تكوين المشكلات والتمثيلات الرياضياتية
(الماهية ـ الكيفية)

إعــداد

ا.د حفنى إسماعيل محمد
أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية التربية بقنا

د. مبروك حسن على
مدرس المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية التربية بقنا

أ/ صابر إبراهيم جلال على
مدرس مساعد بقسم المناهج وطرق التدريس
"تخصص المناهج وطرق تدريس الرياضيات"

تكوين المشكلات والتمثيلات الرياضياتية (الماهية – الكيفية)

المستخلص:

تتناول هذه المقالة تكوين المشكلات الرياضياتية والذى يمثل أحد أوجه المشاركة الإيجابية للتلميذ؛ حيث يمارس فنيات كيفية التكوين المختلفة من تعديل فى سياق المشكلة أو معطياتها أو المطلوب ايجاده، كما يمكنه إضافة شروط معينة لها أو التغيير فى الشروط الموجودة بها، عن طريق استخدام استراتيجيات تكوين المشكلة مثل: التعديل فى المعطيات – المحاكاة – إعادة البناء – إعادة الصياغة، من خلال: إعطاء التلميذ مشكلة ما ثم يُطلب منه التعديل فيها وتحويرها لتكوين مشكلة جديدة، ثم عرض مشكلة غير جيدة البنية ليتم التعديل بها لتصبح جيدة البنية، ثم تكوين مشكلة حول مجموعة من المعلومات، ثم تكوين مشكلة حول فكرة ما، على أن يتم مراعاة عدة عوامل منها: ارتباطها بالرياضيات، وصحة المعلومات الواردة بها، واتساق مكونات المشكلة (السياق – المطلوب – المعطيات – الشروط)، والتحديد الجيد لها، والقابلية للحل.

وتتعدد استراتيجيات حل المشكلات الرياضياتية والتى منها التمثيلات الرياضياتية، حيث يتم تحليل مكونات المشكلة بهدف اكتشاف العلاقات القائمة بينها، وتمثيلها عن طريق الرسوم التخطيطة أو البيانية أو الأشكال الهندسية أو النماذج الرياضياتية، ثم معالجة هذه التمثيلات بهدف استيعاب المشكلة أو التوصل لحلها، وحتى يمكن للتلميذ بناء التمثيل المناسب يمكنه: تحليل المشكلة لتحديد العناصر الرئيسة للتمثيل، و تحديد العلاقات المختلفة بين هذه العناصر، وكيفية ترابطها مع بعضها البعض، واختيار التمثيل المناسب، والربط هذه العناصر فى صورة تكاملية.

الكلمات المفتاحية: الرياضيات – تكوين المشكلات – استراتيجيات التكوين – التمثيلات الرياضياتية .

Formation mathematical problem and representation (What – how)

Abstract:

This article discuss mathematical problem Formation as one of the aspects of pupil active participation; which he can practice different Formation technique such as modification in the context of the problem or the data or the required of the problem, and he can add specific conditions or change existing one, using many strategies such as: modification in the data - simulation - reconstruction - redrafting, through giving him a problem to modify its components, or modifying ill-structured problem to make it well structured, or introducing an idea then ask him to form a problem, or giving a set of information to form a problem, taking into account linked to mathematics, accuracy of the contained information, consistency of the components of the problem (context - required - data - Conditions), good defining , and can be solve.

There are various strategies for solving mathematical problems, such as using mathematical representations, which pupil can analyze the components of the problem in order to discover the relationships between them, and representing it through charts or geometric shapes and mathematical models, and then manipulate these representations to solve the problem. To build an appropriate representation pupil can: analyzing the problem to identify the main components, identifying different relationships between them, choosing the appropriate representation, and linking them in an integrated image.

Keywords: mathematics – problem formation – formation strategies – mathematical representation

تكوين المشكلات والتمثيلات الرياضياتية
الماهية والكيفية

المقدمة:

تتنوع المشكلات بمناهج الرياضيات، إلا أنها تتفق فى مجموعة من المكونات التى تمثل البنية الأساسية للمشكلة، والمتمثلة فى المعطيات والمطلوب والشروط والسياق المتضمن لذلك، ولذا يمكن للتلميذ تكوين مشكلة جديدة حول مفهوم ما أو حقيقة ما من خلال التغيير فى هذه المكونات، على ان يراعى توفر المكونات الأساسية للمشكلة ، فيمكنه التغيير في مكونات تلك المشكلة بما يتوافق مع خلفيته الرياضياتية للتوصل لمشكلة جيدة.

ويمكن من خلال تكوين المشكلة أن يعبر التلاميذ عن تصوراتهم وأفكارهم الرياضياتية؛ حيث يقومون بالربط بين بين المعارف السابقة المخزنة فى بنيتهم حول الرياضيات وببعضها البعض، بما يساعد فى زيادة تحصيلهم الدراسي، وإدراك قدراتهم الكامنة، كما يشير المعلمون إلى أنه يمكن استخدام تكوين المشكلة فى عملية تقييم التلاميذ، ويجعل الرياضيات أكثر امتاعًا (a2013, Kiliç).

لذا يمكن للمعلم استخدام عملية تكوين المشكلة فى جذب انتباه التلميذ لتعلم الرياضيات، مع مراعاة أن تكون المشكلات المتطلب تكوينها تناسب مستويات وقدرات الفئات المختلفة الموجودة بالصف الدراسى؛ إذ أن لكل فئة حاجاتها ومتطلباتها ونقاط قوتها أوجوانب ضعفها الخاصة، فيمكن من خلال تكوين التلميذ لمشكلة ما تعرُف مدى سوء فهمه لمحتوى موضوع ما خلال فترة زمنية وجيزة (2494, 2011, Sezen, & Çıldır).

ويؤكد أوزوبل أن التعلم ذو المعنى لا يتحقق إذا كان بناء مواد التعلم يفتقر إلى الوضوح والتنظيم والارتباط بالبناء المعرفي، لأن ذلك يمكن أن يعيق قدرة التلميذ على الاحتفاظ بالمادة واستدعاؤها، فإذا قام التلميذ بدمج المعلومات والخبرات الجديدة في بنائه المعرفي عن طريق إيجاد العلاقة بينها وبين المفاهيم والمواد السابقة

التي يتضمنها البناء المعرفي، وبطريقة يسهل فيها تغييرها وتعديلها، فإن ذلك يسهم في انتاج أفكار جديدة، كما أن المعلومات المدخلة تصبح مرتبطة بالمعلومات السابقة (صالح محمد أبو جادو، ٢٠١٤، ٣٣١).

فالمعرفة القبلية للتلميذ تُعد شرط أساسي لبناء التعلم ذي المعنى، فالتعلم في ضوء الفلسفة البنائية هو عملية بناء تراكيب جديدة تنظم وتفسر خبرات التلميذ التي يبذل فيها جهدًا عقليًا لاكتشاف المعرفة بنفسه يسعى خلالها لتحقيق أغراض معينة تسهم في حل مشكلة يواجهها، والهدف الجوهري من عملية التعلم إحداث تكيفات تتواءم مع الضغوط المعرفية؛ والمقصود بالضغوط المعرفية هي عناصر الخبرة التي يمر بها التلميذ التي لا تتوافق مع توقعاته، وتؤدي إلى حدوث حالة من الاضطراب المعرفي لديه نتيجة مروره بخبرة جديدة (عفت مصطفى الطناوي، ٢٠٠٢، ١٢-١٣).

وحتى يتم تجنب هذه الضغوط المعرفية ينبغى اتاحة فرصة المشاركة الايجابية للتلميذ، حتى يحدث الربط بين الخبرات الجديدة والمعارف السابقة التى يمتلكها، من خلال تقديم مجموعة من المشكلات التي ترتبط بالمحتوى الجديد، ثم يُعطى الفرصة للتعديل فيها، ومصاغةً بكلماته الخاصة، على أن تتسم بالصحة الرياضياتية، ومن ثم يشعر التلميذ بفعاليته وبقيمة الرياضيات التي يتعلمها في حياته الواقعية.

فيمكن للمعلم استخدام تكوين المشكلة في مساعدة التلميذ في تحليل المشكلات المألوفة، وتدريبه على تطويرها أوتخصيصها أوتعميمها، وكذلك التأكيد على كيفية تنفيذ خطوات حل المشكلة الأربع لبوليا وخاصةً الخطوة الرابعة " المراجعة"، والتي يتم تجاهلها غالبًا عند حل المشكلة، إذ أن تكوين المشكلة يمنح التلميذ (في هذه الخطوة) فرصة التعديل في بيانات المشكلة وشروطها لتكوين مشكلة جديدة (Contreras, 2003, 275).

إذ يمكن تقديم موضوعات الرياضيات المدرسية عن طريق تكوين المشكلات المتنوعة والممتعة، والتي يستطيع التلميذ من خلالها إحراز تقدم حقيقي في

الرياضيات، كما أن تقديم المحتوى بهذه الطريقة يُظهر الرياضيات كنظام فعال ذو معنى، ومن ثم يستثير ذلك دافعية التلميذ لتعلم موضوعاتها المختلفة، ويُعد ذلك أفضل من التمارين التي يقدمها المعلم؛ والتي تعمل على تنمية الحفظ فقط دون إدراك المعنى (334, 2000, NCTM).

ولذا ينبغي على المعلم توفير البيئة الجيدة التي تساعد على التفاعل الفعال وذلك عن طريق: تشجيع التلميذ على طرح الأسئلة وتقييم المشكلات المطروحة وتحليل ونقد مبررات الآخرين، وتنمية عملية الاكتشاف الذاتي لدى التلميذ واستخدامها في عملية بناء المعرفة وتنمية الوعى الذاتي لديه بأنه مسئول عن تعلمه وكذلك دوره الايجابي داخل الصف، ومن ثم فإن تكوين المشكلة يساعد في تنمية مهارات التفكير العليا من خلال دمج التلميذ في عملية فهم المعرفة وترجمتها (54, 2013, Jahanshahloo, & Bakar, asempourGh).

الأمر الذي يجعل تكوين المشكلة أحد أشكال الاكتشاف الرياضياتي، والذي إذا تم تطبيقه بالطريقة المناسبة من خلال الأنشطة الصفية فسيكون له إمكانية التغلب على قيود المشكلات اللفظية، بالإضافة إلى أنه ينبغي مراعاة التنوع في الأنشطة لتحفيز المرونة العقلية وتطوير الامكانات المختلفة لدى التلميذ، علاوة على ذلك فإن تكوين المشكلات ينمي القدرة على معالجة وإدارة المواقف الواقعية المختلفة التي تواجهه داخل المدرسة أو خارجها(a2013, Bonotto).

فالتلميذ حين تتاح له الفرصة ليكتب مشكلة ما، يفكر ويرتب أفكاره ثم يكتب ليصبح ما كتبه هو ناتج تفكيره أو هو الصورة المعبرة عن تفكيره، وحين تتاح له فرصة أخرى لإعادة النظر فيما كتب فهو يعيد النظر فيما فكر فيه (ناتج تفكيره)، ليكتشف الخلل ويصححه ويُنتج تفكيرًا جديدًا أكثر جودةً يَظهر في الناتج الكتابي (محمود أحمد محمود نصر، ٢٠٠٩، ١٣٨٤).

ماهية تكوين المشكلات الرياضياتية:

حتى يستطيع التلميذ تكوين مشكلة ما ينبغي مراعاة عدة أمور منها: وجود سياق أو موقف يتضمن سؤالًا رياضياتيًا، وتوفر المعلومات الضرورية للحل والتى قد تكون ظاهرة أو ضمنية، وأن يتم تكوين المشكلة فى ضوء المحتوى الجديد المراد تعلمه، وأن تتضمن المشكلة معلومات كمية أو غير كمية أو كليهما مع مراعاة وجود ارتباط بين هذه المعلومات وبعضها البعض.

ولذا يُعرف تكوين المشكلة بأنه قدرة التلميذ على طرح وتكوين مشكلات رياضياتية من مشكلة مطروحة ، وذلك فى عدة مهارات متدرجة المستويات منها الصعبة وذلك بتحويل المشكلة الأصلية إلى برهان رياضياتى أو تعميم، والمستوى المتوسط بتغيير المشكلة الأصلية إلى مشكلة جديدة ذات صلة بالمشكلة الأصلية أو تغيير البيانات أو الشروط المحددة والمستوى السهل والمتمثل فى تغيير البيانات أو القيم المتضمنة فى المشكلة الأصلية (رضا أبوعلوان السيد وابراهيم رفعت ابراهيم، ٢٠٠٧، ٨٩).

ويُعرف بأنه: قدرة التلميذ على استخدام مفردات لغة الرياضيات من رموز ومصطلحات وعلاقات وأشكال وجداول في صياغة أو تأليف أو تكوين مشكلة رياضياتية من بيانات ومعلومات معطاة أو ابتكار مشكلات جديدة بتعديل الشروط لمشكلة ما (محمد محمود محمد حماده، ٢٠٠٩، ٢٤).

ويُعرَف بأنه: إيجاد مشكلة جديدة أو إعادة تكوين مشكلة موجودة سابقًا من خلال تعديل الشروط المعطاة، أو التعميم لها، و من خلال طرح سؤال ماذا لو لم يكن..؟ (Hošpesová&Tichá ,2010).

ويُعرَف بأنه: عملية يستطيع من خلالها التلميذ بناء ترجمة ذاتية لمواقف واقعية وصياغتها كمشكلات رياضياتية ذات معنى (Bonotto ,b2013 ,402).

أى أن تكوين المشكلة هو قدرة التلميذ على التحليل النقدي للمواقف الحياتية أو الرياضياتية، وإعادة صياغتها فى قالب رياضياتى مستخدمًا مفردات لغة الرياضيات،

ومراعيًا البنية الأساسية للمشكلة والتي تتمثل في: المعطيات والمطلوب والشروط والسياق المتضمن لذلك.

ومن خلال تحليل المشكلات الموجودة بمناهج الرياضيات، يتبين أن هناك العديد من المحاولات التى صنفت تلك المشكلات في فئات بحيث يسهل التعامل معها، فيصنفها البعض على أساس مدى وضوح طريقة الحل، والبعض الآخر يصنفها على أساس مدى ألفة التلميذ بها، وآخرون يصنفونها على أساس العمليات المستخدمة بها وفيما يلي شرح موجز لتلك التصنيفات:

يمكن تصنيف المشكلات التي يمكن تكوينها على أساس مدى وضوح طريقة الحل إلى (Mayer, 2002, 63 ؛ وصالح محمد على أبوجادو ومحمد بكر نوفل، ٢٠٠٧، ٣٢٤-٣٢٥):

- المشكلات ذات البناء المحكم (المشكلات الواضحة)Well- Structured Problem: ويكون فيها المطلوب، والمعطيات، والعمليات المطلوبة من التلميذ واضحة، وتتميز بأن لها طرقًا واضحة للحل، ولها نظامَ معروف في الحل. على سبيل المثال عندما يطلب من التلميذ أن يطرح عدداً من عددٍ آخر.
- المشكلات ذات البناء غير المحكم (المشكلات الغامضة) Ill- Structured Problem.: ويكون فيها المطلوب، والمعطيات، والعمليات المطلوبة من التلميذ غير واضحة، وهذا النوع يتميز بعدم وجود طرق واضحة للحل؛ علماً بأن مصطلح ذات بناء غير محكم لا يشير إلى وجود شيء ناقص أو خاطئ في المشكلات المعروضة على التلميذ، بل إن هذا المصطلح يؤكد أن هذا النوع من المشكلات لا يوجد له مسار واضح للحل.

كما أشار محمد السيد علي الكسباني (٢٠٠٨، ٥٣٧) أنه يمكن تصنيف المشكلات إلى:

- المشكلات الروتينية : وهى تلك المشكلات التي يتطلب حلها التطبيق المباشر للقانون وهى ذات نهاية محددة لا تنمي مسارات التفكير لدى التلاميذ لانهم يعرفون اجراءات الحل. كما يطلق عليها أيضًا التدريبات لأنها تعتمد على

اجراءات تدريبية يعرفها التلميذ بالفعل وتعتمد على التفكير الانتاجي والذي فيه يقوم التلميذ بانتاج الإجابات التي استخدمها في السابق

- المشكلات غير الروتينية : ويطلق عليها مشكلات البحث المفتوح وهى التي تنمي مسارات التفكير لدى التلميذ، لأن التلميذ عليه أن يبتكر طريقة جديدة لحل المشكلات ومن ثم يرى المشكلات بطريقة مختلفة. كما أنها تعتمد على التفكير الاستنتاجي والذي يبتكر التلميذ فيه حلاً جديداً لم يسبق له المرور به .

كيفية تكوين المشكلات الرياضياتية :

يمكن للتلميذ تكوين مشكلة ما من خلال إدراكه وفهمه للشروط التي ينبغي توافرها في المشكلة وتمكنه من مهارات التكوين، يمكنه التغيير في بنية مشكلة معروضة عليه لتكوين مشكلة جديدة، وهذا التغيير الذي يمكن احداثه ينقسم إلى مجموعتين هما (Bershadsky& Lavy, 2003):

١. **المجموعة الأولى:** التغيير في بيانات المشكلة وينقسم إلى ثلاث مجموعات فرعية(التغيير في القيمة العددية للبيانات – التغيير في نوع البيانات – حذف بعض البيانات) وفيما يلي شرح موجز لكل لذلك:

أ. التغيير في القيمة العددية للبيانات: ويمكن إحداث التغيير في قيم البيانات العددية بالمشكلة المطروحة عن ظريق:

- التغيير من قيمة عددية محددة إلى قيمة محددة أخرى، على سبيل المثال تغيير قيمة ارتفاع أحد الأشكال الهندسية من قيمة لأخرى.
- التغيير من قيمة عددية محددة إلى مدى من القيم، على سبيل المثال تغيير قياس زاوية أحد الأشكال الهندسية من قيمة محددة إلى فترة محددة من القيم.
- نفى القيمة المحددة، على سبيل المثال: ماذا لو لم تكن قيمة الارتفاع ....؟
- التعميم الضمني للقيمة العددية للبيانات، ويعبر مصطلح "التعميم الضمني" عن عدد الأمثلة البديلة التي يمكن افتراضها للعنصر المنفي وتنتهي هذه الافتراضات بعبارة " وهكذا"، على سبيل المثال : إذا لم يكن ارتفاع الهرم ١٠سم (مثلًا: ١٢ أو ٢٠ وهكذا).

ب. التغيير في نوع البيانات: ويتم ذلك عن طريق:

- تغيير نوع محدد من البيانات إلى نوع محدد آخر، على سبيل المثال: تغيير نوع الهرم من الهرم الثلاثي إلى الهرم الرباعي.
- نفى نوع البيانات المعطاة، على سبيل المثال: ماذا لو لم يكن الشكل هرمًا؟
- تعميم نوع البيانات، وينقسم إلى:

– التعميم الضمني لنوع البيانات: على سبيل المثال " الهرم ليس له قاعدة مثلثية؛ بل القاعدة يمكن أن تكون متوازي أضلاع أو خماسي الأضلاع وهكذا".
– التعميم الرسمي لنوع البيانات، على سبيل المثال: " قاعدة الهرم عبارة عن مضلع منتظم".

ج. حذف بعض البيانات: وذلك بعد أن يقوم التلميذ بحل المشكلة المعروضة عليه ثم يتكوين مشكلة جديدة سائلًا نفسه ماَ أهمية كل عنصرً من عناصر المشكلة (حذف بعض البيانات التي لا تؤثر في الوصول لحل المشكلة)؛ على سبيل المثال: ماذا يحدث إذا تم حذف إرتفاع الهرم؟.

٢. المجموعة الثانية: تغيير المطلوب من المشكلة: وتنقسم إلى مجموعتين فرعيتين:

أ. استبدال المطلوب من المشكلة بمطلوب آخر أو تعديله بالإضافة أو الحذف لجزء منه: على سبيل المثال: بدلًا من السؤال عن المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات يمكن السؤال عن مساحة قاعدته.

ب. تحوير المشكلة إلى مشكلة استدلالية: على سبيل المثال: اثبت أن جا (خطا!) = خطا! ؛ حيث النسبة بين الحافة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم والقاعدة الأساسية تساوى خطا! ؟".

وحتى يستطيع التلميذ تكوين مشكلة جيدة من المواقف الحياتية عليه اتباع الخطوات التالية (Milgram, 2007, 50-51):

– الخطوة الأولى: تقسيم المشكلة إلى أجزاء صغيرة، واستبدال كل جزء بسؤال رياضياتي دقيق.
– الخطوة الثانية: استنباط طريقة لحل المشكلة الرياضياتية.

- الخطوة الثالثة: تعديل وتنقيح الخطة.
- الخطوة الرابعة: حل المشكلة البسيطة ومن ثم حل المشكلة الأصلية.
- الخطوة الخامسة: تطبيق الحل الرياضياتى على المشكلة الحياتية.

ويمكن للتلميذ عند تكوينه لمشكلة ما أن يتبع استراتيجية ما تُعرف باستراتيجية "ماذا لو...؟" أو "ماذا لو لم يكن ...؟" (" Strategy?not-What if" or "What if") وتتكون هذه الاستراتيجية من مستويين: المستوى الأول وفيه يقوم التلميذ بإعداد قائمة بالبدائل المناسبة لكل عنصر من عناصر المشكلة، وفى المستوى الثانى يقوم التلميذ بنفى كل عنصر من عناصر المشكلة مستبدلًا إياه بأحد العناصر الموجودة بالقائمة عن طريق طرحه للسؤال "ماذا لو لم يكن............؟ " مطبقًا ذلك على كل عنصر من عناصر المشكلة، وبناءً عليه فكل تغيير يُولِّد مشكلةً جديدةً، مع مراعاة شرطين: صحة بنية المشكلة والقابلية للحل. وفى هذه الاستراتيجية يمكن للتلميذ أن يغير فى مكون أو اثنين أو أكثر من عناصر المشكلة هادفًا من ذلك تكوين مشكلة جديدة كما يتضح ذلك من شكل (٣) (ershadskyB&Lavy ,2003 , 371).

وحتى يتمكن التلميذ من تكوين مشكلة جيدة البنية أو إعادة صياغة مشكلة ما عن طريق اجراء بعض التغييرات في بياناتها الأساسية؛ ينبغي مراعاة مجموعة من العوامل التي تتمثل في الشروط والمهارات المتطلبة لعملية التكوين والتي منها :

- أن تتضمن بعض المفاهيم الرياضياتية التي تم دراستها وتمثل العنصر الأولىّ في تصميم المهمة المراد تكوين المشكلة حولها، ومدى ملائمة المهمة للأحداث التعليمية التي يواجهها التلميذ بدروسه اليومية (Lin ,2003).
- أن تثير المشكلة اهتمام التلميذ: ويقصد بذلك أن تكون المشكلة المعروضة على التلميذ تمثل تحديًا حقيقيًا يتناسب مع قدراته، فإذا طُلب منه تكوين مشكلة ما في ضوء مشكلة أخرى لا تثير اهتمامه، فقد يؤدي ذلك إلى قيام التلميذ بتكوين عددًا من المشكلات دون الاهتمام بمدى صحتها (Tomoto ,Ichi, Hirashima & ,Takeuchi ,2010).

- أن يراعى عند تكوين المشكلة تنقيح واختيار المعلومات الهامة والضرورية لعملية التكوين، و تحرير أو اخراج المشكلة في صورة شكلي أو رمزي، ووجود نوع من العلاقات البينية للمعلومات الكمية، وقابلية المعلومات للترجمة من شكل لآخر (Pitta , Pittalis, Mousoulides, Christou– 2005, Sriraman,& Pantazi).
- أن تتميز المشكلة المطروحة بالوضوح والتحديد الجيد للمصطلحات المستخدمة، كما ينبغي أن تكون قابلة للحل؛ بحيث يمكن أن يكون هذا الحل متضمنًا لحالات خاصة، ويمكن أن يكون الحل بسيطًا، أو أن يكون معقدًا (38, 2007, Milgram).
- توفر خلفية معرفية رياضياتية حول عملية تكوين المشكلة، ووجود خبرة جيدة في التعامل مع التمثيلات المختلفة للمشكلة مثل: الأشكال التخطيطية – الجداول – الرسومات البيانية ...إلخ (2011, Sriraman& yuan ; b2013, Kiliç).
- التأكد من صحة المعلومات، وتحديد الكلمات المناسبة، واستخدام العبارات البسيطة، وتنقيح المشكلة، ومناقشة الزميل حول مدى وضوحها، وتحديد الاستراتيجية التي يمكن استخدامها لحل المشكلة قبل كتابتها (هشام بركات بشر حسين، ٢٠١٣، ١٧٥).
- التحليل النقدي للمعلومات الواردة بالمشكلة المطروحة؛ حيث يجب التمييز بين المعلومات الأساسية وتلك التى يمكن الاستغناء عنها، وتحديد العلاقات بين المعلومات وبعضها البعض، وتقرير مدى كفاية المعلومات لحل المشكلة (a2013, Bonotto).
- أن تتماثل المشكلات مع المشكلات المعروضة بالمحتوى الرياضياتى الموجود بالكتاب المدرسي، أو تشابه مواقف الحياة اليومية، الأمر الذى يؤدى إلى تنمية عملية التطبيق للأفكار الرياضياتية في السياق الواقعي.(Ghasempour , Jahanshahloo, & Bakar, 2013, 57).

- وجود خلفية عن الموقف المشكل المراد تكوين مشكلة ما حوله: ويقصد بذلك التكامل بين المواقف التي تتطلب من التلميذ تكوين مشكلة ما ومحتوى موضوعات الرياضيات التي يتم دراستها (Presmeg,& Van Harpen , 2013).

مما سبق يتضح أنه لتكوين مشكلة ما ينبغى للتلاميذ تحليل المشكلة المطروحة عليهم بهدف تحديد مكوناتها الأساسية، ثم اجراء عملية التغيير فى نوعية البيانات (العددية أو النوعية)، أوالتبديل بين المعطيات والمطلوب، أو اجراء عملية الحذف و الإضافة للشروط المناسبة، وتعويدهم التلاميذ على التعبير عن آرائهم حول المشكلات المعروضة عليهم، ونقدها وتحويرها لتكوين مشكلات جديدة تتفق مع واقعهم البيئى المحيط، مع تقديم المبررات الرياضيايتة المدعمة لهذه الآراء، وتدريبهم على استراتيجيات تكوين المشكلة مثل: استراتيجية ماذا لو لم يكن ....؟ – استراتيجية التعديل فى المعطيات – استراتيجية المحاكاة – استراتيجية إعادة البناء – استراتيجية إعادة الصياغة، بهدف صياغة مشكلة جديدة صحيحة البنية.

كما ينبغى تدريب التلاميذ على تكوين المشكلات المختلفة من خلال: أن يُعطى التلاميذ مجموعة من المعلومات، ثم يُطلب منهم تكوين مشكلة ما باستخدام تلك المعلومات على أن يُرَاعَى توفر مكونات المشكلة، أو عرض مشكلة يشوبها بعض القصور، ثم تُعرض على التلاميذ لتحليلها لاكتشاف هذا القصور ومحاولة علاجه لتصبح المشكلة كاملة الأركان وجيدة البنية، أو ن يُعطى التلميذ مشكلة ثم يطلب منه التعديل فيها وتحويرها لتصبح مشكلة استدلالية أو مشكلة خاصة أو مشكلة عامة.

أن يراعى عند تكوين مشكلة ما الارتباط الوثيق بالرياضيات، واتساق المعلومات والمطلوب مع بعضها البعض، وارتباطها الوثيق بالسياق الذى طرحت فيه، وأن تكون المعلومات الواردة بالمشكلة كافية لحل المشكلة أو يمكن استنتاج معلومات ضمنية منها للتوصل للحل، وأن تكون الشروط الموجودة بالمشكلة متسقة مع سياقها.

التمثيلات الرياضياتية Mathematical representations:

تتعدد أساليب واستراتيجيات حل المشكلات الرياضياتية ومنها استخدام التمثيلات الرياضياتية، حيث يستدعى التلميذ خبراته السابقة ومهاراته فى تحليل مكونات المشكلة بهدف اكتشاف العلاقات القائمة بينها، وتمثيلها عن طريق الأعداد والرموز الجبرية والأشكال (الرسوم البيانية – الاشكال التوضيحية) والجداول، ثم معالجة هذه التمثيلات مما يساعد فى حل المشكلة، مما يزيد من فهمه لحل المشكلة .

وقد ورد فى وثيقة المعايير الصادرة عن المجلس القومى لمعلمى الرياضيات على أنه ينبغى للتلميذ أن يكون قادرًا على (2000, NCTM):

١-انشاء واستخدام التمثيلات فى تنظيم وتسجيل ونقل الأفكار الرياضياتية.

٢-اختيار وتطبيق وترجمة التمثيلات الرياضياتية بهدف حل المشكلة.

٣-استخدام التمثيلات فى نمذجة وتفسير الظواهر الطبيعية والرياضياتية والمجتمعية.

كما أن أهداف تعليم الرياضيات لم تعد قاصرة على اكتساب مهارات القيام بالعمليات وتذكر مجموعة من المفاهيم والتعميمات، بل أصبحت تتعدى ذلك إلى تنمية قدرة التلميذ على ملاحظة العلاقات وتحليلها، وتمثيل البيانات بأشكال توضيحية وقراءة الأشكال (سامح سلطى عريفج، نايف أحمد سليمان، ٢٠٠٥، ١٤٦)

إذ يساعد التمثيل الشكلى أو التمثيل الرمزى التلميذ فى توضيح العلاقات بين التفاصيل، ويُمَكّن التلميذ من رؤية جميع الحقائق الموجودة بالموقف وتفاصيلها، فى حين أن ذاكرته لا توفر له ذلك، وقد يفيد التمثيل فى الوصول إلى حل المشكلة بطريقة أسرع، ففى المشكلات ذات الأبعاد الثلاثة تتضح المشكلة للتلميذ إذا اعد لها نموذجًا، كما يفيد فى بعض الأحيان تمثيل الأدوار المختلفة التي تتناولها المشكلة كمشكلات البيع والشراء والبنوك وغيرها من المشكلات الاجتماعية والمعيشية (ماجدة محمود صالح، ٢٠٠٦، ٣٢١).

فاستخدام التمثيلات الرياضياتية يزيد من مرونة التلميذ فى التعامل مع الصور المختلفة للمفهوم، ويعزى ذلك إلى ان هذه التمثيلات تحوى الصور الحسية وشبه الحسية والمجردة للافكار والمفاهيم الرياضياتية مما يسهل فهمها والانخراط فى

انشطتها، بالاضافة إلى ان ميزة الانتقال من تمثيل إلى آخر تنمى قدرات التلميذ على التعامل مع المفاهيم والافكار بأى شكل (تمثيل) عرضت به، واستخلاص الفكرة الرياضياتية والتعامل معها بسهولة، وهذا بالطبع يراعى الفروق الفردية بين التلاميذ، مما يثير فضول التلاميذ ويزيد من دافعيتهم (رياض إبراهيم البلاصى وأريج عصام برهم، ٢٠١٠).

. ويؤدى استخدام التمثيلات الرياضياتية إلى تكوين المفاهيم الجبرية بطريقة صحيحة، ويرجع ذلك إلى أن التمثيل يعتمد على التصور البصرى للمفاهيم الجبرية لتقريب معانيها إلى أذهان التلاميذ، كما يؤدى إلى نمو التفكير الاستدلالى لديهم؛ حيث يتم الاعتماد على المحسوسات فى استقراء المقدمات بهدف الوصول إلى النتيجة المطلوبة (محمد عيد حسن عوض الله، ٢٠٠٣).

ويقترح برونر ثلاثة نماذج للتعلم، أى أن التلميذ يستطيع تَعلُم فكرة خاصة أومفهومًا معينًا وفقًا لثلاثة مستويات هى: التعلم التمثيلى ويتضمن العمل اليدوى أو الخبرات المباشرة وتكمن قوة هذا النوع من التعلم فى طابعه الفورى، والتعلم الأيقونى:وهو مبنى على استخدام الوسائط المنظورة كالصور الفوتوغرافية أوالمرسومة أوالنماذج، والتعلم الرمزى: وهو المستوى الذى يستخدم فيه التلميذ الرموز المجردة لتمثيل الواقع أو الحقيقة، ويقترح برونر أن الاستعداد للتعلم يعتمد على الخليط الفعال من النماذج الثلاثة (سامح ريحان، ٢٠٠٠، ٦٦؛ حفني إسماعيل محمد، ٢٠١٦، ٤٢).

فمن أهم واجبات معلم الرياضيات هو الانتقال بالتلميذ من المحسوس إلى المجرد وذلك من خلال الانتقال ضمن سلسلة متصلة من المحسوس (نموذج متاح) إلى شبه المحسوس (رسم تخطيطى أو صورة) إلى المجرد أو الرمز، الذى قد يوضح مفهومًا رياضيًا أو عبارة رياضية أو معادلة، لذلك على المعلمين أن يعمدوا باستمرار وفى مختلف مراحل الدراسة (المبكرة والمتوسطة والثانوية) إلى نقل المعلومات عبر نموذج محسوس يثير اهتمام التلميذ للوصول به إلى الصيغة الرياضياتية أو التعميم أو المعادلة (زيد الهويدى، ٢٠٠٦، ٤٤).

ونتيجة للاختلاف فى احتياجات وتفضيلات التلاميذ فلا يوجد تمثيل معين له نفس التأثير أو له نفس التفضيل بين كل التلاميذ، لذا ينبغى أن يُعطى التلميذ فرصة استخدام التمثيلات التي يقدمها المعلم، بالاضافة إلى السماح له بابتكار أو البحث عن تمثيل خاص به وتطبيقه فى عملية الحل، مما يمكن المعلم من ايجاد المواقف التي يمكن من خلالها أن يتعلم التلميذ كيفية استخدام التمثيلات ومن ثم تعميق فهمه حول فاعلية هذه التمثيلات (2009, Elia& Gagatsis , Pantziara).

ماهية التمثيلات الرياضياتية:

تُعرف بأنها: استخدام الكلمات والجداول ووالرسومات والمواد المحسوسة للتعبير عن فكرة أو مفهوم رياضى(عثمان نايف السواعى، ٢٠١٠، ١٤٧).

وتُعرف بأنها: مدخل لتعليم وتعلم المفاهيم والخوارزميات الرياضياتية والمشكلات من خلال مواقف تعتمد على إعداد النماذج المحسوسة والرسوم التخطيطية والبيانية لتحويل المحتوى اللفظى إلى رمزى ينتج عنه تصور بصرى للعلاقات والعمليات بصورة وظيفية من أجل تحسين عملية الإدراك العقلى(حسن عوض حسن الجندي، ٢٠١١، ٣١).

أى أنه يمكن تعريف التمثيلات الرياضياتية بأنها: استخدام النماذج المحسوسة والرسوم التخطيطية والجداول والرموز والكلمات والأشكال هندسية فى ترجمة المشكلات والمواقف الرياضياتية من صورة إلى أخرى، بهدف إدراك العلاقات المختلفة بين مكونات المشكلة أو الموقف لتحقيق عملية الفهم الكامل للمشكلة أو الموقف.

وتتعدد التمثيلات التي يمكن للمعلم استخدامها فى شرحه لمحتوى الرياضيات، وكذلك التلميذ عند تعلمه ذلك، ومن التمثيلات المستخدمة فى تعلم وتعليم الرياضيات ما يلى:

أ. **الرسوم التخطيطية:**

وتعد الرسومات والتكوينات الخطية بمثابة تمثيلات بالخطوط والاشكال لمفهوم او قاعدة أو علاقة ما ، ويعمل هذا التمثيل على التجسيد المرئى الذى من شأنه اظهار العلاقات أو المكونات والتفاصيل بصورة تيسر عملية الادراك العقلي، ومن ثم فهي تساعد على التعبير عن المحتوى اللفظي بصورة بصرية كإحدى طرق العرض، فضلاً عن أهمية الرسومات والتكوينات الخطية فى خفض حدة التجريد

نتيجة لاستخدام اللغة اللفظية وحدها، الأمر الذى يسهم فى فاعلية التعلم الصفى بحجرات الدراسة(على اسماعيل سرور، ٢٠٠١، ٢٣٩).

ب. الرسم البيانى:

وفى هذا النوع من التمثيلات يتم الكشف عن أوجه للمشكلة لم تكن واضحة منذ البداية، فالرسم البيانى الذى يستخدم رموز بسيطة أو صور يُمكّن التلاميذ من رؤية الموقف، ويمكن أن يساعدهم فى تتبع مراحل المشكلة التي تحتوى على خطوات عديدة، ولذا يحتاج التلاميذ إلى تنمية مهارات استخدام وفهم الرسوم البيانية بفاعلية: فرسم خط بسيط ليرمز إلى المسافة قد يساعد فى رؤية الوضع الإجمالى للمشكلة، كما يحتاج التلميذ إلى تعرف كيفية تقليص المقاييس حتى يحل المشكلة ثم يعدل النتيجة للمقاييس الحقيقية، كذلك يحتاج إلى استخدام الرموز لإظهار العلاقات بين الأشياء(هشام بركات بشر حسين، ٢٠١٣، ١٥٥-١٥٨).

ج. تكوين جدول:

وفي هذا النوع يتم تكوين جدول يحتوى على المعلومات الهامة بالمشكلة، والتي يحتاج إليها التلميذ لإكمال الحل؛ حيث يقوم التلميذ باستخلاص المعلومات اللازمة للحل، وإدراك العلاقات الموجودة بين المعلومات المتضمنة فى الموقف المشكل، واختيار العمليات الحسابية للتعبير عن تلك العمليات، ويمر ذلك بمجموعة من الخطوات المتسلسلة (رمضان مسعد بدوى، ٢٠٠٣، ٢٢٣):

- تحديد سؤال المشكلة.
- استخدام أسئلة تحليل الموقف فى استخلاص المعلومات المحتواة فى المشكلة.
- إكمال الجدول
- التعبير عن العلاقات المكتوبة بعمليات حسابية.
- الإجابة عن سؤال المشكلة.
- التأكد من صحة النتائج التي تم الحصول عليها بمراجعتها بالمشكلة.

د. استخدام صيغة:

يتطلب فهم المشكلات الرياضياتية أو حلها تطبيق الصيغ التي تصف العلاقات بين النقاط والخطوط وسطوح الأشياء ثنائية وثلاثية الأبعاد، وتصف علاقات أخرى مثل التحويلات بين نظم القياس والدوال المثلثية وغيرها من موضوعات الرياضيات، والكثير من التلاميذ ذوى صعوبات التعلم يعانون من مشكلات فى تذكر صيغ معينة لأنهم لا يدركون المفاهيم الأساسية لهذه الصيغ أو لأنهم ينظرون إلى كل صيغة على انها مهمة حفظ منفصلة ومجردة (رمضان مسعد بدوى، ٢٠٠٩، ١٨٨).

يتضح مما سبق تعدد التمثيلات الرياضياتية التى يمكن الاستفادة منها فيمكن استخدام الرسوم التخطيطية لإدراك العلاقات المختلفة بين مكونات المشكلة المعروضة، واستخدام الجداول فى عملية طرح البدائل المختلفة لحل المشكلة، واستخدام الصيغ فى عملية ترجمة المشكلة وتحويلها إلى عبارات رمزية يسهل حلها، لذا ينبغى تدريب التلاميذ على كيفية بناء أو اختيار الأنواع المختلفة للتمثيلات.

كيفية تكوين التمثيلات الرياضياتية:

وحتى يستطيع التلميذ بناء أو استخدام التمثيلات الرياضياتية أثناء تعلمه للرياضيات فإن ذلك يتطلب التالي:

- وجود هدف لبناء التمثيل المناسب للمشكلة او الموقف، واجراء المناقشات لاختيار أفضل أشكال التمثيل، مع توفر الفهم الدقيق لأشكال التمثيل المختلفة(Tchoshanov&Pape ,2001, 124).
- ادراك ملامح وسمات المواقف المراد تمثيلها مثل: كمية المعلومات المتوفرة، ومدى وضوح تلك المعلومات، وكيفية اجراء عملية التمثيل من خلال تحديد شكل التمثيل (النصى مقابل التصويرى)، ومستوى التجريد، ونوع الإستراتيجيات(Ainsworth , Wood&Bibby ,2002).

- تحديد العناصر الرئيسة للتمثيل، واستخلاص المعانى، وترتيب المعلومات التي يتم الحصول عليها، وتنظيمها، وتفسيرها؛ والربط بين هذه المعلومات وذلك في ضوء المعرفة السابقة الموجودة لدى التلاميذ (محمد عيد حسن عوض الله، ٢٠٠٣، ١٠٨).
- قدرات التلاميذ حول كيفية التعامل مع التمثيلات المختلفة عند حل المشكلة، وتحديد المناسب منها كالتمثيلات الجدولية أوالتخطيطية أوالشفوية أو الرمزية، على أن يعطى التلاميذ الفرصة لاستخدام التمثيلات التي من ابتكارهم (2009, Cakiroglu& Akkus ; 2004, liaE& Gagatsis).
- المعارف السابقة التى يمتلكها التلاميذ حول التمثيلات المختلفة مثل: المعرفة الخاصة بشكل التمثيل؛ والتي تزود التلميذ بالمعلومات العامة المتطلبة لبناء الشكل البصرى، والمعرفة التطبيقية: وتعبر عن كيفية بناء التمثيل واستخلاص المعانى المتضمنة به (40, 2005, Moseley).
- معرفة المعلومات المقدمة وكيفية ترابطها مع بعضها البعض داخل المشكلة ويسمى ذلك بـ "بيئة المهمة"، ومعرفة المكان الذى نبحث فيه فى القاعدة المعرفية للعثور على المعلومات حول المهمة ويسمى ذلك "حيز المشكلة" (أشمان أدريان وكونواى، ٢٠٠٨).
- ويُعد عرض المحتوى الرياضياتى من خلال بعض المؤثرات البصرية بمثابة مثيرات خارجية يستقبلها التلميذ عبر ذاكرته الحسية، وإذا أعطى التلميذ اهتمامًا وانتباهًا لبعض هذه المعلومات فإنها :تنتقل– المعلومات – إلى ذاكرة التلميذ قصيرة المدى الخاصة به، وفى حالة وجود اهتمام وترميز وتماثل بين هذه المعلومات الجديدة وبين معلومات موجودة مسبقًا فى ذهنه فإن المعلومات تنتقل إلى ذاكرته طويلة المدى، بحيث يمكنه استرجاعها عند الحاجة إليها لمعالجة المعلومات والمواقف الرياضياتية المختلفة (أحمد صادق عبدالمجيد، ٢٠١٣، ١٦٩).

وتتحدد مستويات التمثيل فى ضوء المراحل الآتية (على إسماعيل سرور، ٢٠٠١، ٢٤٧-٢٤٨):

- مرحلة التعرف: وفيها يقوم التلميذ بتعرف عناصر التمثيل.
- مرحلة الوصف: ويتم فيها تحديد التفاصيل المرتبطة بعناصر التمثيل.
- مرحلة التحليل: وما تتضمنه من تصنيفات.
- مرحلة التركيب وفيها يتم الربط بين المفاهيم والعمليات المختلفة فى صورة تكاملية ليعبر التمثيل عن المحتوى التعليمى.
- مرحلة التفسير واتخاذ القرار: والتي يتم فيها تقديم التفسيرات التي توضح تمكن التلميذ من استخلاص المعانى المتضمنة فى التمثيلات المتنوعة للمفهوم أو القاعدة الرياضياتية
- مرحلة الابتكار: وفيها يتم استخدام المفاهيم التي تم استنتاجها فى مواقف جديدة وبأسلوب يتضح فيه قدرة التلميذ على إنتاج علاقات رياضياتية فى مواقف نمطية.

مما سبق يتضح أنه بهدف بناء أو اختيار التمثيل الملائم لمشكلة ما، يتطلب ذلك اثارة اهتمام التلميذ حول الموقف المشكل، وفهمه لكل مكون من مكوناته ومدى ارتباط هذه المكونات ببعضها البعض، فيبدأ فى التخطيط حول أى التمثيلات الأفضل لفهم الموقف أو حله، وتحديد العناصر الرئيسة، ثم يستدعي المعلومات المتطلبة لذلك، وتنظيمها، وتفسيرها.

المراجع

أحمد صادق عبدالمجيد (٢٠١٣). أثر استخدام الترابطات الرياضية وبعض استراتيجيات التدريس البصرى على مستوى تجهيز المعلومات والتقويم الذاتى لأنماط المعرفة الرياضية المكتوبة لدى تلاميذ الصف الأول الاعدادى. *مجلة الدراسات التربوية والنفسية*، جامعة السلطان قابوس، ٧(٢)، ١٦٧-١٨٥.

أشمان أدريان وكونواى (٢٠٠٨). *مدخل إلى التربية المعرفية "نظريات وتطبيقات"*. ترجمة: أسماء السرسى وأمانى عبدالمقصود، القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية.

حسن عوض حسن الجندى (٢٠١١).التمثيلات الرياضية: مدخل لتنمية القدرات الرياضية فى رياضيات المرحلة الإبتدائية. *مجلة تربويات الرياضيات*، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ١٤(١)، ٦-٦٩.

حفنى إسماعيل محمد (٢٠١٦). *تعليم وتعلم الرياضيات فى الطفولة المبكرة*. القاهرة، مكتبة ألأنجلو المصرية.

رضا أبوعلوان السيد وإبراهيم رفعت إبراهيم (٢٠٠٧). استخدام استراتيجية العصف الذهنى لتنمية مهارات تكوين المشكلات والابتكار فى الرياضيات لدى طلاب الحلقة الثانية من التعليم الأساسى. *مجلة تربويات الرياضيات*، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ١٠، ٧٢-١١٦.

رمضان مسعد بدوى (٢٠٠٣). *استراتيجيات فى تعليم وتقويم الرياضيات*. عمان، دار الفكر.

رمضان مسعد بدوى (٢٠٠٩). *تدريس الرياضيات للطلبة ذوى مشكلات التعلم*. *Math instruction for students with learning problems*. عمان، دار الفكر ناشرون وموزعون.

رياض إبراهيم البلاصي وأريج عصام برهم (٢٠١٠).أثر استخدام التمثيلات الرياضية المتعددة فى اكتساب طلبة الصف الثامن الأساسى للمفاهيم الرياضية

وقدرتهم على حل المسائل اللفظية. دراسات *"العلوم التربوية"*، 37 (1)، ١-١٣.

زيد الهويدى (٢٠٠٦). *استراتيجيات معلم الرياضيات الفعّال*. العين، دار الكتاب الجامعى.

سامح ريحان (٢٠٠٠) . *معمل الرياضيات " مدخل طبيعى لتعلم الرياضيات فى مراحلها الأولية "* . القاهرة، مطابع روز اليوسف.

سامح سلطى عريفج، ونايف أحمد سليمان (٢٠٠٥). أساليب تدريس الرياضيات والعلوم. عمان، دار صفاء للنشر والتوزيع.

صالح محمد أبوجادو (٢٠١٤). *علم النفس التربوى Educational Psychology (ط١١)*. عمان، دار المسيرة للنشر والتوزيع.

صالح محمد أبوجادو ومحمد بكر نوفل(٢٠٠٧). *تعليم التفكير: النظرية والتطبيق*. عمان، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة.

عثمان نايف السواعى (٢٠١٠). مهارات التمثيل الرياضى واجراء العمليات الحسابية لدى طلاب الصف السادس الأساسى. *مجلة العلوم التربوية والنفسية- البحرين*، ١١(٣)، ١٣٩-١٦٣.

عفت مصطفى الطناوى (٢٠٠٢). *أساليب التعليم والتعلم وتطبيقاتها فى البحوث التربوية*. القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية.

علي إسماعيل سرور (٢٠٠١). فاعلية استخدام الرسومات والتكوينات الخطية من خلال التعليم التعاونى فى تنمية مهارات الترجمة الرياضية والتفكير الإبتكارى لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائى. *المؤتمرالعلمى الأول "الرياضيات المدرسية: معايير ومستويات"*. جمعية تربويات الرياضيات،بالاشتراك مع كلية التربيةبجامعة٦ أكتوبر،٢١-٢٢ فبراير،٢٣٨ - ٢٦٨.

ماجدة محمود صالح (٢٠٠٦). *الاتجاهات المعاصرة فى تعليم الرياضيات*. عمان، دار الفكر للنشر والتوزيع.

محمد السيد على الكسبانى (٢٠٠٨). *التدريس : نماذج وتطبيقات فى العلوم والرياضيات واللغة العربية والدراسات الاجتماعية*. القاهرة، دار الفكر العربى .

محمد عيد حسن عوض الله (٢٠٠٣). التمثيلات الرياضية من خلال بعض طرق التدريس المتكاملة مدخل لتدريس أساسيات الجبر لتلاميذ المرحلة الابتدائية وعلاقة ذلك بتفكيرهم الاستدلالى وتحصيلهم الفورى والمؤجل. *مجلة تربويات الرياضيات*، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ٦(١)، ٩٩-١٤٣.

محمد محمود محمد حماده (٢٠٠٩). فاعلية شبكات التفكير البصرى فى تنمية مهارات التفكير البصرى والقدرة على حل وطرح المشكلات اللفظية فى الرياضيات والاتجاه نحو حلها لتلاميذ الصف الخامس الابتدائى. *دراسات فى المناهج وطرق التدريس*، الجمعية المصرية للمناهج وطرق التدريس، ١٤٦، ١٤ – ٦٤ .

محمود أحمد محمود نصر (٢٠٠٩). فاعلية الكتابة للتعلم من خلال فرق التفكير فى تصميم خرائط المفاهيم برياضيات المرحلة الاعدادية وأثر ذلك على تنمية التواصل الرياضى لدى طلاب الفرقة الرابعة رياضيات بكلية التربية. *المؤتمر العلمى الحادى والعشرون" تطوير المناهج الدراسية بين الأصالة والمعاصرة"*. الجمعية المصرية للمناهج وطرق التدريس، دار الضيافة – جامعة عين شمس، ٢٨-٢٩ يوليو. ١٣٦٩ – ١٤٤٣ .

هشام بركات بشر حسين (٢٠١٣). *تدريس الرياضيات اليوم Teaching Mathematics Today: دليل المعلم المتميز فى الفصول الناجحة*. عمان، دار البداية.

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The journal of the learning sciences*, 11(1), 25–61.

Akkus, O., & Cakiroglu, E. (2009). The effects of multiple representations based instruction on seventh grade students' algebra performance. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (eds.). *Proceedings of CERME 6,* January 28th-February 1st , Lyon France

Bonotto, C. (2013a). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educ Stud Math,* 83, 37–55.

Bonotto, C. (2013b). Realistic mathematical modeling andproblem posing. In R., Lesh, P. L., Galbraith, C. R., Haines, & A., Hurford, (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies,* New ICTMA Studies Series No. 13. New York: Springer, 399-408.

Çıldır, S., & Sezen, N. (2011). A study on the evaluation of problem posing skills in terms of academic success. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 2494–2499.

Contreras, J. (2003). A problem-posing approach to specializing, generalizing, and extending problems with interactive geometry software. *The Mathematics Teacher*, 96(4), 270-276.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta – Pantazi, D., Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149 – 158.

Gagatsis, A. & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, Bergen, Norway, July 14-18,447–454

Ghasempour, Z., Bakar, M. N., & Jahanshahloo, G. R. (2013). Innovation inteaching and learning through problem posing tasks and metacognitive strategies .*International Journal of Pedagogical Innovations*, 1, 53-62.

Kiliç, Ç. (2013a).Turkish Primary School Teachers' Opinions about Problem Posing Applications: Students, the Mathematics Curriculum and Mathematics Textbooks. Australian Journal of Teacher Education, 38 (5),144-155.

Kiliç, Ç. (2013b). Determining The Performances Of Pre-Service Primary School Teachers In Problem Posing Situations. *Educational Sciences: Theory & Practice.* 13(2).1207-1211.

Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" Strategy in solid geometry — a case study. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 369-387.

Lin, P. J. (2003). Enhancing teachers' understanding of students' learning by using assessment tasks. In N. A., Pateman, B. J., Dougherty, & J. T. Zilliox, (Eds.). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, 3, Honolulu, HI, 13-18 July. 205-212

Milgram, R., J. (2007). What is mathematical proficiency?.In A., H. Schoenfeld (ed.) Assessing Mathematical Proficiency, *Mathematical Sciences Research Institute publications* , 53, 31-58.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: the effects ofemphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1).37-69.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, Reston, VA.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educ Stud Math*, 72, 39–60.

Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, 40(2), 118-127.

Tichá, M. &Hošpesová, A. (2010). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne& F. Arzarello (eds.) *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, January 28th - February 1st 2009. Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique. 1941-1950.

Tomoto, T., Ichi, M., Hirashima, T., & Takeuchi, A. (2010). A learning environment forsolution-based problem-posing in multi-digit subtraction. In S. L. Wong et al. (Eds.) *Proceedings of the 18th International Conference on Computers in Education.* 76-80, Putrajaya, Malaysia: Asia-Pacific Society for Computers in Education

Van Harpen, X., &Presmeg, N. (2013). Insights into students' mathematical problem posing processes. In B., Ubuz, (Ed). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, Ankara, Turkey: PME, 289-296

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. In B. Sriraman and K.H. Lee (eds.), *the Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*, 5–28.