# توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية

إعداد

**د/أحمد محمد رجائي الرفاعي**

أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات المساعد

كلية التربية – جامعة طنطا

**المجلد (٧٠) العدد (الثاني) الجزء (الأول) أبريل/ ٢٠١٨م**

**الملخص**

تمثلت مشكلة البحث الحالي في ضَعف التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي في الجبر، وبناء عليه هدفت الدراسة إلى توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي. وتكونت عينة الدراسة من تلاميذ فصلين من فصول الصف الثاني الإعدادي بإحدى المدارس الإعدادية (مدرسة محلة أبو علي الإعدادية للبنين – المحلة الكبرى): المجموعة التجريبية (فصل ٣/٢، ن = ٥٠) والمجموعة الضابطة (فصل ٤/٢، ن = ٤٦)، واستخدم التصميم التجريبي من النوع تصميم المجموعة الضابطة القبلي – البعدي Pretest–posttest Control Group Design، وأشارت نتاج البحث إلى وجود أثر جيد لتوظيف استراتيجية تعميم الحساب في تنمية التفكير الجبري وتحصيل الجبر لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، ولم تكشف النتائج عن وجود علاقة ارتباطية (عند مستوى دلالة إحصائية ≤ ٠.٠٥) بين التفكير الجبري وتحصيل الجبر. وقدمت الدراسة بعض التوصيات تتعلق بضرورة زيادة الاهتمام التدريبي والبحثي بتوظيف استراتيجية التعميم كماً وكيفاً في تعليم وتعلم الرياضيات المدرسية، واقترحت بعض الدراسات المستقبلية الممكن إجراؤها.

**الكلمات المفتاحية:** استراتيجية تعميم الحساب، التفكير الجبري، تحصيل الجبر، تلاميذ المرحلة الاعدادية.

**Abstract**

The current research problem was the weakness of algebraic thinking and achievement among pupils at preparatory school.

The research sample consisted of students of two classes from a government preparatory school boy: the experimental group (the class 2/3, n = 50) and control group (the class 2/4, n = 46), and use the experimental design of the type “Pretest-posttest Control Group design”.

The research tools were: Algebraic Thinking Test (ATT) and Achievement in Algebra Test (AAT), where both tests were applied before and after the experiment. The results of research indicated that: there was effect of the generalization of arithmetic strategy to develop algebraic thinking and achievement, and there was no relationship between algebraic thinking and achievement. The research introduced some of recommendations to increase attention to developing algebraic thinking and suggested for future studies related to algebraic thinking at all education levels.

**Key words**: generalization of arithmetic strategy, algebraic thinking, achievement of algebra, and preparatory school students.

**مقدمة**

التعميم بصفة عامة هو أحد العمليات المعرفية التي تكون متأصلة في السلوك الإنساني وتميل إليه، ويستخدمها الأفراد سواء بقصد أو بدون قصد للتوصـــل إلـــى تعميمات حول الحكم على سلوكيات الآخرين سواء كانت تلك التعميمات صـــحيحة أم خاطئة.

ويختلف التعميم في الرياضيات أو فروعها المختلفة عن التعميم العادي، حيث يتميز التعميم الرياضي بإمكانية تنفيذه على كافة الحالات الخاصة ولا يعتبر التعمـــيم تعميم رياضي إذا وجدت حالة واحدة لا تحقق هذا التعميم ويعتبر حينئذ تعميم خاطئ.

ويعد الجبر أحد فروع الرياضيات التي يتعلمها التلاميذ بعـــد تعلمهـــم قـــدر مناسب من الحساب، حيث يركز الجبر على الأنشطة الجبرية التي تســـاعد التلاميـــذ على الوصول إلى عبارات عامة معممة حول ســـلوك الأعـــداد وتطـــور وخـــواص العمليات الحسابية. (Alghtani and Abdulhamied, 2010: 256)

لذا فإن استغلال تعلم الحساب باعتباره الخلفية المعرفية لـــتعلم الجبـــر لـــدى التلاميذ هو أمر مهم، وذلك حتى يتسني لهؤلاء التلاميذ الانطلاق الناجح إلـــى تعلـــم الرياضيات بصورة مجردة مثل تعلم موضوعات الجبر بما يتضـــمنه مـــن رمـــوز وجداول ومعادلات ومتباينات ودوال...الخ، وذلك عن طريق إحدى الاســـتراتيجيات المهمة القائمة على تعليم وتعلم موضوع الجبر باستخدام تعميم للحساب.

والتوجه المعني بالجبر كتعميم للحساب، يقصد به أن يكون التحرك من تعميم الحساب باستخدام دراسة حالات خاصة والتوسع فيها للوصول إلـــى التفكيـــر فـــي التركيب الرياضي الأساسي للحساب من خلال تعيين الأنماط التي تكون موجودة في الحساب وترجمتها إلى أحد التمثيلات الجبرية. (Ontario, 2010)

ومن المفيد أن ينظر للتفكير الجبري كثقافة مصغّرة ضمن الثقافـــة الأوســـع وهي الرياضيات، وهذا يسمح بدمج مجموعة من الأنشطة في الجبر مثل التفاعل بين الجبر وفروع الرياضيات الأخرى كالحساب. (Lee, 1996: 87)

ويؤكد التفكير الجبري على أن الجبر لا يقتصر على مجرد معالجة المتغيرات بل هو طريقة للتفكير، فالنجاح في الجبر يعتمد على استخدام التفكير بطـــرق قويـــة

ومتنوعة تعزز الأداء الجبري المنتج، فعندما يفكر الناس جبرياً ليحلوا المشكلات، فإن عادات عقلية متنوعة من التفكير تنمو لديهم من خلال المعالجات مثل بناء عبـــارات لتمثيل الدوال وتجريد الحسابات. (Alghtani and Abdulhamied, 2010: 257)

والبحث الحالي يتبني توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعلم الجبر وبيـــان أثرها على تنمية التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية.

**تحديد مشكلة البحث**

يعد تنمية التفكير الجبري أحد العمليات المعرفيـــة والمهـــارات والمتطلبـــات المهمة التي تساعد التلاميذ على العبور من تعلم الحساب إلى تعلم الجبر بخطى واثقة وقوية، كما وأنه قد يؤثر الضَعف في التفكير الجبري على تعلم الجبر مما قد يســـبب مشكلات عديدة في تعليم الجبر الحالي والمستقبلي لدى التلاميذ مما قد يـــنعكس هـــذا الضَعف على تعلم فروع الرياضيات الأخرى، وذلك على اعتبار أن الجبر هو بوابة العبور إلى تعلم الرياضيات بمعناها الدقيق والمتخصص، ويؤكـــد تلـــك التوجهـــات الاهتمام الدولي بموضوع التفكير الجبري ومحاولات تضـــمينه فـــي تعلـــيم منـــاهج الرياضيات لمختلف الصفوف، فإذا لم يمارس التلاميذ التفكير الجبري فربما يواجهون صعوبات متوقعة خلال معالجتهم لموضوعات الجبـــر وموضـــوعات الرياضـــيات الأخرى.

ونظراً لوجود رؤى مختلفة لتعلم الجبر تعبّر عن انتقال التلاميذ مـــن تعلـــم الحساب إلى تعلم الجبر مثل الجبر كتعميم للحساب أو تعلم الأنماط كمدخل لتعلم الجبر أو تعلم التفكير في الدوال والنمذجة الجبرية، حيث يمكن اعتبار أن تلك الرؤى تشير في مجملها إلى أهمية تعلم الجبر عن طريق استراتيجيات تساهم في الوصـــول إلـــى تعميمات جبرية انطلاقاً من تعلم الحساب، وتكون تلك التعميمات الجبرية في صورة قوانين جبرية أو خواص للعمليات الجبرية أو في شكل دوال أومعادلات أو متباينات.

ولتحديد مستويات تلاميذ الصف الثاني الإعـــدادي فـــي التفكيـــر الجبـــري والتحصيل، استخدم البحث مهام تقيس التفكير الجبري والتحصيل بالاستعانة بـــبعض الدراسات مثـــل: (Radford, 2006) (Alqhtani and Abdulhamied, 2010)، وأرسلت لأحد معلمي الرياضيات بعد عقد عدد من اللقاءات معه لاستيعاب موضـــوع

البحث، وذلك لتطبيقها في أحد فصول الصف الثاني الإعدادي على التلاميذ تحريرياً خلال الفصل الدراسي الثاني من العام ٢٠١٦/٢٠١٧م، ثم مناقشتهم فيها شفهياً لشرح كيف توصلوا لإجاباتهم، ويعرض جدول (١) هذه المهام.

*جدول (١): مهام غير شكلية تقيس التفكير الجبري والتحصيل*

**العدد المفقود من النمط: ١، ١، ٢، ٣، ٥، ... ، ١٣ هو ........**

**أقرأ الجدول ثم اكتب قيمة س.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٦ | ٥ | ١١ | س | ٥٠ |
| ١٨ | ١٥ | ٣٣ | ٣٠ | ١٥٠ |

**قيمة س = .......**

**العلاقة في صورة معادلة ........................................**

**إذا كان طول أحمد = ١٣٢ سم، وطول محمد = ١٣٧ سم. إذا علمت أن طول إبراهيم أقل من طول محمد وأكبر من طول أحمد، فإن طول إبرهيم = ....... سم.**

**مثّل العلاقة بين أطوال أحمد ومحمد وإبراهيم في صورة متباينة**

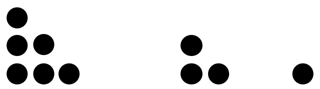
**..............................................................**

**إذا كان: س + ١٥ = ٥ × ص. أوجد قيم س، ص بالتخمين وتحقق من حلك.**

**قيمة س= .......، قيمة ص= .......**

**التحقق : ......................................................................................**

**لديك النمط:**



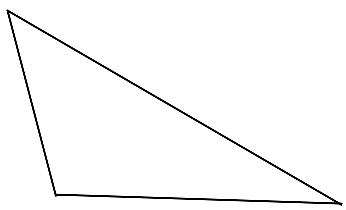
**كوّن جدول يوضح العلاقة بين عدد الدوائر وترتيب الشكل.**

| الترتيب | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الدوائر | ١ | ٣ | ٦ | ١٠ | ١٥ | ٢١ |

**اكتب عدد الدوائر للشكل العاشر. ........................................**

**اكتب القاعدة للشكل النوني . ........................................**

**لديك مثلث كما بالشكل: اكتب العلاقة بين أضلاعة بصورة رمزية، إذا كان أطوال أضلاعة هي س، ص، ع؟ ووضح بأمثلة.**



**القاعدة الرمزية : .............................................**

**الشرح بأمثلة: .............................................**

**..........................................................**

**..........................................................**

وحللت الاستجابات التحريرية والشفهية للتلاميذ على المهام المعروضة في جدول (١)، حيث لوحظ ما يلي:

أ. وجود صعوبات لدى كثير من التلاميذ عند وصف العلاقة في صورة تمثيل رمزي نتيجة قلة استيعابهم وتوصلهم إلى تعميمات صحيحة أو صعوبة استيعابهم لمفهوم التعميمات.

ب. وجود ممارسات خاطئة متعلقة بحل المشكلات لدى كثير من التلاميذ، مثل صعوبات في تطبيق استراتيجية محددة للحل أو تمثيل المشكلة رياضياً أو السير في إجراءات الحل أو التحقق من صحة الحل.

ج. ميل غالبية التلاميذ إلى العلاقات الجمعية (الإضافة)، وقليلاً ما يفكرون في التفكير العلاقي (الضرب والمعدّل والتناسب) خلال معالجة المشكلات الجبرية وخاصة التي تتطلب الوصول إلى تعميم.

د. شرح التلاميذ عادة تبرير اجاباتهم دون الاستناد إلى تعميمات أو مفاهيم معروفة سبق لهم دراستها.

ه. وجود دلائل تشير إلى أن التلاميذ ينظرون إلى الجبر كموضوع قائم على الحفظ والتكرار أكثر من الفهم والتفكير.

و. قلة استيعاب كثير من التلاميذ لبعض المفاهيم الجبرية أو تمثيلها أو استخدامها في الحل مما يدل على وجود مستويات تحصيلية منخفضة لديهم.

وإجمالاً فالملاحظات السابقة تؤكد وجود صعوبات في التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي سواء في التمثيلات الرياضية أو حل المشكلات أو الاستدلال الكمي، ظهر ذلك من خلال تعاملهم مع مهام تعميم الأنماط وصعوبة تجريد الحسابات وصولاً إلى التعبير الرمزي وشرحهم لعملهم وتبريره، كما أن تحصيلهم المعرفي كان منخفضاً.

بالإضافة إلى ما سبق، عند مسح الدراسات السابقة – في حدود الإمكانات – (انظر الإطار النظري والدراسات السابقة للبحث) وجد ندرة في الدراسات العربية التي وظفّت استراتيجية تعميم الحساب لتعليم الجبر في مقرر الجبر بالمرحلة الإعدادية.

وتتلخص مشكلة البحث الحالي في وجود ضَعف لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي في التفكير الجبري والتحصيل، وربما يؤثر ذلك على وجود مشكلات حالية في تعليمهم وتعلمهم في الجبر أو مستقبلية عند تعليم وتعلم الجبر بصفة خاصة والرياضيات بصفة عامة خلال المرحلة الإعدادية أو المراحل الأخرى التالية لها.

**تساؤلات البحث**

اهتم البحث بالإجابة عن السؤال الرئيسي التالي بهدف التصدي لمشكلته وهو "كيف يمكن توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ االمرحلة الإعدادية؟"، ويتفرع من السؤال الرئيسي الأسئلة الفرعية التالية:

١. ما أثر توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي؟
٢. ما أثر توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر على تحصيل الجبر لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي؟
٣. ما العلاقة بين (التفكير الجبري، وتحصيل الجبر) لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي؟

**فروض البحث**

للإجابة عن تساؤلات البحث صيغت الفروض الصفرية التالية لاختبارها إحصائياً بهدف قبولها أو رفضها بعد استخدام الأساليب الإحصائية المناسبة:

١. لا يوجد فرق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ≤ ٠.٠٥ بين متوسطي درجات تلاميذ مجموعتي البحث التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري.
٢. لا يوجد فرق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ≤ ٠.٠٥ بين متوسطي درجات تلاميذ مجموعتي البحث التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار تحصيل الجبر.

٣. لا توجد علاقة موجبة ودالة إحصائيا عند مستوى دلالة ≤ ٠.٠٥ بين كل من درجات التلاميذ البعدية في كل من: (التفكير الجبري، والتحصيل) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

**أهداف البحث**

يعمل البحث على تحقيق الأهداف التالية:

١. التحقق من أثر استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.
٢. تحديد أثر استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر على تحصيل الجبر لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.
٣. التحقق من العلاقة بين: التفكير الجبري، وتحصيل الجبر لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.

**تحديد مصطلحات البحث**

**١. استراتيجية تعميم الحساب Generalization of Arithmetic Strategy**

يشرح (Strachota, 2016: 41) التعميم بأنه نشاط عالي المستوى ويتطلب استدلال تواصلي، حيث لا يكون التركيز على حالة معينة، ولكن على الأنماط والعلاقات من مجموعة من الحالات.

ويستفاد من عملية التعميم Generalization في التعلم باكتساب التلاميذ للمهارات وتنميتها والإستفادة من المفاهيم في سياق ما، وتطبيق ذلك على حل مشكلات جديدة في سياقات متنوعة، فالعديد من المشكلات تكون عادة مختلفة ظاهرياً ولكنها متشابهة هيكلياً، والتعميم يتطلب النظر إلى الماضي لتجاوز الاختلافات الظاهرية إلى إدراك العلاقات العميقة. (Ley, 2016)

والتعميم هو نشاط يتميز بالأصالة في فصول دراسة الرياضيات، حيث يهتم بعملية فحص مجموعة من الحالات الخاصة، ويستلزم القيام بعدد من العمليات مثل التبرير والتجريد والتحقق. (Strachota, 2016: 41-46)

واستراتيجية التعميم Generalizing Strategy عبارة عن إجراءات تدريسية يستخدم فيها المعلم مهارة التعميم كإحدى مهارات حل المشكلات، بحيث

تستخدم لبناء مجموعة من العبارات أو الجمل التي تشتق من العلاقات بين المفـــاهيم العلاقية، ويمكن تطبيقها في الوقت ذاته على جميع الحالات كحالة عامة.

(جودت، ٢٠١٨: ٤٨١)

والمصطلح الإجرائي لـــ "استراتيجية تعميم الحساب" في البحث الحالي يقصد بها "الخطوات الإجرائية التي تتضمن استخدام الأنشطة وطرق وأساليب التعليم والـــتعلم وأدوات التعلم، التي يوظّفها المعلم ويهدف فيها إلى وصول التلاميذ إلـــى مســـتويات عالية من التفكير الجبري عبر توجّه تعلم الجبر باستخدام تعميم الحساب، وتتضـــمن تلك الخطوات: مرحلة تنظيم المعلومات، ومرحلة دراسة حالات خاصـــة محـــدودة، ومرحلة دراسة حالات خاصة غير محدودة (موسّعة)، ومرحلة التنبؤ لغوياً للتعمـــيم، ومرحلة انتاج تمثيلات مساعدة للتعميم، ومرحلة التنبؤ جبرياً للتعميم، ومرحلة التحقق والمراجعة وتبرير التعميم".

**٢. التفكير الجبري Algebraic Thinking**

يعرّف (ناصر، ٢٠١٦: ١٣٠) التفكير الجبري بأنه" أحـــد أنمـــاط التفكيـــر المرتبطة بمجال الجبر من بين مجالات الرياضيات المدرسية، ويتضـــمن مجموعـــة الأنشطة والعمليات العقلية التي يقوم بها التلميذ عنـــد معالجـــة موضـــوعات الجبـــر والمتمثلة في الأنماط والعلاقات والدوال".

والتفكير الجبري هو "استخدام مجموعة متنوعة من التمثيلات التـــي تعـــالج المواقف الكمية بطريقة علاقية لتصبح العلاقة بين المتغيرات واضحة" أو هو "القدرة على العمل مع الكمية غير المعروفة (المجهولة) كما لو كانت هذه الكمية معروفـــة".

(Alghtani and Abdulhamied, 2010: 257)

وبناء على ما سبق فإن المصطلح الإجرائي لـــ "التفكير الجبـــري" فـــي البحـــث الحالي يقصد به "أحد أنماط التفكير التي تعبّر عن عمليات يقوم بهـــا التلاميـــذ عنـــد تعلمهم الجبر، تعتمد على اكتشافهم لتراكيب الحساب وخصائصها المتنوعة، ومن ثـــم التوصل إلى تعميمات جبرية من خلال استيعاب وصياغة وتمثيل التعبيرات الحسابية المختلفة عبر ممارسة التمثيل الرياضي وحل المشكلات والاستدلال الكمي".

### ٣. تحصيل الجبر Achievement of Algebra

يشير التحصيل إلى المعرفة والمهارات المكتسبة نتيجة لدراسة موضوع أو وحدة تعليمية معينة، وتشمل هذه المعرفة الفهم والتطبيق معاً، والقدرة على تمثيل هذه المعرفة وتطبيقها في مواقف جديدة. (عامر، ٢٠١٦: ١٢١)

والمصطلح الإجرائي لـ "تحصيل الجبر" في البحث الحالي يقصد به "مدى اكتساب التلاميذ المعرفة الجبرية المتضمنة بالوحدتين: الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين" من كتاب الرياضيات – الفصل الدراسي الأول – الصف الثاني الإعدادي بما تتضمنه من مفاهيم وتعميمات ومهارات، وقدرتهم على تذكرها واستيعابها وتطبيقها في مواقف روتينية أو مواقف جديدة".

**حدود البحث**

اجري البحث في إطار من الحدود التالية:

١) الحدود الموضوعية:

- إعداد اختبار التفكير الجبري في ضوء الأبعاد الثلاثة: التمثيلات، حل المشكلات، الاستدلال الكمي.
- المرحلة التعليمية الإعدادية (الصف الثامن من مرحلة التعليم الأساسي – الصف الثاني الإعدادي).
- إجراء البحث على فرع الجبر، وذلك في الوحدتين التعليميتين: الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين"، من كتاب الرياضيات للصف الثاني الإعدادي – الفصل الدراسي الأول – طبعة العام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٧.
- إعداد اختبار تحصيل الجبر على المعرفة الجبرية المتضمنة في الوحدتين: الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين"، في ضوء المستويات المعرفية: المعرفة، الاستيعاب، التطبيق.
- اختبار فروض البحث عند مستوى دلالة إحصائية ≥ ٠.٠٥.

٢) الحدود المكانية:

- عينة من تلاميذ الصف الثاني الإعدادي من مدرسة محلـــة أبـــو علـــى الإعدادية للبنين – إدارة شرق المحلة التعليمية لتمثّــل عينـــة التجربـــة الأساسية (تجريبية، فصل ٢/٣، ن=٥٠ – ضابطة، فصل ٢/٤، ن=٤٦)، وعينة استطلاعية من ذات المدرسة (فصل ٢/٢، ن=٤٨).

٣) الحدود الزمانية:

- أجريت الدراسة خلال الفصـــل الدراســـي الأول مـــن العـــام الدراســـي ٢٠١٨/٢٠١٧م.
- استغرق تعليم دروس الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحـــدة الثانيـــة "العلاقة بين متغيرين" حوالى شهرين بمعدّل ثلاث حصص أسبوعياً.

**الإطار النظري والدراسات السابقة**

**التفكير الجبري**

لا يمكن تحديد تعريفاً محدداً للتفكير الجبري، ربما بسبب تغطية هـــذا المفهـــوم لنطاق واسع من المفاهيم الجبرية (كالمعادلات، والدوال، والأنماط، والعلاقـــات ...) والعمليات (كالمعكوس، والتبسيط ...)، بالإضافة إلى احتوائه على طرق ممكنة مـــن التفكير البصري التخيلي بصفة عامة، ومن الواضح أن التفكير الجبري هـــو شـــكل خاص من التأمل في الرياضيات. (Radford, 2006)

والتفكير الجبري هو مصطلح أوسع دلالة من الجبر، حيث يمكن تعريفه بأنه "استخدام مجموعة متنوعة من التمثيلات التي تعالج المواقف الكمية بطريقة علاقية"، أو بأنه "القدرة على العمل مع الكمية غير المعروفة (المجهولة) كما لو كانـــت هـــذه الكمية معروفة مقابل الحساب الذي يعبِّر عن الاستدلال حول كميـــات معروفـــة"، أو يمكن اعتباره بأنه "القدرة على تمثيل المواقف الكمية بحيث تصـــبح العلاقـــة بـــين المتغيرات واضحة". (Alghtani and Abdulhamied, 2010: 257)

وأصبح التفكير الجبري عبارة شاملة تدل على تعليم الرياضيات وتعلمها من شأنها أن تعد الطلاب وتكسبهم مهارات التفكير الناقد اللازم للمشاركة الكاملـــة فـــي المجتمع ولأجل ممارسة خبرات ناجحة في الجبر. (Kriegler, 2008)

والتفكير الجبري يرتبط بعمليات تعليم وتعلم الحساب من المراحل الابتدائية إلى تعليم وتعلم الدوال وحساب التفاضل والتكامل في الصفوف الثانوية، وهو يزود بأساس لتنمية الفهم الرياضي المجرد. (Ontario, 2010)

ويعرّف (ناصر، ٢٠١٦: ١٣٠) التفكير الجبري بأنه" أحد أنماط التفكير المرتبطة بمجال الجبر من بين مجالات الرياضيات المدرسية، ويتضمن مجموعة الأنشطة والعمليات العقلية التي يقوم بها التلميذ عند معالجة موضوعات الجبر والمتمثلة في الأنماط والعلاقات والدوال".

ويتعدى التفكير الجبري أكثر من مجرد تعلم كيفية حل المتغيرات مثل س، ص، فهو يساعد الطلاب على التفكير في الرياضيات بشكل مجرد، ويوفّر لهم طريقة للاستدلال حول مشكلات الحياة الواقعية، ويمكن تحديد ثلاثة مكونات للتفكير الجبري هي: (Alghtani and Abdulhamied, 2010: 257)

- فهم الأنماط وعمل تعميمات، والتجريد.
- استخدام الرمز الجبري وفهم المفاهيم حول علاقة التساوي.
- الاستدلال حول الكميات المجهولة.

ويتناول التفكير الجبري العلاقات الرياضية العامة، والتعبير عنهم بطرق موّسعة مثل الأنشطة التي تتحرك من خلال رؤية الأنماط العددية، وكذلك يتناول الهندسة والقياس للمحاولة لحل العديد من المشكلات المعقدة.

(Booker and Windsor, 2010: 411)

ويمكن تفسير التفكير الجبري كمدخل للمواقف الكمية التي يمكن أن تترجم إلى أشكال علاقية عامة من خلال استخدام مجموعة من الأدوات التي قد لا تكون بالضرورة في صورة حروف رمزية، وتلك الأدوات تستخدم كدعم معرفي أثناء تعليم الجبر المدرسي التقليدي. (Kieran, 2004: 142-143)

ولا يمكن النظر إلى التفكير الجبري كموضوع أو معيار جديد يمكن إضافته، لأنه موجود في المنهج، ولكنه يتوجه إلى الربط بين الموضوعات القائمة في الرياضيات وخاصة قبل دراسة الجبر وخلال بدايات دراستة لتوفير فرص للتعلم

الحقيقي في وقت لاحق، فخلال المراحل الابتدائية والإعدادية يكون التركيز على التفكير الجبري بدلاً من التركيز على الجبر الشكلي الذي يقدم في المرحلة الثانوية، ويكون ذلك من خلال بناء المفاهيم والأفكار عبر أنشطة عديدة ينخرط فيها الطلاب في فروع الرياضيات. (Booker and Windsor, 2010: 412-418)

وهناك فوائد لتنمية التفكير الجبري لدى الطلاب، مثل التأكيد على تقديم المفاهيم الجبرية ذات معنى من وراء الإجراءات والأساليب المرتبطة بالجبر الشكلي، واستخدام مدخل حل المشكلة لتنمية التفكير الجبري، كما أن التأكيد على المنظور الجبري للرياضيات وخاصة للصفوف المبكرة يعمل على تعزيز التعلم على المدى الطويل لغالبية الطلاب. (Booker and Windsor, 2010: 419)

والتفكير الجبري يدعم كل أشكال التفكير الرياضي في كافة فروع الرياضيات بما في ذلك الحساب، لأنه يسمح باستكشاف تراكيب الرياضيات، وهناك أهمية لإدراج التفكير الجبري في تعليم الرياضيات خلال السنوات المبكرة التي تجعل كل شخص لديه القدرة على التفكير جبرياً، لأن التفكير الجبري يعد عمليات أساسية لسلوك البشر الذين يتفاعلون مع العالم، فالبحث عن الأنماط في المواقف المألوفة وغير المألوفة والوعي بجوانب النمط المهمة، كلها تؤكد على أن التفكير الجبري موجود في مجالات كثيرة في حياتنا، فمثلاً المقارنة بين مزودي خدمة الهواتف النقّالة للحصول على أفضل خدمة، أو تحديد الأوقات والمسافات عند قيادة السيارة يتضمن استخدام التفكير الجبري. (Ontario, 2010)

وتتطلب تأدية كثير من المهن في الحياة على الوجه الأمثل دراسة التفكير الجبري مثل: (Ontario, 2010)

- المتخصصون في الهندسة المعمارية والإنشائية، يستخدمون التفكير الجبري في تصميم المباني وتحديد المواد اللازمة لبناء الهياكل.
- مطوروا البرامج يستخدمون التفكير الجبري عند إنشاء الرموز.
- المصرفيون يستخدموا الجبر في معالجة الرهن العقاري وأسعار الفائدة.

- العلماء يستخدمون الجبر في غالبية المجالات.

وتشير وثيقة المعايير إلى أن معيار تعلم الجبر لكـل الصـفوف الدراسـية يتضمن ما يلي: (NCTM, 2000: 37)

١. فهم الأنماط والعلاقات والدوال.
٢. تمثيل وتحليل المواقف والتراكيب الرياضية باستخدام الرموز الجبرية.
٣. استخدام الأنماط الرياضية لتمثيل وفهم العلاقات الكمية.
٤. تحليل التغيّر في سياقات متنوعة.

ويؤكد معيار تعلم الجبر السابق على أهمية ممارسة التلاميذ للتفكير الجبـري من خلال فهم الأنماط والعلاقات والدوال، وتوظيف التمثـيلات وتحليـل التراكيـب الرياضية وفهم العلاقات الكمية وحل مشكلات متنوعة.

والتفكير الجبري مهم لأنه يدفع الطلاب إلى فهم الرياضيات بصورة أعمـق من مجرد عمليات الحسابات المحددة والتطبيق الإجرائي للعلاقات، ويحتاج الطـلاب إلى وقت لاكتشاف مجموعة متنوعة من الأمثلة التي من خلالها يمكن الوصول إلـى التعميمات وتطبيقها بمرونة على التعلم اللاحق. (Ontario, 2010)

ويرتبط التفكير الجبري بمجموعة من المهارات تتباين وفق المستوى الدراسي منها: استيعاب الأنماط الرياضية، واستخدام الرموز الجبرية، واسـتخدام التمثـيلات الرياضية، ووصف العلاقات الرياضية. (ناصر، ٢٠١٦: ١٣٠)

ومصطلح التفكير الجبري يكون مفيد في التفكير حول ابتكار خبرات تـزود بسياقات غنية للمناقشة خلال سنوات الدراسة لطلاب المرحلتين الابتدائية والإعدادية. (Johanning, 2004: 372)

وبصفة عامة يمكن تنمية التفكير الجبري من خلال توظيف استرتيجيات متنوعة منها: (Ontario, 2010)

١. التفكير الجبري كتعميم للحساب Algebraic Thinking as Generalizing Arithmetic، من خلال استكشاف الخـواص والعلاقـات بـين الأعـداد، واستكشاف المساواة (التساوي) كعلاقة بين الكميات، واستخدام الرموز بمـا تتضمنة من حروف تعبّر عن المتغيرات.

٢. التفكير الجبري كتفكير متعلق بمفهوم الدالة Algebraic Thinking as Functional Thinking، حيث يعتبر التفكير المتعلق بمفهوم الدالة شكل آخر للتعميم يربط بين فئتين تحت شروط معينة.

والتفكير الجبري له مركبتين رئيسيتين يتمثلان في:المركبة الأولى وهي تنمية أدوات التفكير رياضياً التي تعرّف كعادات عقلية تحليلية Analytically Habits of Mind تتركز حول ثلاثة موضوعات وهي مهارات حل المشكلة ومهارات التمثيل ومهارات الاستدلال الكمي، أما المركبة الثانية فهي الأفكار الأساسية في الجبر وتمثل المحتوى الذي يمارس فيه أدوات التفكير الرياضي ويتضمن ثلاثة أجزاء هي الجبر كتعميم للحساب، والجبر كلغة، والجبر كأداة للنمذجة الرياضية. (Toheri and Winarso, 2017) (Kriegler, 2008)

وهناك موضوعان رئيسيان للتفكير الجبري يناسبا المتعلمين الصغار وهما: عمل التعميمات على خواص العمليات الحسابية، وتمثيل وحل المشكلات. (NCTM, 2000: 93)

كما أن مراحل بناء التفكير الجبري تتضمن القيام بما يلي:
(Booker and Windsor, 2010: 412)

١. تعلم الأنماط، حيث ينتقل الطلاب من التفكير الجمعي إلى التفكير الضربي (التفكير العلاقي) باستخدام الجداول لتنظيم وتوسيع التفكير.
٢. الحل باستخدام المجهول، وباستخدام الجداول والعد والرسوم البيانية.
٣. ايجاد المجاهيل، عن طريق ايجاد مجاهيل متعددة وفهم التكافؤ.
٤. التدرّب على الاستدلال كنظام شكلي (مجرد).

وينظر عادة إلى التفكير الجبري من خلال بُعدين هما: مجال استخدام الحساب لتنمية التعميمات والتعبير عنها بما يعرف بالتفكير العلاقي Relational Thinking، ومجال استكشاف الأنماط الشكلية والعددية لوصف العلاقات الدالية بما يعرف بالتفكير المتعلق بالدوال Functional Thinking.

(Oliveira and Mestre, 2014: 179)

وجدول (٢) يوضّح مركبتا التفكير الجبري.

جدول(٢): مركبتا التفكير الجبري (Kriegler, 2008)

| أدوات التفكير الرياضي | الأفكار الجبرية الأساسية |
|---|---|
| **مهارات حل المشكلة:**<br>**استخدام استراتيجيات حل المشكلة.**<br>**استكشاف المداخل المتعددة والحلول المتعددة.**<br>**مهارات التمثيل:**<br>**عرض العلاقات بصريا ورمزيا وعدديا ولفظيا.**<br>**الترجمة بين التمثيلات المختلفة.**<br>**تفسير المعلومات في إطار التمثيلات.**<br>**مهارات الاستدلال الكمي:**<br>**تحليل المشكلات لاستخراج وتحديد الخصائص الأساسية.**<br>**الاستدلال الاستقرائي والاستنباطي.** | **الجبر كتعميم للحساب:**<br>**استراتيجيات حسابية قائمة على أساس مفاهيمي.**<br>**النسبة والتناسب.**<br>**التقدير.**<br>**الجبر كلغة الرياضيات:**<br>**معنى المتغيرات وتعبيرات المتغيّر.**<br>**معنى الحلول.**<br>**فهم واستخدام خصائص نظام الأعداد.**<br>**قراءة وكتابة ومعالجة الأعداد والرموز باستخدام القواعد الجبرية.**<br>**استخدام التمثيلات الرمزية للمساواة لمعالجة الصيّغ والتعبيرات والمعادلات والمتباينات.**<br>**الجبر كأداة للدوال والنمذجة الرياضية:**<br>**البحث عن الأنماط والتعبير عنها وتعميمها في محتويات العالم الحقيقي.**<br>**تمثيل الأفكار الرياضية باستخدام المعادلات أو الجداول أو الرسوم البيانية أو الكلمات.**<br>**العمل داخل وخارج مجال الأنماط.**<br>**تنمية مهارات الرسم البياني في المستوى الديكارتي.** |

ويوصّف العمل في التفكير الجبري من خلال ثلاثة عناصر مترابطة هي: (Radford, 2006)

١. الحس بالاستقلالية الذي يناسب موضوعات الجبر الأساسي مثل: المجاهيل، والمتغيرات، والبارامتر، وعملية الاستقلالية (عدم التحديد) تفيد في استبدال (تعويض) متغيّر واحد أو مجهول بآخر تحت شروط معينة.

٢. الموضوعات غير المحددة يتم تناولها تحليلياً، باعتبار أن الجبر هو موضوع تحليلي.

٣. رؤية التفكير الجبري كنمط رمزي، الذي لا يتقيد بموضوعات محددة، حيث لا يمكن أن يتحدد بالموضوعات الجبرية ويقتصر على الحروف فقط.

وتعد التمثيلات الرياضية العمود الفقري للتفكير الجبري، فتهدف التمثـيلات الجبرية إلى مساعدة التلاميذ على تجريد العلاقات بين الكميات، فمثلاً في المشـكلات الكلامية يطلب منهم أن يحللوا العلاقات بين الكميات ويصيغوا الأسئلة، ثـم يمثّلـوا المعلومـات فـي شـكل مختلـف باسـتخدام الجـداول والرسـوم البيانيـة.

(Ferruci, 2004: 135) (Oliveira and Mestre, 2014: 177)

والقدرة على استخدام التمثيلات وعمل ترابطات بينها تقـدم أدوات تواصـل كمية، حيث يمكن عرض العلاقات الرياضية بأشكال متعددة منها التمثيلات: البصرية مثل الرسوم البيانية والصور، والعددية مثل الجداول والقوائم، والرمزية، واللفظيـة، وفي كثير من الأحيان فالتوضيح الرياضي الجيد يستلزم استخدام كثيـر مـن هـذه التمثيلات، لأن كل تمثيل يساهم في زيادة وتحسين فهم الأفكار المقدمة.

(Tagle; Belecina, and Ocampo, 2016: 150)

وحل المشكلة تعني معرفة ما يجب القيام به من جانب التلميذ عندما يواجـه مشكلة ما، فالتلاميذ الذين اكتسبوا مجموعة من استراتيجيات حل المشـكلات مثـل الفحص والتحقق، ووضع قائمة، والعمل للخلف، واستخدام نمـوذج، وحـل مشـكلة مشابهة ... الخ تكون قدرتهم أفضل للبدأ مع المشكلة ومحاولة فهمها ومعرفة ما يجب القيام به، فإعطاء التلاميذ مناسبات لاستكشاف المشكلات الرياضية باستخدام مـداخل متعددة أو استنباط مشكلات رياضية لها حلول عديدة تسمح لهم أن لا تنمو لديهم فقط مهارات حل المشكلة بصورة جيدة، وإنما أيضاً تنمو لديهم حاسة استشعار مدى نفـع الرياضيات عن طريق نمذجتها باستخدام مواد محسوسة.

(Tagle; Belecina, and Ocampo, 2016: 149-150)

ويضيف توظيف الاستدلال الجبري في الحساب اتساع وعمـق للمعـرفتين المفاهيمية والإجرائية لدى التلاميذ، ويزودهم بطرق قوية فـي التفكيـر الرياضـي، والانتقال من الحساب والبراعة الحسابية إلى التفكير بعمق أكثر في بنية الرياضـيات والعلاقات بين الكميات مما يمثّل تحولاً نحو تطوير الأفكار الأساسية لدراسة المفاهيم

الجبرية، والتعليم الذي يدعم مثل هذا النوع من التفكير هو أمر مهم في تطوير التعليم الجبري للتلاميذ خلال المرحلة الإعدادية.

(Glassmeyer and Edwards, 2016: 94)

ويستطيع المعلم تنشيط الاستدلال في الجبر من خلال تضمين مهـــام تحفّــز التلاميذ على حل المشكلات، وتوسيع المهمة لتضمين التعميم، والتركيز على التراكيب والعلاقات، وعمل تغييرات للأعداد في المشكلة لتصبح لها حلول متعـــددة، والتأكيـــد على مناسبات لطرح استجابات الطلاب ومناقشتها وربطها بالتبرير.

(Hunter, 2015:62)

وخلال مناقشات حجرة الدراسة يســـاعد المعلـــم التلاميـــذ علـــى وضـــوح المناقشات، ويطلب منهم مناقشة استدلال زملائهم، ويجعلهم يعملـــون فـــي أزواج أو كمجموعات تعاونية لتنمية العمل الجماعي على اســـتراتيجية حـــل مشـــكلة معينـــة، وسؤالهم ليشيروا إلى موافقتهم أو عدم موافقتهم لجزء من الشرح أو على الشرح كله وطـــرح اســـتدلالاتهم، وتشـــجيعهم علـــى التســـاؤل القـــائم علـــى التبريـــر.

(Hunter, 2015:63)

ويرتبط التفكير الجبري بشكل وثيق بـــ "عادات العقل الجبرية" Algebraic Habit of Mind، والتي يمكن تعريفها بأنها "مهارات تستخدم المعرفـــة الرياضـــية بطرق مختلفة من التفكير والتي تصبح عادات، وهي عبارة عن تجمّـــع مـــن أهـــم مكونات التفكير الجبري معاً، وتسمح بالعمل على الأنشطة والمناقشات المستخدمة في التفكير الجبري في الفصول الدراسية في سياق أوسع، وهناك ثلاثة عناصر يتشـــكّل منها عادات العقل الجبرية تتضمن:

(Eroğlu and Tanışlı, 2017: 568-569)

١) العمل والتراجع Doing-Undoing.

٢) بناء القواعد لتمثيل الدوال Building Rules to Represent Functions.

٣) التجريد من الحسابات Abstraction from Computations.

وجدول (٣) يعرض عناصر عادات العقل الجبرية.

*جدول (٣): عادات العقل الجبرية (Eroğlu and Tanışlı, 2017: 569)*

| | بناء قواعد تمثيل الدوال | التجريد من الحسابات |
|---|---|---|
| العمل والتراجع Doing & Undoing | **البحث عن نمط:**<br>**كشف النمط.**<br>**التعرّف على النمط:**<br>**البحث عن المعلومات المتكررة بتحديد كيفية عمل النمط.**<br>**استخدام التمثيلات المتعددة.**<br>**التنبؤ بالنمط.**<br>**تحليل التغيّر.**<br>**التعميم:**<br>**تعريف القاعدة.**<br>**صلاحية القاعدة.** | **استخدام التراكيب:**<br>**ايجاد الحسابات المختصرة.**<br>**كتابة المساواة بناء على الاحتياج.**<br>**صياغة التعميم حول الحساب:**<br>**تحديد متى يعمل الحل في شروط مختلفة.**<br>**استخدام الحسابات المختصرة لفهم كيفية عمل أنظمة العدد.**<br>**التفكير حول الحسابات التي نتجت من الأعداد النوعية.**<br>**التعميم من الأمثلة.**<br>**التعبير عن التعميمات رمزياً الناتجة من العمليات.**<br>**تبرير الحسابات المختصرة.** |
| **التراجع Undoing** | | |
| **التراجع Undoing:**<br>**ايجاد العمليات (الداخلية) من النواتج (الخارجية).**<br>**العمل للخلف.** | | |

ويتضح من جدول (٣) الارتباط الوثيق بين التفكير الجبري وعادات العقل الجبرية.

والبحث الحالي يهتم باستراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر وتوظيفها داخل فصول الصف الثاني الإعدادي، مما يطرح تساؤل عن ما المقصود بالتعميم؟، وما هي استراتيجية التعميم بصفة عامة؟ وما المقصود باستراتيجية تعميم الحساب؟، لذا سيتم توضيح ذلك خلال الأجزاء التالية.

يهدف التعلم داخل الفصول الدراسية بصفة عامة إلى مساعدة التلاميذ كي يصبحوا مواطنين مستنيرين لديهم القدرة على التواصل الفعّال وصنع القرار وحل المشكلات أيا كانت مساعيهم وتخصصاتهم في المستقبل، وتحقيق هذا الهدف العام يعني التدريس من أجل التعميم، وذلك يؤثر على ما نعلّمه وكيف نعلّمه ولماذا نقوم بالتقييم. (Ley, 2016)

واستراتيجية التعميم Generalizing Strategy هي استراتيجية تدريسية يستخدم فيها المعلم مهارة التعميم بصفتها إحدى مهارات حل المشكلات، بحيث تستخدم لبناء مجموعة من التقارير التي تشتق من العلاقات بين المفاهيم، ويمكن تطبيقها في الوقت ذاته في كل الحالات. (جودت، ٢٠١٨: ٤٨١)

والتعميم Generalization في التعلم يعني القدرة على اكتساب المهارات وتنميتها والإستفادة من المفاهيم في سياق ما، وتطبيق ذلك على حل مشكلات جديدة في سياقات متنوعة (تعميم)، فالعديد من المشكلات تكون عادة مختلفة ظاهرياً ولكنها متشابهة هيكلياً، والتعميم يتطلب النظر إلى الماضي لتجاوز الاختلافات الظاهرية إلى إدراك علاقات أعمق. (Ley, 2016)

ويصف (Strachota, 2016: 41) التعميم بأنه نشاط عالي المستوى يتطلب عمليتي الاستدلال والتواصل، حيث لا يركّز على حالة معينة، ولكن على الأنماط والعلاقات من عدة حالات (التجريد).

ويهدف استخدام استراتيجية التعميم إلى أن يحقق الطلاب الأهداف التالية: (جودت، ٢٠١٨: ٤٨٥)

١. الربط بين مهارة التعميم ومهارة إصدار الأحكام أو القرارات.
٢. القدرة على التعميم للربط بين مفهومين أو أكثر.
٣. الدفاع عن أهمية مهارة التعميم في التدريس وفي الحياة اليومية.
٤. تطبيق مهارة التعميم في المواد الدراسية المختلفة.
٥. الإلمام بخطوات الوصول إلى التعميم.

ويشير (جودت، ٢٠١٨: ٤٨٦) إلى أن خطوات استراتيجية التعميم بصفة عامة في أي تخصص هي:

١. التأكد من عدد عناصر أو أجزاء المعلومات التي نهدف إلى التعميم عنها.
٢. تصنيف هذه المعلومات المتاحة إلى مجموعات أو فئات.
٣. استنتاج العلاقات بين المجموعات عن طريق فحص العناصر العامة.
٤. تلخيص الخصائص المتعلقة بكل مجموعة.
٥. تحديد التعميم الذي تم التوصل إليه.
٦. اختبار التعميم من أجل التحقق من صدقه.
٧. تطبيق الخطوات وفحص مدى فعاليتها في ضوء ما تم انجازه، وما لم يتم انجازه، وما الذي سوف يتم انجازه مستقبلاً ولكن بطريقة مختلفة.
٨. القيام بعملية فحص التعميم بعد ذلك.

٩. العمل على تحديد مجالات التحيّز.
١٠. العمل على تحديد المفاهيم في كل تعميم.
١١. النظر إلى الحقائق التي يتضمنها التعميم من أجل تدقيقها.
١٢. العمل على تدقيق أو فحص الافتراضات غير الصحيحة أو غير المكتملة.

وتشير الخطوات السابقة في مجملها إلى أن استراتيجية التعميم يمكن اعتبارها كعملية نمذجة للعلاقات بين مجموعة من المفاهيم الفرعية بما تتضمنه من توضيح تلك العلاقات عن طريق ممارسة التفكير العلاقي، والتوصل إلى نموذج أو أكثر لوصف العلاقة، واختبار هذه النموذج أو تلك النماذج، وتحديد فعالية هذه النموذج وحدودة وإمكاناته، كما تتضمن هذه الاستراتيجية عمليات استقراء واستنباط وتبرير وتجريد.

ويضيف (جودت، ٢٠١٨: ٤٨٧-٤٨٨) أن المعلم يمكنة إتاحة الفرص التعليمية للتلاميذ كي يمارسوا مهارة التحليل الناقد للتعميم عن طريق قيام الطلاب بفحص واختبار التعميم معطى أو تعميم توصلوا إليه بهدف التحقق من صحته، عن طريق تحديد الاستنتاج الذي يقوم عليه التعميم، وفحص الحقائق من حيث دقتها، والتأكد من كفاية البيانات ومدى صحتها.

ونجاح الطلاب يتوقف على اكتساب وتعميم العديد من المهارات، بما في ذلك المهارات المعرفية والمهارات الأكاديمية والمهارات الإدراكية، مثل الذاكرة والانتباه وتجهيز المعلومات وتسلسل التعلم، حيث يعد تعميم هذه المهارات أمر بالغ الأهمية. (Ley, 2016)

والتعميم يعطي قوة للأفكار الرياضية التي يمكن للطلاب الوصول إليها خلال حل المشكلات وتعميق فهمهم لها، حيث يتضمن التعميم صياغة التعبيرات والتمثيل للأفكار التي توضح أهمية العلاقات الرياضية.

(Tagle; Belecina, and Ocampo, 2016: 149)

والتعميم هو نشاط يتميز بالأصالة في فصول دراسة الرياضيات، حيث تعتبر عملية تعميم مجموعة من الحالات الخاصة، وتبرير وإضفاء الطابع الشكلي على

التعميم هو أمر أساسي في الرياضيات، ومع ذلك فإن مفاهيم التعميم تختلــف حيــث ينظر إليها عادة كطريقة لعملية دعم التفكير الجبري لكل المراحل التعليمية.
(Strachota, 2016: 41-46)

والطلاب عادة يمارسوا تعميم الأنماط في مجموعات تعاونية باتبــاع المراحــل التالية: (Radford, 2006)

- استخدام الاستقصاء الحسابي Arithmetic Investigation، حيث يستخدمون العد للوصول إلى الأنماط أرقام ١٠، ٢٥، ١٠٠.
- التعبير عن التعميم باللغة المعتادة.
- استخدام الرموز الجبرية للتعبير عن التعميم.

والتعميم يلعب دوراً حاسماً في أي نشاط يتعلق بمتعلمــي الرياضــيات، بســبب اعتباره القدرة الكامنة على التفكير الرياضي بشكل عام كهدف رئيســي فــي تعلــم الرياضيات. (Barbosa and Vale, 2015:58)

لذا فإن التفكير الجبري يمكن رؤيته كتعميم للحساب، عن طريق التحرك في التعلم أبعد من الحسابات على مجموعة من الأعداد المحددة إلى التفكير في التركيــب الرياضي للحساب عن طريق تحديد الأنماط التي تكــون فــي طبيعتهــا حســابية.
(Ontario, 2010)

وتعلم التلاميذ للتعميمات تشكّل لديهم طريقة ملموسة للبدأ في التعامل مع مفــاهيم التعميم والتجريد بداية من المرحلة الابتدائية، ومن المتوقع أيضاً أن يكتسب هــؤلاء التلاميذ القدرة على تعلم اللغة الرمزية واستخدام التمثيلات بطريقة سهلة وذات معنى في الجبر مثل الرسوم البيانية والجداول، فالانتقال من الحساب إلى الجبر يمكن انجازه على نحو مناسب من خلال تنمية الأنماط لدى الطلاب.

(Barbosa and Vale, 2015:58)

وهناك اتفاق كبير على أن أساسيات الجبر ترتبط ارتباطاً وثيقاً بفهم الطلاب للحساب، لذا فالسؤال الذي يطرح نفسه هو: عند أي نقطة يستطيع الطالب أن يغيّــر من المعالجات الحسابية للعمل مع الجبر؟، أحد الرؤى للإجابة عن هذا السؤال هي أن تعميم العمليات في الحساب هو في طبيعته عمل جبــري، فمــثلاً إدراك أن "تســعة

وتسعين من ثلاث مجموعات (99×3)" هي نفسها "ثلاث مجموعات من تسعة وتسعين (3×99)" يحتوي هذا الموقف على التفكير الجبري سواء استخدمت الحروف أم لا، ورؤية أخرى هو أن يبدأ تعلم الجبر مع الرموز مثل أ×ب = ب×أ، وبصفة عامة فأي كانت الرؤية حول متى يبدأ تعلم الجبر فإن الحس بالحساب أمر لا يمكن إغفال دوره العميق في نمو الجبر وغيره من مجالات الرياضيات الأخرى.

(Numeracy Professional Development Projects, 2008)

ويعد تعلم الجبر بعد الانتهاء من تعلم الحساب – كمتطلب سابق للجبر – له دلالة لتنمية طرق مختلفة من التفكير، حيث أن المعالجات الجبرية تقوم على أساس العمليات الحسابية الأربعة وتتداخل معها، وبالرغم من ذلك هناك فروق بين الحساب والجبر من حيث مداخل الحل. (Dettori; Garuti, and Lemut, 2002: 192)

ويوجد أربعة أنشطة توفّر جسراً قوياً لعبور الطلاب من تعلم الحساب إلى تعلم الجبر تناسب طلاب المرحلتين الابتدائية والإعدادية وهي: فهم سلوك العمليات، والتعميم والتبرير، وتوسيع نظام العدد، واستخدام الرموز بصورة ذات معنى.

(Russell; Schifter, and Bastable, 2011)

ويؤكد (Ferruci, 2004: 131) على أنه لم يعد مقبولاً أن تعلم الجبر كموضوع يقدم في المرحلتين الإعدادية والجامعية فقط، وإنما لابد أن يدعم في المرحلة الابتدائية من خلال التفكير الجبري.

وغالبية الأشكال والطرق التركيبية والرمزية في الجبر يمكن أن تبنى على خبرات الطلاب الموسّعة من الأعداد. (NCTM, 2000: 37)

ومن المثمر أن يعالج الجبر كتعميم للحساب، حيث يمكن للطلاب أن يعمموا خبراتهم مع الأعداد، والتعبير عن خصائص الأعداد من مواقف مختلفة تقوم على التمثيلات المحسوسة والذهنية والرمزية، لتبلغ ذروتها في التعبير المعمم، بعنى الانتقال من تعلم قواعد الحساب لتكون أساس للمعالجات الجبرية كالمعادلات التي تتصف بالعمومية وتعبّر بلغة موجزة عن الأعداد وخصائصها.

(Mason, 2008:77)

وخلال انتقال الطلاب من تعلم الحساب إلى تعلم الجبر، يحتاج هؤلاء الطلاب إلى عدد من الإجراءات لرؤية الجوانب العلاقية للعمليات، ومن ثم يلزم عمل الإجراءات التالية لتضمين عمليات التفكير الجبري ومنها:

(Kieran, 2004: 140-141)

١. التركيز على العلاقات وليس فقط على حساب المفاهيم العددية.
٢. التركيز على العمليات وعكسها، وعلى علاقة الأفكار ذات العلاقة أو الأفكار التي ليس بينها علاقة.
٣. التركيز على التمثيل وحل المشكلة أكثر من مجرد القيام بحلها فقط.
٤. التركيز على الأعداد والرموز، وليس الأعداد وحدها؛ بمعنى العمل مع الرموز كمجاهيل أو كمتغيرات أو كبارامترات، وقبول التعبيرات الرمزية كإجابات، ومقارنة تعبيرات التساوي القائمة على الخصائص العامة بدلاً من التقييم العددي.
٥. إعادة التركيز على معنى علامة التساوي.

ويذكر (Radford, 2006) أن هناك استراتيجيتان يمكن توظيفهما عند تعميم نمط رياضي وهما:

أ. خوارزمية تقوم على المحاولة والخطأ، حيث يقترح الطلاب قواعد بسيطة مثل "مرتان زائد واحد"، و"مرتان زائد اثنان"، و"مرتان زائد ثلاثة"، ويفحصون صلاحية ذلك في حالات قليلة، والقاعدة الرمزية التي يتوصلون لها ربما تختلف من حالة لأخرى ومن طالب لآخر، وعندما يُسأل الطلاب أن يشرحوا كيف توصلوا إلى هذه القاعدة، فيذكروا أنهم وجدوها بالصدفة.

ب. البحث عن القواسم المشتركة في الأشكال المعطاة، مثلاً "الدوائر العليا أقل من الدوائر السفلى بمقدار واحد" و"الدوائر السفلى أكثر من الدوائر العليا بمقدار واحد"، ومن ثم فالقاعدة تساوي (س+١)+(س+٢)، والقواعد التي تشكلت بتلك الطرق تكون في الواقع عبارة عن فرضيات قد تؤدي إلى استقراء أو تعميم، وعندئذ فإن تعميم نمط ما جبرياً يقوم على استيعاب القواسم المشتركة التي تمت ملاحظتها كعملية تجريد.

ويتيح استكشاف الأنماط Patterns ممارسة صياغة وتبرير التعميمات، واستخدام تلك العلاقات لعمل تنبؤات، وتيسير الانتقال بصورة سلسلة وطبيعية من تعلم الحساب إلى تعلم الجبر التقليدي، ويسمح التوصل إلى التعميمات من خلال دراسة الأنماط البصرية أن يستوعب الطلاب التكوين المفاهيمي للموضوعات والمفاهيم الرياضية، ومن ثم يصبح تعلم المعنى للرموز والتعبيرات الجبرية أكثر سهولة. (Barbosa and Vale, 2015: 57)

وتعد الأنماط والتعميمات من المفاهيم المهمة في الرياضيات بصفة عامة، وعند تعلم الجبر والتفكير الجبري بصفة خاصة، ففهم الأنماط والدوال وكيفية تمثيلها وتحليل تراكيب المواقف الرياضية فيها يعمل على تشكيل وتطوير التفكير الجبري لدى التلاميذ. (Toheri and Winarso, 2017)

وعند استكشاف نمط ما، يطلب المعلم من التلاميذ أن يبحثوا عن العلاقة بين عناصر النمط ورتبته، حيث يستخدمون التعميم لتوليد عناصر في الترتيب المحدد، وبالتالي يتكون لديهم دافعية لمعالجة النمط والتركيز على نمو النمط كعلاقة بدلاً من التركيز على المتغيرات كل على حده، ويدركون أن تعميم النمط يتطلب استخدام استراتيجية محددة للوصول إلى التعميم. (Barbosa and Vale, 2015:59)

وجدول (٤) يعرض استراتيجيات التعميم Generalization Strategies والتي يمكن استخدامها في تعميم الأنماط باعتباره أحد الأنشطة المهمة التي يمارس من خلالها التلاميذ التعميمات. (Barbosa and Vale, 2015: 59-60)

*جدول(٤): استراتيجيات تعميم الأنماط*

| الاستراتيجية | طبيعة الاستراتيجية | الوصف |
|---|---|---|
| العد | بصرية | رسم الشكل وعد عناصره. |
| العنصر ككل (بلا تعديل) | غير بصرية | اعتبار الحد في المتسلسلة كوحدة واستخدام مضاعفات هذه الوحدة . |
| العنصر ككل (تعديل عددي) | غير بصرية | اعتبار الحد في المتسلسلة كوحدة واستخدام مضروبات هذه الوحدة، والتعديل الأخير يكون قائم على الخصائص العددية. |
| التكرارية | غير بصرية | توسيع المتسلسلة باستخدام الفروق العامة، والبناء على الحدود السابقة (العلاقات العددية). |
| | بصرية | توسيع المتسلسلة باستخدام الفروق العامة، والبناء على الحدود السابقة (وصف هيئات الأشكال). |
| نسبة الفرق (بلا تعديل) | غير بصرية | استخدام الفروق العامة مثل عامل الضرب دون تعديل في النتيجة. |
| نسبة الفرق (تعديل) | بصرية | استخدام الفروق العامة مثل عامل الضرب وإجراء تعديل على النتيجة. |
| الشرح | غير بصرية | اكتشاف القاعدة العددية التي تسمح بالحسابات الفورية لأي قيمة مستقلة وقيمة تابعة. |
| | بصرية | اكتشاف القاعدة العامة على محتوى المشكلة التي تسمح بالحساب الفوري لأي قيمة مستقلة تناظرها قيمة تابعة. |
| التخمين والتحقق | غير بصرية | تخمين القاعدة بمحاولات لفحص قيم مستقلة تناظر قيم تابعة. |

ويعــد تعمــيم الــنمط Pattern Generalization والتركيــب الرياضــي Mathematical Structure مفهومان متشابكان بشكل وثيق، وهذا يعني أن الــنمط يهتم بدراسة التركيب الرياضــي عــن طريــق تفسـيره وتحليلــه والتنبــؤ بــه. (Rivera, 2015: 166)

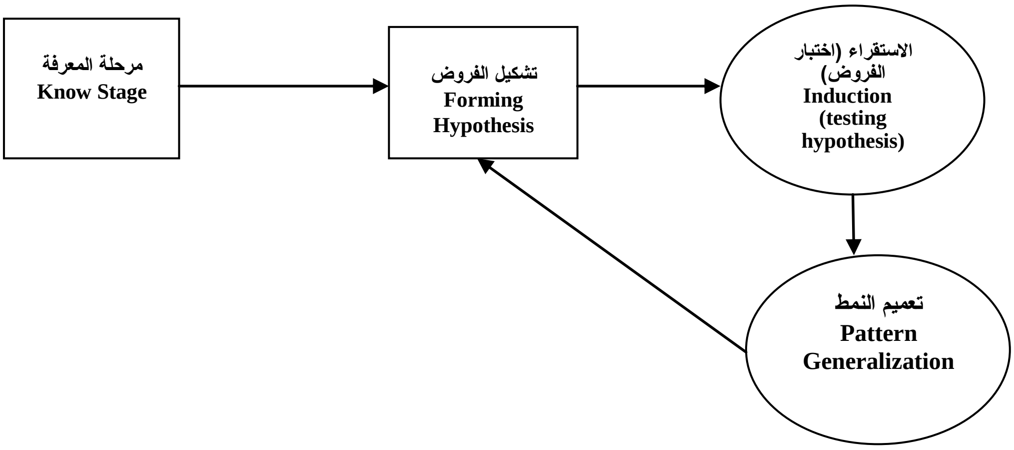
ويترتب على ممارسة عملية تعميم النمط لدى التلاميــذ بعــض التحــولات المعرفية منها: التحول من عملية الإضافة إلى عملية الضرب، ومن الواقعيــة إلــى الرمزية، ومن العمليات الحسابية إلى العمليات الجبرية، وذلك لتوفير مناسبات ناجحة من التعميم خاصة التعميم في صورة دالة (التعميم الدالي) بين المتعلمين فــي كافــة المستويات والصفوف. (Rivera, 2015: 166)

وينطوي تعميم النمط على عمليتين منظمتين ومترابطتين هما: (Rivera, 2010: 300)

١) العمل الاستقرائي – العقلي على النمط، ويتضمن توظيف طرق متنوعة للعــد، وتضمين أشياء إضافية في النمط الجبري بطريقة مفيدة.

٢) العمل الرمزي، ويتضمن الترجمة في شكل تعميم جبري.

وشكل (١) يوضح العمل الاستقرائي العقلي كمتطلب لتعميم النمط.




شكل (١): العمل الاستقرائي العقلي كمتطلب لتعميم النمط (Rivera, 2010: 300)

وهناك أنواع مختلفة من الأنماط منها: الأنماط العددية، والأنماط الهندسية أو التصويرية، وأنماط الإجراءات الحسابية، وأنماط خطية، وأنماط تربيعية، وأنماط تكرارية. (Zazkis and Liljedahl, 2002: 379-380)

ويوضح (Becker and Rivera, 2005: 125) استراتيجيات معالجة الأنماط بوصفها تتطلب استخدام عمليات التعميم ومنها:

- استراتيجيات عددية مثل: استخدام الفروق بين الأعداد في جدول للوصول إلى صيغة تعميم محددة، واستخدام العشوائية، واستخدام التكرار الضمني، وتحديد المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة، وتوسيع الجدول، وايجاد متغير مستقل مفقود، وإضافة صيغتين لكل جزء من النمط، واستخدام التناسبية.
- استراتيجيات بصرية مثل: استخدام علاقة تكرارية (مضاعفات)، واستخدام علاقة جمعية، وتوظيف التماثل البصري، وإضافة عدد داخل وعدد خارج، والعد البصري، وحساب عدد الأشكال وإضافة عدد معين، والتقطيع، والعد بواسطة واحد، واستخدام العد العشوائي، واستخدام العد المنتظم.

## الدراسات السابقة

أجريت العديد من الأبحاث السابقة في مجال التفكير الجبري والاهتمام باستراتيجية تعميم الحساب، ويلخص جدول (٥) عينة من هذه الأبحاث.

*جدول (٥): عينة من الدراسات السابقة التي اهتمت بمتغيرات البحث الحالي*

| م | البحث | المتغير المستقل | المتغير التابع | المرحلة | أهم النتائج |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | (Eroğlu and Tanışlı, 2017) | تقديم أنشطة تتكامل مع عادات العقل الجبرية Algebraic Habits of Mind (AHM) | التفكير الجبري | الإعدادية | إظهار دلائل متنوعة من التفكير الجبري واستخدموا تمثيلات متنوعة |
| ٢ | (Tagle; Belecina, and Ocampo, 2016) | استخدام النماذج العددية البصرية (الحساب كتعميم للجبر) | التفكير الجبري (صياغة ومعالجة التعبيرات الجبرية، وفهم العلاقات بين الكميات عند حل المشكلات) | الابتدائية | فعالية النماذج العددية البصرية في تنمية مهارات التفكير الجبري (التمثيل، الاستدلال، حل المشكلات) |
| ٣ | (ناصر، ٢٠١٦) | استخدام التمثيلات الرياضية | مهارات التفكير الجبري والمهارات الخوارزمية وحل المسائل الجبرية | الإعدادية | فعالية التمثيلات الرياضية على التفكير الجبري والمهارات الخوارزمية وحل المسائل الجبرية، كما وجدت علاقة موجبة ودالة إحصائياً بين: مهارات التفكير الجبري، والمهارات الخوارزمية، وحل المسائل الجبرية |
| ٤ | (Işık and Öçal, 2015) | تعميم الأنماط (الحساب كتعميم الجبر) | التفكير الجبري | الابتدائية | التلاميذ نجحوا في التعامل مع الأنماط البصرية وفهمها أكثر من الأنماط العددية |
| ٥ | (Barbosa and Vale, 2015) | تعميم أنماط بصرية (الحساب كتعميم للجبر) | تحديد استراتيجيات تعميم الأنماط | الجامعية | استخدام استراتيجيات متنوعة في تعميم الأنماط البصرية، ووجود بعض الصعوبات أثرت في الاستدلال والاستراتيجيات المستخدمة |
| ٦ | (Rivera, 2015) | تحديد العوامل المؤثرة في تعميم الأنماط | تعميم الأنماط | مراحل متعددة | العوامل المؤثرة في تعلم الأنماط وتعميمها: طبيعة النمط المعطى، والعوامل المعرفية والثقافية والاجتماعية المتعلقة بحجرة الدراسة، وعوامل أخرى لم يتم اكتشافها |
| ٧ | (Vale, 2013) | تعلم الجبر والاستدلال | التفكير الجبري | المعلمون | احتياج معلمي المرحلة الابتدائية إلى تعلم مهني في الجبر والاستدلال |
| ٨ | (Mestre and Oliveira, 2012) | اكتشافه الكميات العددية لكميتين مجهولتين (الحساب كتعميم للجبر) | التفكير الجبري | الابتدائية | أشار إلى نمو التفكير الجبري كل من: القدرة على التعبير عن التعميم لبعض العلاقات العددية باستخدام تمثيلات رياضية متنوعة، واستخدم التلاميذ مداخل الحساب في تعميم العلاقات العددية وخصائصها الحسابية |
| ٩ | (Rivera, 2010) | البحث عن القوالب البصرية في أنشطة تعميم الأنماط البصرية | التعميمات الجبرية | الإعدادية | وجود قوالب بصرية انتجت على الأقل ستة أنواع من التعميمات الجبرية، وكان للعوامل التالية |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | أثـر كبيـر علـى قـدرة تعمـيم الطلاب لأنماط البصرية: النمط الجيـد، ومعرفـة الإجـراءات، ومراحـل التجميـع، وهيكلـة النمط، والتشبيه (القياس) |
| ١٠ | (Alghtani and Abdulhamied, 2010) | مدخل تمثيلي هندسي | التفكير الجبري | الابتدائية | فعالية المدخل التمثيلي الهندسي في تنمية التفكير الجبري |
| ١١ | (Barbosa, Palhares, and Vale, 2009) | تحليل الاستراتيجيات والصعوبات عند حل مشكلات متضمنة البحث عن النمط | وصف وتعميم النمط | الابتدائية | تفضيل الاستراتيجيات البصرية لوصـف الـنمط، والغالبيـه يستخدمون استراتيجيات خليطة ولـديهم بعض الصعوبات فـي تعمـيم الأنمـاط وتوظيـف الاستدلال فيها |
| ١٢ | (Radford, 2006) | فحص التفكير الجبري في مجموعات تعلم تعاونية | التعميم الجبري | الإعدادية | اسـتخدام الطـلاب عـدد مـن الاسـتراتيجيات عنـد التعمـيم منها: استراتيجة الاستقراء من خـلال التخمـين (المحاولـة والخطأ)، واستراتيجية التعميم الحسابي، واستراتيجية التعميم الجبـري (الـواقعي، السـياقي، الرمزي) |
| ١٣ | (Townsend, 2005) | تحديد الاستراتيجيات الجبرية التي يستخدمها الطلاب خلال تعلمهم التعميم الجبري | التعميم | الثانوية | الطـلاب يسـتخدمون أربـع اسـتراتيجيات هـي: المباشـرة (الصـريحة)، والوحـدة ومضـاعفاتها، التجزيـئ، والتكرارية |
| ١٤ | (Johanning, 2004) | فحص مستوي التفكير الجبري من خلال حل المشكلات | استراتيجيات حل المشكلات الجبرية | الإعدادية | استخدام الطلاب استراتيجيات غيـر شـكلية لحـل المشـكلات الجبريـة مثـل التخمـين المـنظّم والتحقق التي كانت أكثر شيوعاً التي دعمت التفكير الجبري |
| ١٥ | (Zazkis and Liljedahl, 2002) | اكتشاف المحاولات لتعميم نمط عددي | التعميم والتفكير الجبري | معلمي المرحلة الابتدائية | قـدرة المعلمـين علـى التعبيـر اللفظـي دون التـدوين الرمـزي الجبـري للتعبيـر عـن الـنمط العددي أو البصري |

ويتضح من جدول (٤) وجود اهتمام كبير بالتفكير الجبـري واسـتراتيجية التعميم، وضوروة الاستفادة من تعليم الحساب في تعليم الجبر باستخدام رؤى متنوعة منها توظيف تعميم الحساب كاستراتيجية لتعليم الجبر، كما استفيد من تلك الدراسـات المتنوعة في إعداد أدوات الدراسة وإعداد الدروس الصفية لتنفيذها خـلال التجربـة الأساسية للبحث، وكذلك الاستفادة منها في مناقشة وتفسير النتائج.

**منهج البحث**

استخدم البحث المنهج الوصفي لجمع المعلومات حول مشكلة البحث بعد التحري عنها وعمل مسح لها بحثياً وميدانياً، كما استخدم المنهج شبه التجريبي لقياس دور المتغير المستقل (استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر) على المتغيرين التابعين (التفكير الجبري والتحصيل)، والتصميم التجريبي المستخدم في البحث هو التصميم التجريبي من النوع Pretest-Posttest Control Group Design.

**أهمية البحث**

١. يتناول البحث تنمية التفكير الجبري باستخدام استراتيجية تعميم الحساب وتوظيفها في تعليم جبر الصف الثاني الإعدادي، باعتبار أن التفكير الجبري أحد متطلبات الفهم لتعلم الجبر، مما قد ينعكس ايجابياً على تعلم التلاميذ في الرياضيات الحالية والمستقبلية، وربما يفيد مخططي المناهج والباحثين في استخدام الاستراتيجية والأنشطة المتضمنة في الدروس خلال تعليم الجبر أو فروع أخرى للرياضيات من أجل تطوير البحوث بناء على مخرجات ونتائج هذا البحث.

٢. يقدم البحث بعض الأدوات البحثية وهي: اختبار التفكير الجبري، واختبار تحصيل الجبر، مما قد يفيد الباحثين والقائمين على تعليم الرياضيات في استخدامها أو بناء أدوات مشابهة لها.

٣. يعرض البحث عدداً من النتائج والمقترحات والتوصيات التي ربما تساعد في تطوير البحث العلمي وتطوير الواقع التعليمي في تعلم الجبر بالمدراس الإعدادية في ضوء التوجهات العالمية والمناسبة للبيئة المصرية.

٤. يقدم البحث عينة لدروس مخططة جيداً من كتاب رياضيات الصف الثاني الإعدادي بهدف دعم وتنمية التفكير الجبري باستخدام استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر، مما قد يساعد المعلمين والموجهين من استخدامها وتصميم دروس تعليمية أخرى على نمطها.

**إجراءات البحث**

أجري البحث الحالي بهدف الإجابة عن تساؤلاته واختبار فروضه، وفيما يلي الإجراءات المتبعة فيه:

**الخطوة الأولى**: توصيف خطوات استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر باتباع الإجراءات التالية:

- الإطلاع على عدد من الدراسات التي تناولت الرؤي المختلفة لتعليم التفكير الجبري ومنها استراتيجية تعميم الحساب مثل: (Tagle; Belecina, and Ocampo, 2016) (Işık and Öçal, 2015) (Rivera, 2015) (Barbosa and Vale, 2010) (Booker and Windsor, 2015) (Rivera, 2010) (Barbosa, Palhares, and Vale, 2009) (Radford, 2006) (Townsend, 2005).
- الاطلاع على محتويات الوحدتين: الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين"، من كتاب الرياضيات للصف الثاني الإعدادي – الفصل الدراسي الأول – طبعة العام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٧م لمراعاة المعرفة الجبرية المتضمنة في الوحدتين عند توصيف الاستراتيجية، ويوضح جدول (٦) المعرفة الجبرية المتضمنة بالوحدتين.

جدول (٦): المعرفة الجبرية بالوحدتين الأولى والثانية من كتاب رياضيات الصف الثاني الإعدادي – الفصل الدراسي الأول

| الوحدة | الدرس | مفاهيم | تعميمات | مهارات |
|---|---|---|---|---|
| الأولى: "الأعداد الحقيقية" | الجذر التكعيبي للعدد النسبي | العدد النسبي، الجذر التكعيبي | الجذر التكعيبي لعدد موجب يكون موجباً، والجذر التكعيبي لعدد سالب يكون سالباً. | ايجاد الجذر التكعيبي لعدد نسبي عند حل المعادلات، تطبيقات ايجاد الجذر التكعيبي |
| | مجموعة الأعداد غير النسبية | العدد غير النسبي | العدد النسبي لا يمكن وضعه على صورة أ/ب، حيث أ، ب عددين صحيحين، ب≠ صفر، تقاطع الأعداد النسبية وغير النسبية يساوي فاي. | أمثلة على الأعداد غير النسبية، وتصنيف الأعداد طبقاً للأعداد النسبية وغير النسبية |
| | إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي | | | ايجاد قيمة تقريبية للعدد النسبي، تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد، حل المعادلات في الأعداد غير النسبية، تطبيقات |
| | مجموعة الأعداد الحقيقية ح | العدد الحقيقي الموجب، العدد الحقيقي السالب | الأعداد الحقيقية تساوي اتحاد الأعداد النسبية وغير النسبية، | تمثيل الأعداد الحقيقية بشكل فن، تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد |
| | علاقة الترتيب في ح | | خواص الترتيب | ترتيب مجموعة من الأعداد الحقيقية، تطبيقات |
| | الفترات | الفترة وأنواعها (مفتوحة، مغلقة، نصف مفتوحة، غير محدودة) | | العمليات على الفترات، التمثيل البياني للفترات على خط الأعداد، الترجمة بين فترات على خط الأعداد وكتابة ما تعبّر عنه بالفترات، استخدام الانتماء والمجموعة الجزئية لوصف العلاقة بين فترتين |
| | العمليات على الأعداد الحقيقية | | خواص العمليات على الأعداد الحقيقية (الجمع، الضرب). | تطبيق خواص العمليات على الأعداد الحقيقية |
| | العمليات على الجذور التربيعية | الجذر التربيعي، العددان المترافقان | خواص الجذر التربيعي، حاصل ضرب عددين مترافقين هو دائماً عدد نسبي. | العمليات على الجذور التربيعية، العمليات على عددين مترافقين |
| | العمليات على الجذور التكعيبية | الجذر التكعيبي | خواص الجذر التكعيبي | العمليات على الجذور التكعيبية |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **تطبيقات على الأعداد الحقيقية** | | | **تطبيقات (مساحة ومحيط الدائرة،المساحة والحجم للمجسمات: متوازي المستطيلات، المكعب، الإسطوانة الدائرية القائمة، الكرة)** |
| | **حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغيّر واحد في ح** | **المعادلة، المتباينة** | **خواص التباين** | **حل المعادلات والمتباينات (من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح) بإيجاد مجموعة الحل، والتمثيل على خط الأعداد** |
| **الثانية: "العلاقة بين متغيرين"** | **العلاقة بين متغيرين** | **المتغيّر** | | **حل معادلة من الدرجة الأولى جبرياً وبيانياً** |
| | **ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية** | **الخط المستقيم، الميل** | **ميل الخط المستقيم يساوي التغيّر في الإحداثي الصادي على التغيّر في الإحداثي السيني** | **تطبيقات** |

- توصيف خطوات استراتيجية تعميم الحساب مع مراعاة المعرفة الجبرية لمحتويات الوحدتين (انظر جدول (٦)) والطبيعة المعرفية لتلاميذ الصف الثاني الإعدادي (مرحلة الانتقال من العملات المحسوسة إلى العمليات المجردة)، وتتضمن الخطوات التالية:

أ. مرحلة **تنظيم المعلومات** وتعني بفحص كفاية معلومات الخواص الحسابية أو النمط العددي (البيانات كاملة وصحيحة)، وتتضمن قراءة الخواص أو النمط أو المشكلة وتحديد المتغيرات وفهمها جيداً.

ب. مرحلة **دراسة حالات خاصة محدودة** وتعني بالتعرف على الحالات الخاصة للخواص الحسابية أو النمط العددي، وتتضمن دراسة أمثلة متعددة للتحقق من الخواص أو النمط أو المشكلة.

ج. مرحلة **دراسة حالات خاصة غير محدودة** وتعني بالتوسع في الحالات الخاصة (الاستقصاء الحسابي) ودراستها وتصنيفها إلى متغيّرات، وتتضمن دراسة مزيد من الأمثلة طبقاً للمتغيرات سواء المتعلقة بالخواص أو النمط أو المشكلة.

د. مرحلة **التنبؤ لغوياً للتعميم** وتعني بوصف العلاقات بين الخواص الحسابية أو النمط العددي لغوياً، وتتضمن استخدام اللغة المنضبطة لوصف العلاقات في الخواص أو النمط او المشكلة بقدر من الوضوح والاختصار ومراعاة القواعد الصحيحة لغوياً ورياضياً.

ه. مرحلة **انتاج تمثيلات مساعدة للتعميم** وتعني بتمثيل الخواص الحسابية أو النمط العددي بصرياً (رسم بياني أو جدول)، وتتضمن التعبير عن الخواص أو النمط أو المشكلة في صور تمثيلية بيانياً وجدولياً.

و. مرحلة **التنبؤ جبرياً للتعميم** وتعني بنمذجة العلاقة بين المتغيرات قائمة على الاستدلال وتؤدي إلى تعميم جبري، وتتضمن استخدام الرموز لوصف العلاقات وعرضها في صورة جبرية.

ز. مرحلة **التحقق والمراجعة وتبرير التعميم** وتعني بالتأكد من التعميم الجبري وتدقيقه للتحقق من صحته، وتتضمن التحقق من جدوى التعميم الجبري ومدى صحته في وصف العلاقة بين المتغيرات عن طريق دراسة مزيد من الحالات الخاصة والتحقق من مدى صحة التعميم.

فمثلاً لتعليم خواص جمع الأعداد الحقيقية، تقدم عدد من الأمثلة الحسابية المتضمنة جمع عددين طبيعيين أو صحيحين أو عددين نسبين أو غير نسبين أو أعداد تنتمي لمجموعات أعداد مختلطة تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، ودراستها جيداً، والتوسع في دراسة أمثلة أخرى مبتكرة، يليها صياغة (التنبؤ اللغوي للتعميم) خواص جمع الأعداد الحقيقية لغوياً (الإنغلاق، الإبدال، الدمج، المحايد الجامعي، المعكوس الجامعي)، يليها محاولة تمثيل هذه الخواص باستخدام جداول أو أشكال، ثم تجريد تلك الخواص رمزياً (التنبؤ رمزياً للتعميم)، يليه مرحلة استخدام خواص جمع الأعداد الحقيقية في صورتها الرمزية من أجل التحقق والمراجعة والتبرير.

**الخطوة الثانية:** إعداد وضبط أداتي البحث:

أ. **اختبار التفكير الجبري.**

يهدف الاختبار إلى قياس التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، ولإعداد الاختبار تم مراجعة مجموعة من الدراسات التي تناولت بناء مفردات تقيس التفكير الجبري أو إعداد اختبار فيه مثل: (Eroğlu and Tanışlı, 2017) (Tagle; Belecina, and Ocampo, 2016) (ناصر، ٢٠١٦) (Işık and Öçal, 2015) (Alghtani and Abdulhamied, 2010)، كما حددت أبعاد التفكير الجبري في ثلاثة أبعاد هي: التمثيلات، الاستدلال الكمي، حل المشكلات، وبناء على ذلك صيغت مجموعة من الأسئلة الواضحة لغويا ورياضياً تقيس الأبعاد الثلاثة وتناسب المحتوى المعرفي لتلاميذ الصف الثاني الإعدادي الذين درسوه في الرياضيات خلال الفصل الدراسي الأول أو خلال الصفوف السابقة، وتكونت أسئلة الاختبار في صورتها الأولية من ٢٧ سؤال من نوع الاختيار من متعدد وأسئلة مقالية تقيس الثلاثة أبعاد للتفكير الجبري.

وعُرض الاختبار في صورته الأولية على مجموعة من المحكمين المتخصصين في المناهج وطرق تعليم الرياضيات وبعض معلمي المرحلة الإعدادية، وذلك لاستطلاع رأيهم حول مدى وضوح أسئلة الاختبار من الناحيتين اللغوية والرياضية، ومناسبة مفردات الاختبار لمستويات تلاميذ الصف الثاني الإعدادي العقلية والمعرفية، وهل كل مفردة تقيس البعد المنتمية إليه؟، وطلب منهم ابداء رؤاهم وكتابة أية مقترحات أخرى، وأجريت التعديلات التي أشارت إليها المحكمين والتي تحقق أهداف الاختبار، وأصبح الاختبار صالح للاستخدام ويتصف بالصدق، وتم تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية تمثلت في تلاميذ أحد فصول (٢/٢، ن = ٤٨) بمدرسة محلة أبو على الإعدادية للبنين – إدارة شرق المحلة التعليمية خلال الشهر الأخير من الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٦م مرتان بفاصل زمني ١٧ يوماً للتحقق من ثباته، وكان معامل ثبات الاختبار (معامل الارتباط لبيرسون) يساوي (٠.٧١) وهو

قيمة مناسبه للثبات، وكان متوسط زمن أداء التلاميذ على الاختبار (٦٠ دقيقة)، ودرجته العظمى (٢٤) ودرجته الصغرى (صفر)، حيث تصحح أسئلة حل المشكلات (المقالية) بحساب ثلاثة درجات لكل منها توزّع على تكوين علاقات جبرية صحيحة (معادلات)، وحل المعادلات، والتوصل إلى الناتج الصحيح، ووزعت درجات الاختبار بتلك الطريقة طبقاً لبعض الدراسات السابقة التي أعدت اختبار في التفكير الجبري، حيث يتطلب أسئلة حل المشكلات إجمالاً القيام بعمليات عقلية أعلى من التمثيلات والاستدلال الكمي، ومن ثم أصبح اختبار التفكير الجبري في صورته النهائية (انظر ملحق (١))، ويعرض جدول (٧) معلومات الاختبار.

جدول (٧): *توزيع مفردات اختبار التفكير الجبري على أبعاده الثلاثة*

| البعد | الأسئلة | نوع الأسئلة | الدرجة |
|---|---|---|---|
| **التمثيلات** | ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧ | **اختيار من متعدد** | ٧ |
| **الاستدلال الكمي** | ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢ | **اختيار من متعدد** | ٥ |
| **حل المشكلات** | ١٣، ١٤، ١٥، ١٦ | **مقالية** | ١٢ |
| **الإجمالي** | | | ٢٤ |

ومثال على الأسئلة التي تقيس *التمثيلات*:

- إذا كانت العلاقة بين س، ص هي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **س** | ٥ | ٦ | ٧ |
| **ص** | ١ | ٣ | ٥ |

فإن العلاقة يمكن وصفها بـــ:

أ. قسمة س على ٣ للحصول على ص.

ب. طرح ٤ من س للحصول على ص.

ج. ضرب س في ٢، ثم طرح ٩ من الناتج للحصول على ص.

د. قسمة س على ٥ للحصول على ص.

ومثال على الأسئلة التي تقيس *الاستدلال الكمي*:

- مقدار المال بالجنية ص التي يربحها ناجي يمكن تمثيلها بالمعادلة ص = ١٢.٥ س + ١١، حيث س هي عدد الساعات التي يعملها ناجي. حدد أفضل تفسير للعدد ١١ في المعادلة من التفسيرات التالية:
  أ. مقدار المال الذي ربحه ناجي لكل ساعة.
  ب. المقدار الإجمال للمال الذي ربحه ناجي بعد العمل لمدة س ساعة.
  ج. المقدار الإجمالي للمال الذي ربحه ناجي بعد العمل لمدة ساعة واحدة.
  د. مقدار المال الذي ربحه ناجي في عمله الإضافي بالساعة.

ومثال على الأسئلة التي تقيس *حل المشكلات*:

- يراد توزيع ١٠٠ كتاب بين ثلاثة أشخاص، بحيث يكون نصيب الشخص الثاني أربعة أضعاف نصيب الشخص الأول، ونصيب الشخص الثالث يساوي عشرة أضعاف نصيب الشخص الثاني. فكم عدد الكتب التي تمثل نصيب الشخص الأول؟

**ب. إعداد اختبار تحصيل الجبر وضبطه:**

يهدف اختبار تحصيل الجبر إلى قياس مدى انجاز تلاميذ الصف الثاني الإعدادي في الجبر بعد دراستهم للوحدتين: الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين"، من كتاب الرياضيات للصف الثاني الإعدادي – الفصل الدراسي الأول – طبعة العام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨م، وأعدّ الاختبار طبقاً للخطوات التالية: تم الاطلاع على بعض الدراسات التي أعدت اختبار في تحصيل الجبر مثل: (Alqhtani and Abdulhamied, 2010) (Radford, 2006)، وتم الاستفادة منها في إعداد اختبار التحصيل بعد إعداد تصميم جدول المواصفات (انظر جدول (٨)) الذي يصف بُعد العمليات المعرفية المتسق مع تعليم الوحدتين (المعرفة، الاستيعاب، التطبيق) وبُعد المعرفة الجبرية (مفاهيم، تعميمات، مهارات) السابق تحليلها في جدول (٦)، وتم التحقق من ثبات التحليل بإعادة التحليل (الاتفاق بين التحليلين=٩٣%)، وتم كتابة تعليمات الاختبار وضبط الاختبار رياضياً ولغوياً، وبلغ عدد أسئلة الاختبار في صورته الأولية ٤٠ سؤال وعرض على مجموعة من المحكمين في مجال القياس والتقويم

ومجال المناهج وطرق التدريس للتحقق من صدقه، وتم تعديل صياغات بعض الأسئلة طبقاً لآرائهم.

*جدول (٨): جدول مواصفات اختبار تحصيل الجبر*

| الوحدة | الدروس | المعرفة | الاستيعاب | التطبيق | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| الأولى: "الأعداد الحقيقية" | الجذر التكعيبي للعدد النسبي | | | ١، ٢، ٣ | ٣ |
| | مجموعة الأعداد غير النسبية | ٦ | ٤، ٥ | | ٣ |
| | إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي | | | ٧، ٨، ٩، ١٠ | ٤ |
| | مجموعة الأعداد الحقيقية ح | ١١ | | | ١ |
| | علاقة الترتيب في ح | | | ١٢ | ١ |
| | الفترات | ١٥ | ١٣، ١٤ | ١٦ | ٤ |
| | العمليات على الأعداد الحقيقية | ٢٠ | ١٧، ١٨، ١٩ | ٢١ | ٥ |
| | العمليات على الجذور التربيعية | | ٢٥ | ٢٢، ٢٣، ٢٤ | ٤ |
| | العمليات على الجذور التكعيبية | | | ٢٦، ٢٧ | ٢ |
| | تطبيقات على الأعداد الحقيقية | | | ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١ | ٤ |
| | حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغيّر واحد في ح | | | ٣٢، ٣٣ | ٢ |
| الثانية: "العلاقة بين متغيرين" | العلاقة بين متغيرين | | ٣٤، ٣٥ | | ٢ |
| | ميل الخط المستقيم وتطبيقات حياتية | | ٣٧، ٣٨ | ٣٦، ٣٩، ٤٠ | ٥ |
| المجموع | | ٤ | ١٢ | ٢٤ | ٤٠ |

وطبق الاختبار استطلاعيا على عينة الاستطلاعية تمثلت في تلاميذ أحد الفصول (٢/٢، ن = ٤٨) بمدرسة محلة أبو على الإعدادية للبنين – إدارة شرق المحلة التعليمية خلال الشهر الأخير من الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧م مرتان بفاصل زمني ١٤ يوماً للتحقق من ثباته، وكان معامل ثبات المقياس (معامل الارتباط لبيرسون) يساوي (٠.٨٧) وهو قيمة مناسبه للثبات، وبناء على ما سبق أصبح اختبار تحصيل الجبر في صورته النهائية (انظر ملحق (٢) مكونة من ٤٠ عبارة ، ودرجتة العظمى ٤٠ درجة، ومتوسط زمن تطبيقه ٦٠ دقيقة.

**الخطوة الثالثة:** التطبيق الأساسي للبحث:

للإجابة عن الأسئلة المتعلقة بأثر استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، والعلاقة بين التفكير الجبري وتحصيل الجبر، اتبعت الإجراءات التالية:

- اختيرت عينة البحث للتجربة الأساسية بطريقة مقصودة من مجتمع تلاميذ المرحلة الإعدادية بالمدارس الحكومية، وتمثلت في مجموعتين من تلاميذ الصف الثاني الإعدادي بمدرسة محلة أبو علي الإعدادية للبنين– إدراة شرق المحلة التعليمية بمحافظة الغربية، إحداهما المجموعة التجريبية (فصل ٣/٢، ن = ٥٠ تلميذ)، والأخرى المجموعة الضابطة (فصل ٤/٢، ن = ٤٦ تلميذ) خلال الفصل الدراسي الأول – للعام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٧م، بالإضافة إلى عينة استطلاعية من ذات المدرسة (٢/٢، ن=٤٨ تلميذ) خلال الفصل الدراسي الثاني – للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٦م، وذلك للتحقق من ثبات أداتان صممهما البحث (اختبار التفكير الجبري، واختبار تحصيل الجبر). وتمت الموافقة من عينة البحث على إجراء التجربة بعد موافقة إدارة المدرسة، حيث ساهم أحد معلمي الرياضيات الذين يدرّسون لمجموعتي البحث وتعاون مع الباحث في التدريس وتطبيق أدوات للبحث.
- للتحقق من تكافؤ تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في التفكير الجبري وتحصيل الجبر قبل إجراء تجربة البحث الأساسية، تم تطبيق اختباري التفكير الجبري وتحصيل الجبري على المجموعتين قبل إجراء تجربة البحث، للتحقق من عدم وجود فروق بينهما في التفكير الجبري وتحصيل الجبر، ويعرض جدول (9) حساب دلالة الفرق بين درجات مجموعتي البحث على كل من التفكير الجبري، وتحصيل الجبر قبل بدأ تجربة البحث باستخدام اختبار ت T- Test بين مجموعتين مستقلتين.

*جدول (٩): حساب دلالة الفرق بين درجات مجموعتي البحث في القياسات القبلية لكل من التفكير الجبري وتحصيل الجبر*

| الاختبار | المجموعة | المتوسط | الانحراف المعياري | اختبار "ت" | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | درجة الحرية | ت | الدلالة | الدلالة عند ≤ ٠.٠٥ |
| التفكير الجبري (الدرجة٢٤) | تجريبية | 5.58 | 2.51 | 96 | 1.86 | 0.092 | غير دال |
| | ضابطة | 6.44 | 2.47 | | | | |
| التحصيل (الدرجة ٤٠) | تجريبية | 12.36 | 6.52 | 96 | 0.96 | 0.958 | غير دال |
| | ضابطة | 12.29 | 6.40 | | | | |

يتضح من جدول (٩) أنه لم يرق الفرق بين متوسطي درجات مجموعتي البحث إلى مستوى الدلالة الاحصائية (عند ≤ ٠.٠٥) فى كل من: التفكير الجبري، وتحصيل الجبر؛ مما يعني وجود تكافؤ أو تقارب في المستوى بين مجموعتي البحث التجريبية والضابطة فى التفكير الجبري وتحصيل الجبر قبل إجراء تجربة البحث.

إجراء التجربة الرئيسية للبحث كما يلي

- الاعداد لتنفيذ تجربة البحث عن طريق: شرح معلومات مختصرة لتلاميذ المجموعة التجريبية (فصل ٣/٢، ن = ٥٠) لمدى أهمية تجربة البحث وفوائد تجريبه وشرح مختصر لنظام تنفيذ الحصص الدراسية، وتم تكوين مجموعات تعاونية من تلاميذ الفصل بحيث تتضمن كل مجموعة مستويات تحصيلية متنوعة بناء على رأي معلم الفصل، ومن ثم تكوّنت حوالي ثماني مجموعات بمعدّل ست تلاميذ لكل مجموعة، وتم تحديد خطوات توظيف استراتيجية تعميم الحساب كما ذكر في الخطوة الأولى من بند "إجراءات البحث" .
- إعداد دروس الوحدتين: الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين"، من كتاب الرياضيات للصف الثاني الإعدادي – الفصل الدراسي الأول – طبعة العام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٧م لتنفيذها مع تلاميذ المجموعة التجريبية (انظر ملحق (٤)) وفقاً لاستراتيجية تعميم الحساب، ويتكوّن الدرس من العناصر التالية: عنوان الوحدة، وعنوان الدرس، وعدد الحصص، وأهداف الدرس السلوكية، والأنشطة المتضمنة طبقا

لاستراتيجية تعميم الحساب، وتنظيم عمل التلاميذ، والأدوات، وأخطاء التلاميذ المتوقعة، وبطاقة النشاط، والأسئلة المطروحة للنقاش، وحل تمارين، والواجب المنزلي، واستغرق تنفيذ تلك الدروس حوالى شهرين بمعدّل ثلاث حصص أسبوعياً.

- تنفيذ دروس الوحدتين: الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين" لتلاميذ المجموعة الضابطة (فصل ٢/٤، ن = ٤٦) عن طريق نفس معلم المجموعة التجريبية بطريقة روتينية، حيث يشرح المعلم الدرس عن طريق تقديم مجموعة من الأمثلة أو شرح القاعدة (العلاقة) الجبرية وتوضيحها للتلاميذ وقيام المعلم وبعض التلاميذ بحل أمثلة خلال الحصة.

- تطبيق اختبار التفكير الجبري واختبار تحصيل الجبر على تلاميذ المجموعتين التجريبية، والضابطة بعد الانتهاء من تدريس الوحدة الأولى "الأعداد الحقيقية"، والوحدة الثانية "العلاقة بين متغيرين"، ورصد الدرجات لاختبار صحة الفروض الصفرية للبحث باستخدام بعض التحليلات الإحصائية المناسبة والتي ساعد فيها الحزمة الإحصائية لبرنامج MiniTab17، وتضمنت حساب بعض الاحصاءات الوصفية للعينات (المتوسط الحسابي والانحراف المعياري)، وحساب دلالة الفرق بين متوسطي مجموعتين مستقلتين باستخدام اختبار ت Independent T-Test، وحساب دلالة الفرق بين متوسطي مجموعتين مرتبطتين باستخدام اختبار ت Paired T-Test (dependent)، وحساب معامل اختبار بيرسون Pearson Correlation وحساب حجم التأثير Size Effect، ومن ثم التوصل إلى الإجابة عن أسئلة البحث واختبار الفروض الصفرية له وتفسيرها، وكتابة التوصيات والمقترحات، وتمثّل منهج البحث في المنهج شبه التجريبي لقياس دور المتغيّر المستقل (استراتيجية تعميم الحساب) على المتغيرات التابعة (التفكير الجبري، وتحصيل الجبر)، واتبع في البحث التصميم من النوع Pretest-posttest Control Group Design.

**عرض نتائج البحث**

**أولاً: نتائج الإجابة عن السؤال الأول**

للإجابة عن السؤال الأول من أسئلة البحث والذي ينص علـــى "مـــا أثـــر توظيـــف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ الصـــف الثاني الإعدادي؟"، تم اختبار صحة الفرض الصفري الأول والذي ينص علـــى: "لا يوجد فرق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ≤ ٠.٠٥ بين متوسطي درجـــات تلاميذ مجموعتي البحث التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبـــار التفكيـــر الجبري"، وذلك باستخدام اختبار "ت" للعينات المستقلة Independent Samples T Test للكشف عن دلالة الفرق بين متوسطي درجات مجموعتي البحث في التطبيـــق البعدي لاختبار التفكير الجبري، ويعرض جدول (10) ملخصاً للإحصـــاء الوصـــفي وحســـاب دلالة الفـــرق .

جدول (١٠): *نتائج تطبيق اختبار "ت" لعينتين مستقلتين بين متوسطي درجات مجموعتي البحث في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري*

*(الدرجة العظمى ٢٤ درجة)*

| المجموعة | العدد | المتوسط | الانحراف المعياري | اختبار "ت" | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | درجة الحرية | ت | الدلالة | الدلالة عند ≤ ٠.٠٥ |
| تجريبية | ٥٠ | 13.76 | 4.00 | ٩٦ | 8.09 | ٠.٠٠٠ | دالة |
| ضابطة | ٤٨ | 8.00 | 2.99 | | | | |

يتضح من جدول (10) وجود فرق دال إحصائيا (عند مستوى ≤ ٠.٠٥) بين متوسطي درجات تلاميذ مجموعتي البحث في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية (المجموعة ذات المتوسط الأكبر)، مما يؤكد على وجود أثر إيجابي على التفكير الجبري لدى تلاميذ المجموعة التجريبية مقارنة بتلاميذ المجموعة الضابطة، ويلاحظ ارتفاع الانحراف المعياري لـــدى تلاميـــذ المجموعـــة الضابطة مقارنة بالانحراف المعياري لتلاميذ المجموعة لتجريبيـــة بســـبب وجـــود مستويات تحصيلية أكثر تشتتاً لدى تلاميذ المجموعة الضابطة ولكنها لن تؤثر علـــى النتائج بدرجة ما.

وبناء علي النتائج السابقة في جدول (10) يمكن رفض الفـرض الأول مـن الفروض الصفرية للبحث فيما يتعلق بنتائج التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري.

ولمعرفة مدي دلالة الفروق الإحصائية بين متوسطي درجـات المجموعـة التجريبية في أدائهم القبلي والبعدي على اختبار التفكير الجبري، تم استخدم اختبـار "ت" للمجموعات المرتبطة Paired-Samples T Test، ويعـرض جـدول (١١) نتائج هذا التحليل.

*جدول (١١): نتائج تطبيق اختبار "ت" لعينتين مرتبطين بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في تطبيق اختبار التفكير الجبري قبل وبعد التجربة*

| التطبيق | المتوسط | الانحراف المعياري | اختبار "ت" | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | درجة الحرية | ت | الدلالة | الدلالة عند ≥ ٠.٠٥ |
| قبل التجربة | 5.58 | 2.51 | 49 | 12.86 | 0.000 | دالة |
| بعد التجربة | 13.76 | 4.00 | | | | |

تشير نتائج جدول (11) إلى وجود مؤشرات ايجابية دالـة إحصـائياً (عنـد مستوى ≥٠.٠٥) فى متوسط نتائج تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيـق البعـدي لاختبار التفكير الجبري مقارنة بالتطبيق القبلي لمتوسط درجـاتهم فـي الاختبـارين (انظر قيم متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية القبلية والبعدية فـى اختبـار التفكير الجبري بجدول (١١)).

وقد بلغت قيمة حجم الأثر باستخدام مربع ايتا $\eta^2$ علـى اختبـار تشـخيص الأخطاء(٠.٧٧١) وهي قيمة جيدة (أبوحطب وصادق،١٩٩١: ٤٣٨ – ٤٤٣)، ممـا يؤكد الأثر الإيجابي لاستراتيجية تعميم الحساب في تنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

**ثانياً: الإجابة عن السؤال الثاني**

للإجابة عن السؤال الثاني من أسئلة البحث والذي ينص على " ما أثر توظيـف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر على تحصيل الجبر لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي؟"، تم اختبار صحة الفرض الثالث والذي ينص على: "لا يوجـد

فرق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ≥ ٠.٠٠٥ بين متوسطي درجات تلاميذ مجموعتي البحث التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار تحصيل الجبر"، وذلك باستخدام اختبار "ت" للعينات المستقلة Independent Samples T Test للكشف عن دلالة الفرق بين متوسطي درجات مجموعتي البحث في التطبيقات البعدية لاختبار تحصيل الجبر، ويعرض جدول (١٢) ملخصاً للإحصاء الوصفي وحساب دلالة الفرق .

جدول (١٢): *نتائج تطبيق اختبار "ت" لعينتين مستقلتين بين متوسطي درجات مجموعتي البحث في التطبيق البعدي لاختبار تحصيل الجبر*

*(الدرجة العظمى ٤٠ درجة)*

| المجموعة | العدد | المتوسط | الانحراف المعياري | اختبار "ت" درجة الحرية | ت | الدلالة | الدلالة عند ≥ ٠.٠٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تجريبية | ٥٠ | 30.70 | 7.68 | 96 | 11.30 | ٠.٠٠٠ | دالة |
| ضابطة | ٤٨ | 16.56 | 4.30 | | | | |

يتضح من جدول (١٢) أنه يوجد فرق دال إحصائيا (عند مستوى ≥ ٠.٠٠٥) بين تلاميذ مجموعتي البحث التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار تحصيل لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية، ويلاحظ ارتفاع الانحراف المعياري لدى تلاميذ المجموعة الضابطة مقارنة بالانحراف المعياري لتلاميذ المجموعة لتجريبية بسبب وجود مستويات تحصيلية أكثر تشتتاً لدى تلاميذ المجموعة الضابطة ولكنها لن تؤثر على النتائج بدرجة ما.

وبناء علي النتائج السابقة المتضمنة في جدول (١٢) يمكن رفض الفرض الثاني من الفروض الصفرية للبحث فيما يتعلق بنتائج التطبيق البعدي لاختبار تحصيل الجبر.

ولمعرفة مدي دلالة الفروق الإحصائية بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية في أدائهم على اختبار تحصيل الجبر، تم استخدام اختبار "ت" للمجموعات المرتبطة Paired-Samples T Test، ويعرض جدول (١٣) نتائج هذا التحليل.

*جدول (١٣): نتائج تطبيق اختبار "ت" لعينتين مرتبطين بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في تطبيق اختبار التحصيل قبل وبعد التجربة*

| التطبيق | المتوسط | الانحراف المعياري | اختبار "ت" | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | درجة الحرية | ت | الدلالة | الدلالة عند ≤ ٠.٠٥ |
| قبل التجربة | 12.36 | 6.52 | 49 | 10.54 | 0.000 | دالة |
| بعد التجربة | 30.70 | 7.68 | | | | |

وتشير نتائج جدول (١٣) إلى وجود مؤشرات ايجابية دالة إحصائياً (عند مستوى ≤٠.٠٥)، وذلك عند مقارنة متوسط درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق القبلي لاختبار تحصيل الجبر مقارنة بمتوسط درجاتهم في التطبيق البعدي لصالح متوسط درجاتهم في التطبيق البعدي (انظر قيم متوسطات درجات تلاميذ المجموعة التجريبية القبلية والبعدية فى اختبار تحصيل الجبر بجدول (١٣)).

وقد بلغت قيمة حجم الأثر باستخدام مربع ايتا $\eta^2$ على مقياس الثقة بالنفس (٠.٦٩٤) وهي قيمة جيدة (أبوحطب وصادق،١٩٩١: ٤٣٨ – ٤٤٣)، مما يؤكد الأثر الايجابي لاستراتيجية تعميم الحساب في تحسين تحصيل الجبر لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

**__ثالثاً__: الإجابة عن السؤال الثالث**

للإجابة عن السؤال الثالث من أسئلة البحث والذي ينص على " ما العلاقة بين (التفكير الجبري، وتحصيل الجبر) لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي؟"، تم اختبار صحة الفرض الثالث والذي ينص على: " لا توجد علاقة موجبة ودالة إحصائيا عند مستوى دلالة ≤ ٠.٠٥ بين كل من درجات التلاميذ البعدية في كل من: (التفكير الجبري، والتحصيل) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية"، وذلك باستخدام اختبار دلالة معامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Test للكشف عن معامل الارتباط بين درجات التطبيق البعدي لكل من تصويب الأخطاء الشائعة، والثقة بالنفس لدى تلاميذ المجموعة التجريبية، ويعرض جدول (١٤) نتائج اختبار دلالة معامل ارتباط بيرسون بين التفكير الجبري، وتحصيل الجبر.

*جدول (١٤): نتائج اختبار معامل ارتباط بيرسون للكشف عن العلاقة الارتباطية بين درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق لاختبار التفكير الجبري، وتحصيل الجبر*

| | التفكير الجبري | مستوى الدلالة | الدلالة عند ≤ ٠.٠٥ |
|---|---|---|---|
| تحصيل الجبر | 0.148 | 0.304 | غير دالة |

يشير جدول (١٤) إلى أنه لا توجد علاقة دالة إحصائياً عند مستوى دلالة (≤٠.٠٥) بين تصويب التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ المجموعة التجريبية بعد تطبيق التجربة، لذا يمكن قبول الفرض الصفري الثالث من الفروض الصفرية للبحث.

**مناقشة نتائج البحث وتفسيرها**

هدف البحث الحالي إلى تحديد أثر توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري والتحصيل لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، ولتحقيق هذا الهدف أعدّ البحث اختبار التفكير الجبري واختبار تحصيل الجبر في المعرفة الرياضية المتضمنة في الوحدتين الأولى "الأعداد الحقيقية" والثانية "العلاقة بين متغيرين" بالفصل الدراسي الأول، وتم التوصل إلى النتائج المتعلقة بالإجابة عن أسئلة البحث، وفيما يلي مناقشة وتفسير تلك النتائج.

**١. مناقشة وتفسير النتائج ذات الصلة بالسؤال الأول:**

توصلت النتائج إلى الإجابة عن السؤال الأول والذي ينص على "ما أثر توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر لتنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي؟" بترجمته إلى فرض صفري واستخدام أساليب إحصائية مناسبة، وتلخصت تلك النتائج في وجود فرق ذو دلالة إحصائية (عند مستوى ≤ ٠.٠٥) بين متوسطي درجات تلاميذ مجموعي البحث فيما يتعلق بتصويب أخطاء الرياضيات الشائعة في التفكير الجبري بعد إجراء التجربة لصالح تلاميذ المجموعة التجريبية، كما تحسّن التفكير الجبري لدى تلاميذ المجموعة التجريبية بعد التجربة بفرق دال إحصائياً (عند مستوى ≤ ٠.٠٥)

مقارنة بتفكيرهم الجبري قبل التجربة، وكان حجم تأثير المتغير المستقل (استراتيجية تعميم الحساب) على التفكير الجبري جيداً.

ويمكن تفسير تلك النتائج المتعلقة بالأثر الجيد لاستراتيجية تعميم الحساب لتنمية التفكير الجبري لدى التلاميذ، بأن توظيف استراتيجية تعميم الحساب ساعد التلاميذ على تحسين فهمهم للموضوعات الحسابية جيداً مع طرح العديد من الأمثلة والحالات الخاصة، ثم التوسع في دراسة الحالات الخاصة، ودراسة العلاقات ووصفها باستخدام العديد من التمثيلات الرياضية كالجداول والرسوم البيانية، للوصول إلى التعميم في صورة جبرية باستخدام الرموز والقواعد الرمزية الناتجة عن عملية التجريد، والتحقق من التعميم الجبري الذي تم استنتاجه واختباره في حالات خاصة للتحقق من كفائته.

وكانت ردود فعل تلاميذ المجموعة التجريبية تجاه توظيف استراتيجية تعميم الحساب، تمثّلت في وجود دافعية كبيرة مقارنة بزملائهم في المجموعة الضابطة، حيث حرص التلاميذ في مجموعة توظيف استراتيجية تعميم الحساب على حضور الحصص وندرة غيابهم ومشاركتهم النشطة خلال الحصص وحرصهم على القيام بالأعمال المكلفين بها، وانعكاس كل هذه العوامل على فهمهم للعمليات الرياضية المتضمنة في تمثيلات رياضية واستدلال وحل مشكلات.

وتتفق نتائج البحث فيما يتعلق بالأثر الجيد لاستراتيجية تعميم الحساب على تنمية التفكير الجبري لدى التلاميذ مع الدراسات: (Tagle; Belecina, and Ocampo, 2016) (ناصر، ٢٠١٦) (Işık and Çal, 2015) (Mestre and Oliveira, 2012).

**٢. مناقشة وتفسير النتائج ذات الصلة بالسؤال الثاني:**

توصلت النتائج إلى الإجابة عن السؤال الثاني والذي ينص على "ما أثر توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تعليم الجبر على تحصيل الجبر لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي؟"، وتلخصت تلك النتائج في وجود فرق دال إحصائيا (عند مستوى ≤ ٠.٠٥) بين تلاميذ مجموعتي البحث التجريبية والضابطة في التطبيق لاختبار تحصيل الجبر لصالح المجموعة التجريبية، كما تحسّن تحصيل

الجبر لدى تلاميذ المجموعة التجريبية بعد التجربة بفـرق دال إحصـائياً (عنـد مستوى ≤ ٠.٠٥) مقارنة بتحصيلهم قبل التجربة، وكان حجـم تـأثير المتغيـر المستقل (استراتيجية تعميم الحساب) على التحصيل جيداً.

ويمكن تفسير النتائج السابقة المتعلقة بالأثر الايجـابي لاسـتراتيجية تعمـيم الحساب على تحصيل الجبر لدى التلاميذ، بأن توظيف هذه الاستراتيجية ساعدت التلاميذ على استيعاب المفاهيم والتعميمات والمهارات في موضـوعات الأعـداد الحقيقية والجذور والمعادلات والمتباينات، حيث ساهمت في طرح العديـد مـن الأمثلة العددية في البداية ودعمتها بتمثيلات متنوعة جدولية وبيانية ساعدت على توضيح تلك المفاهيم والتعميمات واكتساب المهارات لدى التلاميذ، كما سـاعدت في الانتقال التدريجي من تحسين استيعاب الحساب كخلفية موجودة فـي العقـل المعرفي للتلاميذ والانتقال من هذا الاسـتيعاب تـدريجياً بالأمثلـة والتمثـيلات والاستدلال إلى استيعاب العلاقات الجبرية المعممـة، وأشـار اهتمـام التلاميـذ وأسئلتهم التي طرحوها على وعيهم بأهمية الاستراتيجية التـي سـاعدتهم فـي الانتقال من تعلم الحساب إلى تعلم الجبر واستغلال تعلمهم الحساب السـابق فـي تعلم موضوعات الجبر الحالية.

وتتفق نتائج البحث فيما يتعلق بالأثر الجيد لاستراتيجية تعميم الحساب علـى تحصيل الجبر لدى تلاميذ الصف الثاني الإعـدادي مـع الدراسـات: (ناصـر، ٢٠١٦) (Rivera, 2010) (Barbosa, Palhares, and Vale, 2009) (Johanning, 2004).

**٣. مناقشة وتفسير النتائج ذات الصلة بالسؤال الثالث:**

توصلت النتائج إلى الإجابة عن السؤال الثالث والذي ينص على " لا توجـد علاقة موجبة ودالة إحصائيا عند مستوى دلالة ≤ ٠.٠٥ بين كل مـن درجـات التلاميذ البعدية في كل من: (التفكير الجبري، والتحصيل) لدى تلاميذ المجموعة التجريبية" بترجمته إلى فرض صفري واستخدام أسـاليب إحصـائية مناسـبة، وتلخصت تلك النتائج في عدم الكشف عن وجود علاقة دالة إحصائياً عند مستوى

دلالة (≤٠.٠٠٥) بين التفكير الجبري وتحصيل الجبر لـدى تلاميـذ المجموعـة التجريبية بعد تطبيق تجربة البحث.

والنتيجة السابقة تشير إلى أن العلاقة الخطية كانت ضعيفة بـين المتغيـرين (التفكير الجبري، وتحصيل الجبر)، وربما وصل البحث لهـذه النتيجـة بسـبب الاختلافات بين طبيعة التفكير الجبري وتحصيل الجبر؛ فطبيعة التفكير الجبـري تشير إلى إدراك واستخدام المعالجات والاستراتيجيات التي تعمل علـى تحليـل وترجمة واستقراء واستنتاج ووضع خطة وتقيـيم الحلـول والتعميمـات حـول التعميمات الجبرية دون التقييد بمحتوى محدد، بينما طبيعة التحصيل تتركّز على التذكّر والاستيعاب والتطبيق المباشر وغيـر المباشـر للمفـاهيم والتعميمـات والمهارات الجبرية حول محتوى محدد، ومن ثم فمسـتويات العمليـات العقليـة المتضمنة في التفكير الجبري أعلى من العمليات العقلية المتضمنة في تحصـيل الجبر وتتعلق بالمحتوى، مما أدى إلى عدم ظهور علاقة دالة إحصائياً بين التفكير الجبري وتحصيل الجبر.

وتختلف نتائج البحث فيما يتعلق بعدم الكشف عن وجود علاقة دالة إحصائياً بين التفكير الجبري وتحصيل الجبر مع دراسة (ناصر، ٢٠١٦).

**توصيات البحث**

١. الاهتمام بموضوع التعميمات في الرياضيات المدرسية إدراكاً وتنمية وتعليماً وتعلماً.
٢. طرح أنشطة تنمّي التعميمات واستراتيجيات اكتشافها لدى التلاميذ في كتـب الرياضيات المدرسية.
٣. إقامة برامج تدريبية وورش عمل عن كيفية تدريس التعميمات للتلاميذ توجه للمعلمين والمعلمات في المرحلتين خلال خدمتهم تحثهم على توظيفها خـلال إعدادهم وتنفيذهم للدروس الصفية.
٤. توجيه معلمي ومعلمات المرحلة الابتدائية بتنمية التفكير الجبري غير الشكلي لدى تلاميذهم وتلميذاتهم من خلال مواقف تؤكد على التعميمات الحسابية في صور لفظية وبيانية.

٥. التأكيد على معلمي ومعلمات المرحلة الابتدائية على تعليم الحساب كخطــوة نحو تعلم الجبر باستخدام استراتيجيات قائمة على الفهم والاســتيعاب لــدى تلاميذ وتلميذات هذه المرحلة.

**البحوث المقترحة**

١. إجراء البحث الحالي على عينات أخرى من مراحل تعليمية مختلفة، وفــروع رياضيات أخرى كالهندسة والإحصاء والحساب.
٢. توظيف استراتيجية تعميم الحساب في تنمية الفهم الجبري وتعديل المعتقدات نحوه الجبر لدى طلاب المرحلة الإعدادية.
٣. برنامج تدريبي قائم على تعميم الأنماط الرياضية علـــى التعمـــيم الجبـــري والاتجاه نحو تعلم الجبر لدى الطلاب المعلمين.
٤. رصد العوامل المؤثرة في تعميم الأنماط الرياضية (مثل: استراتيجيات الحل، نوع النمط، درجة تعقد النمط، شكل التعميم الجبري) لدى طـــلاب المرحلـــة الثانوية وعلاقتها بالميول الرياضية لديهم.
٥. تحديد مدى العلاقة بين الصياغات اللفظية للنمط (التواصل الرياضي) وتعميم النمط جبرياً لدى طلاب المرحلة الثانوية أو الطلاب معلمي الرياضيات.

## المراجع العربية


١. جودت أحمد سعادة (٢٠١٨): ***استراتيجيات التدريس المعاصرة مع الأمثلة التطبيقية***. عمان، الأردن: الطبعة الأولى، دار الموهبة للنشر والتوزيع والطباعة، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة.

٢. عامر عوين عواد العنزي (٢٠١٦): استراتيجية التعلم التعاوني في تدريس الجبر وتنمية التحصيل الدراسي لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة بدولة الكويت. ***عالم التربية***، ٥٤(١٧): ١١٣-١٤٤.

٣. ناصر السيد عبدالحميد عبيدة (٢٠١٦): أثر استخدام التمثيلات الرياضية متعددة المستويات في تدريس الرياضيات على تنمية مهارات التفكير الجبري والمهارات الخوارزمية وحل المسائل الجبرية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. ***دراسات عربية في التربية وعلم النفس***، ٧٥: ١١٧-١٧٠.


## المراجع الأجنبية


4. Alghtani, O. A. and Abdulhamied, N. A. (2010). The effectiveness of geometric representative approach in developing algebraic thinking of fourth grade students. ***Procedia - Social and Behavioral Sciences***, 8(5): 256–263.
5. Barbosa, A. and Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. ***Journal of the European Teacher Education Network***, 10: 57-70.
6. Barbosa, A., Value, I., and Palhares, P. (2009). Exploring generalization with visual patterns: task developed with pre-algebra students. Retrieved from ***http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2009_06.pdf***
7. Becker, J. R. and Rivera, F. (2005). Generalization strategies of high school algebra students. In Chick, H. L. and Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 121-128. Melbourne: PME. Retrieved from ***https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol4RossiBeckerRivera.pdf***
8. Booker, G. and Windsor, W. (2010). Developing algebraic thinking: Using problem-solving to build from number and geometry in the primary school to the ideas that underpin algebra in high school and beyond. ***Procedia - Social and Behavioral Sciences***, 8(5): 411–419.
9. Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standards for Mathematics. *Reston, USA: NCTM*. Retrieved from ***http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Common_Core_State_Standards/Math_Standards.pdf***

10. Dettori, G.; Garuti, R., and Lemut, A. E. (2002). From arithmetic to algebraic thinking by using spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, and R. Lins (Eds.), ***Perspectives on School Algebra (191-207)***. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherland.
11. Eroğlu, D. and Tanışlı, D.(2017). Integration of Algebraic Habits of Mind into the Classroom Practice. ***Elementary Education Online***, 16(2): 566-583.
12. Ferruci, B. J. (2004). Gateways to algebra at the primary level. ***The Mathematics Educator***, 8(1): 131-138.
13. Glassmeyer, D. and Edwards, B. (2016). How Middle Grade Teachers Think about Algebraic Reasoning. M***athematics Teacher Education and Development***, 18(2):92- 106.
14. Hunter, J. (2015). Teacher Actions to Facilitate Early Algebraic Reasoning. 2015. In M. Marshman, V. Geiger, & A. Bennison (Eds.). ***Mathematics education in the margins*** (Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia), pp. 58–67. Sunshine Coast: MERGA.
15. Işık, C. and Öçal, T. (2015). The Development of Preschool Students' Algebraic Thinking Skills: A Case Study Approach. ***British Journal of Education, Society & Behavioural Science***, 8(3): 175–188.
16. Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: A closer look at students' informal strategies. ***Journal of Mathematical Behavior***, 23(4): 371–388.
17. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? ***The Mathematics educator***, 8(1): 139-151
18. Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking? Retrieved from ***http://www.mathandteaching.org/uploads/Articles_PDF/articles-01-kriegler.pdf***
19. Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), ***Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching (87-106)***. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherland.
20. Ley, L.D. (2016). Generalization: Making Learning More than a "Classroom Exercise". Retrieved from ***https://www.scilearn.com/sites/default/files/pdf/whitepaper/generalizationwhitepaper_2016-10-12.pdf***
21. Mason, J. (2008). Making use of children`s powers to produce algebraic thinking. In Kaput, J., Carraher, D. and Blanton, M. (eds.) *Algebra in the Early Grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 57-94. Retrieved from ***https://www.researchgate.net/publication/288845555_Making_use_of_children's_powers_to_produce_algebraic_thinking***
22. Mestre, C. and Oliveira, H. (2012). From quasi-variable thinking to algebraic thinking : A study with Grade 4 student. 12th International

Congress on Mathematical Education Education, Topic Study Group 9, 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea. Retrieved from
***http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7087/1/Mestre_Oliveira_ICME12.pdf***

23. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). ***Principles and Standards for School Mathematics***. Reston, USA: NCTM.
24. Numeracy Professional development projects (2008). Teaching number sense and algebraic thinking. Book 8, Ministry of Education, Wellington, New Zealand. Retrieved from
***www.nzmaths.co.nz/Numeracy/2008numPDFs/pdfs.aspx***
25. Oliveira, H. and Mestre, C. (2014). Opportunities to Develop Algebraic Thinking in Elementary Grades throughout the School Year in the Context of Mathematics Curriculum Changes. In Y. Li et al. (eds.), *Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices*, Advances in Mathematics Education
26. Ontario, M. (2010). Paying Attention to Algebraic Reasoning, K to 12. Retrieved from
***http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/PayingAttentiontoAlgebra.pdf***
27. Radford, L. (2006). ALGEBRAIC THINKING AND THE GENERALIZATION OF PATTERNS: A SEMIOTIC PERSPECTIVE. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A. (Eds.) (2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagogical National. Retrieved from
***http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.627.4598&rep=rep1&type=pdf***
28. Rivera, F. (2015). The distributed nature of pattern generalization. ***PNA***, 9(3): 165-191.
29. Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. ***Educational Studies in Mathematics***, 73: 297–328.
30. Strachota, S. (2016). Conceptualization generalization. ***Open Mathematical Education Notes***, 6: 41-55.
31. Russell, S. J.; Schifter, D., and Bastable, V. (2011).Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic. In G. Kaiser and B. Sriraman (Eds.), ***Advances in Mathematics Education***, 43-70. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
32. Tagle, J.; Belecina, R. R., and Ocampo, R.M. (2016). Developing Algebraic Thinking Skills among Grade Three Pupils through Pictorial Models. ***International Journal for Educational Studies***, 8(2): 147-158.
33. Toheri, T. and Winarso, W. (2017) .Improving algebraic thinking skill, beliefs and attitude for mathematics through learning cycle based on

beliefs. MPRA Paper No. 78290. Retrieved from ***https://mpra.ub.uni-muenchen.de/78290/1/MPRA_paper_78290.pdf***

34. Townsend, B. E. (2005). Examining secondary students` algebraic reasoning: flexibility and strategy use. Doctor of Philosophy, the Faculty of the Graduate School, University of Missouri-Columbia. Retrieved from ***https://mospace.umsystem.edu/xmlui/bitstream/handle/10355/4131/research.pdf?sequence=3***

35. Vale, C. (2013). Primary teachers' algebraic thinking: Example from Lesson Study. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow (*Proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*). Melbourne, VIC: MERGA. Retrieved from ***http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED573029.pdf***

36. Zazkis, R. and Liljedaha, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. ***Educational Studies in Mathematics***, 49: 379-402.