col_3

Data variable: Col_3

20 values ranging from 0.0 to 47.0

Fitted Distributions

Negative Binomial
event probability = 0.113422
number of successes = 3.0 (specified)

.**Goodness-of-Fit Tests for Col_3**

Chi-Squared Test

	Expected	Observed	Upper	Lower	
Chi-Squared	Frequency	Frequency	Limit	Limit	
1.06	2.40	4	8.0		at or below
0.05	2.35	2	12.0	9.0	
0.98	2.59	1	16.0	13.0	
0.10	2.51	2	20.0	17.0	
2.24	2.24	0	24.0	21.0	
1.26	2.30	4	29.0	25.0	
0.47	2.03	3	35.0	30.0	
0.05	3.58	4		36.0	

Chi-Squared = 6.20787 with 6 d.f.   P-Value = 0.400312

Kolmogorov-Smirnov Test

Uncensored Data - Col_5

Data variable: Col_5

20 values ranging from 9.0 to 328.0

Fitted Distributions

Negative Binomial
event probability = 0.0146145
number of successes = 2.0 (specified)

Goodness-of-Fit Tests for Col_5

Chi-Squared Test

	Expected	Observed	Upper	Lower	
Chi-Squared	Frequency	Frequency	Limit	Limit	
0.00	2.03	2	35.0		at or below
2.02	2.02	0	55.0	36.0	
0.00	2.05	2	74.0	56.0	
0.00	2.10	2	94.0	75.0	
0.00	2.02	2	115.0	95.0	
0.00	2.02	2	139.0	116.0	
1.85	2.05	4	169.0	140.0	
0.49	2.01	3	209.0	170.0	
0.13	3.70	3		210.0	

Chi-Squared = 4.49886 with 7 d.f.   P-Value = 0.720855

Kolmogorov-Smirnov Test

Uncensored Data - Col_2

Data variable: Col_2

20 values ranging from 1.0 to 5.0125E6

Fitted Distributions

Gamma
shape = 0.180095
scale = 5.07765E-7

Goodness-of-Fit Tests for Col_2

Kolmogorov-Smirnov Test

Gamma	
0.14038	*DPLUS*
0.100727	*DMINUS*
0.14038	*DN*
0.825481	*P-Value*

Uncensored Data - Col_4

Data variable: Col_4

20 values ranging from 1.0 to 780866.

Fitted Distributions

Exponential
mean = 105458.

Goodness-of-Fit Tests for Col_4

Kolmogorov-Smirnov Test

Exponential	
0.222105	*DPLUS*
0.0684482	*DMINUS*
0.222105	*DN*
0.278391	*P-Value*

Uncensored Data - Col_6

Data variable: Col_6

20 values ranging from 5210.0 to 516484.

Fitted Distributions

Weibull
shape = 1.63946

scale =   *196352.*

Goodness−of−Fit Tests for Col_6

Kolmogorov−Smirnov Test

Weibull	
0.144722	DPLUS
0.188609	DMINUS
0.188609	DN
0.485382	P−Value

.

Fire with accident

$\lambda := 1.6$

$p := 0.014614$

$q := 1 - p$

$r := 2$

$mNB := \frac{r \cdot q}{p}$

$mNB = 134.85$

$mpo := \lambda$

$mpo = 1.6$

$mNB = 134.85$

$p3(z1) := \sum_{u=0}^{z1} dpois(u, \lambda) \cdot dnbinom(z1 - u, r, p)$

$\sum_{z1=0}^{1000} p3(z1) = 1$

momment four

$M3n := \frac{r \cdot q \cdot (1 + q)}{p^3}$

$mn1 := \sum_{z1=0}^{1000} z1 \cdot p3(z1)$

$mn1 = 136.444$

$mn2 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^2 \cdot p3(z1)$

$$mn2 = 9.223\times 10^{3}$$

$$mn3 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^{3}\cdot p3(z1)$$

$$mn3 = 1.248\times 10^{6}$$

$$mn4 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^{4}\cdot p3(z1)$$

$$mn4 = 5.059\times 10^{8}$$

Gamma

$$n := 0.18009$$

$$\theta := 0.00000050776$$

$$meangamma := \frac{n}{\theta}$$

$$meangamma = 3.547\times 10^{5}$$

Weibull

$$\eta := 19635$$

$$\beta := 1.6394$$

$$mWieb := \eta\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

$$mWieb = 1.757\times 10^{5}$$

$$A2 := \frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\beta}{\eta^{\beta}}$$

$$g(z) := A2\cdot\int_{0}^{z} (z-u)^{\beta-1}\cdot u^{n-1}\cdot e^{-\left[\theta\cdot u + \left(\frac{z-u}{\eta}\right)^{\beta}\right]}\,du$$

$$\int_{0}^{1000000000} g(z)\,dz = 1$$

$$ms1 := \int_{0}^{100000000} z\cdot g(z)\,dz$$

$$ms1 = 5.304\times 10^{5}$$

$$ms2 := \int_{0}^{100000000} (z - ms1)^{2}\cdot g(z)\,dz$$

$$ms2 = 7.106\times 10^{11}$$

$$ms3 := \int_{0}^{100000000} (z - ms1)^{3}\cdot g(z)\,dz$$

$$ms3 = 2.753\times 10^{18}$$

$$ms4 := \int_{0}^{100000000} (z - ms1)^{4}\cdot g(z)\,dz$$

$$ms4 = 1.777\times 10^{25}$$

Compund moments

$$M1 := mn1\cdot ms1$$

$$M1 = 7.236\times 10^{7}$$

$$M2 := ms1^{2}\cdot mn2 + mn1\cdot ms2$$

$$M2 = 2.691\times 10^{15}$$

$$M3 := ms1^{3}\cdot mn3 + mn1\cdot ms3 + 3\cdot ms1\cdot ms2\cdot mn2$$

$$M3 = 1.97\times 10^{23}$$

$$M4 := ms1^{4}\cdot mn4 + mn1\cdot ms4 + 4\cdot ms1\cdot ms3\cdot mn2 + 6\cdot ms1^{2}\cdot ms2\cdot(mn1\cdot mn2 + mn3) + 3\cdot\left[ms2^{2}\cdot\left(mn1^{2} - mn1 + mn2\right)\right]$$

$$M4 = 4.313\times 10^{31}$$

$$\beta1 := \frac{M3}{M2^{1.5}}$$

$$\beta1 = 1.411$$

$$\beta2 := \frac{M4}{M2^{2}}$$

$$\beta2 = 5.955$$

$$P := \frac{\beta1\cdot(\beta2 + 3)^{2}}{4\cdot\left[(2\cdot\beta2 - 3\beta1 - 6)\cdot(4\cdot\beta2 - 3\cdot\beta1)\right]}$$

$$P = 0.862$$

Gamma test

$$\theta := \frac{M2}{M1}$$

$\theta = 3.719\times 10^{7}$

$n := \frac{M1}{\theta}$

$n = 1.946$

$Ey := mNB\,mWiel$

$Ex := \lambda \cdot meangamma$

$mNB = 134.85$

$Ey = 2.369\times 10^{7}$

$Ex = 5.675\times 10^{5}$

PDf Gamma

$f(T) := \frac{\theta^{-n}}{\Gamma(n)} \cdot T^{n-1} \cdot e^{\frac{-T}{\theta}}$

$\Delta := \int_{Ey}^{Ex+Ey} f(T)\,dT$

$\Delta = 5.404\times 10^{-3}$

$c := 300000$

Given

$\int_{0}^{c} f(T)\,dT = \int_{0}^{Ey} f(T)\,dT + \frac{1}{2}\cdot\Delta$

$C := Find(c)$

$C = 2.397\times 10^{7}$

$d := 1 - \frac{(C)}{Ex+Ey}$

$d = 0.012$

$dx := 1 - \frac{(C) - Ey}{Ex}$

$dx = 0.499$

Fire with car

$\lambda := 1.6$

$p := 0.11342$

$q := 1 - p$

$r := 3$

$mNB := \frac{r\cdot q}{p}$

$mNB = 23.45$

$mpo := \lambda$

$mpo = 1.6$

$p3(z1) := \sum_{u=0}^{z1} \frac{1}{u!} e^{-\lambda} \cdot \lambda^{u} \cdot combin(r + z1 - u - 1, z1 - u) \cdot p^{r} \cdot q^{z1-u}$

$\sum_{z1=0}^{170} p3(z1) = 1$

$mn1 := \sum_{z1=0}^{170} z1 \cdot p3(z1)$

$mn1 = 25.05$

$mn2 := \sum_{z1=0}^{170} (z1 - mn1)^{2} \cdot p3(z1)$

$mn2 = 208.342$

$mn3 := \sum_{z1=0}^{170} (z1 - mn1)^{3} \cdot p3(z1)$

$mn3 = 3.439\times 10^{3}$

$mn4 := \sum_{z1=0}^{170} (z1 - mn1)^{4} \cdot p3(z1)$

$mn4 = 2.158\times 10^{5}$

Gamma

$n := 0.18009$

$\theta := 0.00000050776$

$meangamma := \frac{n}{\theta}$

$meangamma = 3.547\times 10^{5}$

Exponential

$\alpha := \frac{1}{105458}$

$A1 := \frac{\theta^{n} \cdot \alpha}{\Gamma(n)}$

$g(z) := A1 \cdot \int_{0}^{z} (z-u)^{n-1} \cdot e^{-[\theta \cdot (z-u) + \alpha \cdot u]} \, du$

$\int_{0}^{1000000000} g(z) \, dz = 1$

$ms1 := \int_{0}^{10000000000} z \cdot g(z) \, dz$

$ms1 = 4.601 \times 10^{5}$

$ms2 := \int_{0}^{10000000000} (z - ms1)^{2} \cdot g(z) \, dz$

$ms2 = 7.096 \times 10^{11}$

$ms3 := \int_{0}^{10000000000} (z - ms1)^{3} \cdot g(z) \, dz$

$ms3 = 2.754 \times 10^{18}$

$ms4 := \int_{0}^{10000000000} (z - ms1)^{4} \cdot g(z) \, dz$

$ms4 = 1.777 \times 10^{25}$

Compund moments

$M1 := mn1 \cdot ms1$

$M1 = 1.153 \times 10^{7}$

$M2 := ms1^{2} \cdot mn2 + mn1 \cdot ms2$

$M2 = 6.189 \times 10^{13}$

$M3 := ms1^{3} \cdot mn3 + mn1 \cdot ms3 + 3 \cdot ms1 \cdot ms2 \cdot mn2$

$M3 = 6.081 \times 10^{20}$

$M4 := ms1^{4} \cdot mn4 + mn1 \cdot ms4$

$+ 4 \cdot ms1 \cdot ms3 \cdot mn2 + 6 \cdot ms$

$1^{2} \cdot ms2 \cdot (mn1 \cdot mn2 + mn3)$

$+ 3 \cdot \left[ms2^{2} \cdot \left(mn1^{2} - mn1 + mn2 \right) \right]$

$M4 = 2.02 \times 10^{28}$

$\beta1 := \frac{M3}{M2^{1.5}}$

$\beta1 = 1.249$

$\beta2 := \frac{M4}{M2^{2}}$

$\beta2 = 5.275$

$P := \frac{\beta1 \cdot (\beta2 + 3)^{2}}{4 \cdot [(2 \cdot \beta2 - 3\beta1 - 6) \cdot (4 \cdot \beta2 - 3 \cdot \beta1)]}$

$P = 0.457$

Gamma test

$\theta := \frac{M1}{M2}$

$\theta = 1.862 \times 10^{-7}$

$n := M1 \cdot \theta$

$n = 2.147$

$Ex := \lambda \cdot meangamma$

$Ex = 5.675 \times 10^{5}$

$Ey := mNB \cdot \frac{1}{\alpha}$

$Ey = 2.473 \times 10^{6}$

$Ey = 2.47297904 \times 10^{6}$

$f(T) := \frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)} \cdot T^{n-1} \cdot e^{-\theta \cdot T}$

$\Delta := \int_{Ey}^{Ey+Ex} f(T) \, dT$

$\Delta = 0.027$

$c := 1000000$

Given

$$\int_0^c f(T)\,dT = \int_0^{Ey} f(T)\,dT + \frac{1}{2}\cdot\Delta$$

$\text{Find}(c) = 2.765962611\times 10^6$

$Ex + Ey = 3.04\times 10^6$

$$d := 1 - \frac{\left(2.765962611\times 10^6\right)}{Ex + Ey}$$

$d = 0.09$

$$dx := 1 - \frac{\left(2.765962611\times 10^6\right) - Ey}{Ex}$$

$dx = 0.484$

car with accident

$p1 := 0.11342$

$p2 := 0.0144614$

$q1 := 1 - p1$

$r1 := 3$

$q2 := 1 - p2$

$r2 := 2$

$$mNB1 := \frac{r1\cdot q1}{p1}$$

$mNB1 = 23.45$

$$mNB2 := \frac{r2\cdot q2}{p2}$$

$mNB2 = 136.299$

$$p3(z1) := \sum_{u=0}^{z1} \text{dnbinom}(u, r1, p1)\cdot$$

$$p3(z1) := \sum_{u=0}^{z1} \text{dnbinom}(u, r1, p1)\cdot$$

$$\sum_{z1=0}^{1000} p3(z1) = 1$$

$$mn1 := \sum_{z1=0}^{1000} z1\cdot p3(z1)$$

$mn1 = 159.738$

$$mn2 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^2\cdot p3(z1)$$

$mn2 = 9.623\times 10^3$

$$mn3 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^3\cdot p3(z1)$$

$mn3 = 1.29\times 10^6$

$$mn4 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^4\cdot p3(z1)$$

$mn4 = 5.376\times 10^8$

Exponential

$$\alpha := \frac{1}{105458}$$

Weibull

$\eta := 196352$

$\beta := 1.63940$

$$mWieb := \eta\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

$mWieb = 1.757\times 10^5$

$$A2 := \alpha\cdot\frac{\beta}{\eta^\beta}$$

$$g(z) := A2\cdot\int_0^z (z-u)^{(\beta-1)}\cdot e^{-\left[\alpha\cdot u + \left(\frac{z-u}{\eta}\right)^\beta\right]}\,du$$

$$\int_0^{1000000000} g(z)\,dz = 1$$

$$ms1 := \int_0^{100000000} z\cdot g(z)\,dz$$

$$ms1 = 2.811\times 10^5$$

$$ms2 := \int_0^{100000000} (z - ms1)^2\cdot g(z)\,dz$$

$$ms2 = 2.321\times 10^{10}$$

$$ms3 := \int_0^{100000000} (z - ms1)^3\cdot g(z)\,dz$$

$$ms3 = 3.571\times 10^{15}$$

$$ms4 := \int_0^{100000000} (z - ms1)^4\cdot g(z)\,dz$$

$$ms4 = 2.494\times 10^{21}$$

Compund moments

$$M1 := mn1\cdot ms1$$

$$M1 = 4.491\times 10^7$$

$$M2 := ms1^2\cdot mn2 + mn1\cdot ms2$$

$$M2 = 7.643\times 10^{14}$$

$$M3 := ms1^3\cdot mn3 + mn1\cdot ms3 + 3\cdot ms1\cdot ms2\cdot mn2$$

$$M3 = 2.885\times 10^{22}$$

$$M4 := ms1^4\cdot mn4 + mn1\cdot ms4 + 4\cdot ms1\cdot ms3\cdot mn2 + 6\cdot ms1^2\cdot ms2\cdot (mn1\cdot mn2 + mn3) + 3\cdot\left[ms2^2\cdot\left(mn1^2 - mn1 + mn2\right)\right]$$

$$M4 = 3.389\times 10^{30}$$

$$\beta1 := \frac{M3}{M2^{1.5}}$$

$$\beta1 = 1.365$$

$$\beta2 := \frac{M4}{M2^2}$$

$$\beta2 = 5.802$$

$$P := \frac{\beta1\cdot(\beta2 + 3)^2}{4\cdot\left[(2\cdot\beta2 - 3\beta1 - 6)\cdot(4\cdot\beta2 - 3\cdot\beta1)\right]}$$

$$P = 0.917$$

Gamma test

$$\theta := \frac{M2}{M1}$$

$$\theta = 1.702\times 10^7$$

$$n := \frac{M1}{\theta}$$

$$n = 2.639$$

$$Ey := mNB2\cdot mWieb$$

$$Ex := mNB1\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$Ey = 2.394\times 10^7$$

$$Ex = 2.473\times 10^6$$

PDf Gamma

$$f(T) := \frac{\theta^{-n}}{\Gamma(n)}\cdot T^{n-1}\cdot e^{\frac{-T}{\theta}}$$

$$\Delta := \int_{Ex}^{Ex+Ey} f(T)\,dT$$

$$\Delta = 0.28$$

c := 300000(

Given

$$\int_0^{c} f(T)\,dT = \int_0^{Ex} f(T)\,dT + \frac{1}{2}\cdot\Delta$$

$$C := Find(c)$$

$$C = 1.796\times 10^7$$

$$d := 1 - \frac{(C)}{Ex + Ey}$$

$$d = 0.32$$

Fire & car and accident

$\lambda := 1.6$

$p1 := 0.11342$

$q1 := 1 - p1$

Σ

$r1 := 3$

$mNB1 := \frac{r1 \cdot q1}{p1}$

$mNB1 = 23.45$

$mpo := \lambda$

$mpo = 1.6$

$p2 := 0.0144614$

$q2 := 1 - p2$

$r2 := 2$

$mNB2 := \frac{r2 \cdot q2}{p2}$

$mNB2 = 136.299$

$w2 := \frac{\lambda}{q1}$

$w3 := \frac{q1}{q2}$

$w4 := p2^2 \cdot \frac{p1^3 \cdot e^{w2} \cdot e^{-\lambda}}{2}$

$p3(s) := w4 \cdot q2^s \cdot \sum_{v=0}^{s} \sum_{u=0}^{v} w3^v \cdot dpois(u, w2) \cdot (v - u + 2) \cdot (v - u + 1) \cdot (s - v + 1)$

$\sum_{s=0}^{500} p3(s) = 0.992$

$mn1 := \sum_{z1=0}^{1000} z1 \cdot p3(z1)$

$mn1 = 161.338$

$mn2 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^2 \cdot p3(z1)$

$mn2 = 9.625 \times 10^3$

$mn3 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^3 \cdot p3(z1)$

$mn3 = 1.29 \times 10^6$

$mn4 := \sum_{z1=0}^{1000} (z1 - mn1)^4 \cdot p3(z1)$

$mn4 = 5.376 \times 10^8$

Gamma

$n := 0.18009$

$\theta := 0.00000050776$

$meangamma := \frac{n}{\theta}$

$meangamma = 3.547 \times 10^5$

Exponential

$\alpha := \frac{1}{105458}$

Weibull

$\eta := 196352$

$\beta := 1.63940$

$mWieb := \eta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$

$mWieb = 1.757 \times 10^5$

$A4 := \alpha \cdot \frac{\beta}{\eta^\beta} \cdot \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}$

$g(s) := A4 \cdot \int_0^s \int_0^v (s - v)^{\beta-1} \cdot e^{-\theta \cdot (v-u) - \left(\frac{s-v}{\eta}\right)^\beta} \cdot (v - u)^{n-1} \cdot e^{-\alpha \cdot u} \, du \, dv$

$\int_0^{10000000000} g(z) \, dz = 1$

$ms1 := \int_0^{10000000} z \cdot g(z) \, dz$

$$ms1 = 6.319\times 10^{5}$$

$$ms2 := \int_{0}^{10000000} (z - ms1)^{2}\cdot g(z)\,dz$$

$$ms2 = 6.796\times 10^{11}$$

$$ms3 := \int_{0}^{10000000} (z - ms1)^{3}\cdot g(z)\,dz$$

$$ms3 = 2.268\times 10^{18}$$

$$ms4 := \int_{0}^{10000000} (z - ms1)^{4}\cdot g(z)\,dz$$

$$ms4 = 1.181\times 10^{25}$$

$$ms1^{2} = 3.993\times 10^{11}$$

Compund moments

$$M1 := mn1\cdot ms1$$

$$M1 = 1.019\times 10^{8}$$

$$M2 := ms1^{2}\cdot mn2 + mn1\cdot ms2$$

$$M2 = 3.953\times 10^{15}$$

$$M3 := ms1^{3}\cdot mn3 + mn1\cdot ms3 + 3\cdot ms1\cdot ms2\cdot mn2$$

$$M3 = 3.382\times 10^{23}$$

$$M4 := ms1^{4}\cdot mn4 + mn1\cdot ms4 + 4\cdot ms1\cdot ms3\cdot mn2 + 6\cdot ms1^{2}\cdot ms2\cdot (mn1\cdot mn2 + mn3) + 3\cdot\left[ms2^{2}\cdot\left(mn1^{2} - mn1 + mn2\right)\right]$$

$$M4 = 9.044\times 10^{31}$$

$$\beta 1 := \frac{M3}{M2^{1.5}}$$

$$\beta 1 = 1.361$$

$$\beta 2 := \frac{M4}{M2^{2}}$$

$$\beta 2 = 5.789$$

$$P := \frac{\beta 1\cdot(\beta 2 + 3)^{2}}{4\cdot[(2\cdot\beta 2 - 3\beta 1 - 6)\cdot(4\cdot\beta 2 - 3\cdot\beta 1)]}$$

$$P = 0.922$$

Gamma test

$$\theta := \frac{M1}{M2}$$

$$\theta = 2.579\times 10^{-8}$$

$$n := M1\cdot\theta$$

$$n = 2.629$$

$$Ey := mNB1\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$Ey = 2.473\times 10^{6}$$

$$Ex := A\cdot\lambda$$

$$Ey = 2.473\times 10^{6}$$

$$Ex := 1.6\cdot meangamma$$

$$Ex = 5.675\times 10^{5}$$

$$EL := mNB2\cdot mWieb$$

$$EL = 2.394\times 10^{7}$$

$$Ex + Ey + EL = 2.698424413\times 10^{7}$$

PDf Gamma

$$f(T) := \frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}\cdot T^{n-1}\cdot e^{-\theta\cdot T}$$

$$\Delta 1 := \int_{EL}^{Ex+Ey+EL} f(T)\,dT$$

$$\alpha := 0.05$$

$$c := 1000000$$

Given

$$\int_{0}^{c} f(T)\,dT = \int_{0}^{EL} f(T)\,dT + \frac{1}{2}\cdot\Delta 1$$

$$Find(c) = 2.550810461\times 10^{7}$$

$$d := \left[1 - \frac{\left(2.550810461\times 10^{7}\right)}{Ex + Ey + EL}\right]\cdot 100$$

$$d = 5.47$$

$$dyx := 1 - \frac{\left(2.550810461 \times 10^{7}\right) - EL}{Ey + Ex}$$

$$dyx = 0.485$$

$$\Delta 2 := \int_{EL+Ey}^{Ex+Ey+EL} f(T)\, dT$$

$$c := 1000000$$

Given

$$\int_{0}^{c} f(T)\, dT = \int_{0}^{EL+Ey} f(T)\, dT + \frac{1}{2} \cdot \Delta 2$$

$$\text{Find}(c) = 2.670191225 \times 10^{7}$$

$$d := \left[1 - \frac{\left(2.670191225 \times 10^{7}\right)}{Ex + Ey + EL}\right] \cdot 100$$

$$d = 1.046$$

$$dx := 1 - \frac{\left(2.670191225 \times 10^{7}\right) - EL - Ey}{Ex}$$

$$dx = 0.497509$$