بحث بعنوان

جودل وأزمة الرياضيات

" مبرهنات عدم الاكتمال "

Gödel's and Mathematical Crisis

"Incompleteness Theorems"

إعداد دكتورة

نادية السيد عبد القادر

مدرس المنطق وفلسفة العلم بقسم الفلسفة

كلية الآداب – جامعة الإسكندرية

□

المستخلص العربى

جودل وأزمة الرياضيات

" مبرهنات عدم الاكتمال "

إن التقدم والتطور الذي حدث في مجال الرياضيات أدى إلى حدوث أزمة في مجال الرياضيات التى أطلق عليها أزمة الأسس، فأندلعت كل المحاولات التي أخذت على عاتقها إثبات عدم اكتمال المفاهيم العلمية وزعزعة الأنساق العلمية؛ الأمر الذي لم يُعد هناك حقائق يقينية مطلقة. وتمثلت أهم تلك المحاولت فى الإتجاه الإبستمولوجى لفكر "كورت جودل" ت ١٩٧٨، الذى تابع الهجمات النقدية التى أنصبت على الرياضيات لتنال من مصداقيتها ويقينها منذ بداية القرن التاسع عشر وحتى مطلع القرن العشرين ؛ أدى إلى زعزعة الأسس التي بنيت عليها الرياضيات ؛ مدعماً رؤيته بمبرهنتي عدم الاكتمال اللتين انطوتا على نتائج بعيدة الأثر فيما يتعلق بأسس الرياضيات. حاول "جودل" البرهنة على اتساق التحليل، من خلال رده إلى نظرية الأعداد ، وسرعان ما أدرك أنه لن يحتاج فقط إلى اتساق نظرية الأعداد بل إلى صدقها أيضاً. والتي هزت أسس برنامج هلبرت دون هدمه تماماً، بدا جليا أن طبيعة الصدق في العلوم الصورية مثل الرياضيات والمنطق إنما تستند إلى مفهوم الاتساق، أخضع جودل للفحص جميع أنساق التعاريف الرياضية، وأثبت في عام ١٩٣١ أن ما من نسق من هذه الأنساق يحتوى في ذاته على دليل صلابته. ومن هنا وجد نفسه فى حاجة إلى إستراتيجية أخرى للوقوف على أبعاد جديدة لحل المعضلات التى واجهته ؛ انطلق جودل فى تأسيس مبرهناته من إدراكه لمغزى النسق الصورى، لقد نجح جودل حيث فشل الآخرون بسبب اهتمامه بتمييز التركيب النحوي والدلالي، وإعادة بناء أنساق صورية محددة جديدة .

الكلمات المفتاحية : زمة الأسس، مبرهنة عدم الاكتمال، الريبة، الصورية البحتة، الاتساق،

ترقيم جودل، إمكانية التعبير رقمياً، النقائض اللغوية، ما وراء الرياضيات، مبرهنات عدم الأكتمال عند جودل.

Abstract

Gödel and the Mathematics Crisis

“The Incompleteness Theorems”

The progress and development in the field of mathematics led to a crisis in the field of mathematics, which was called the foundational crisis. All attempts were made to prove the incompleteness of scientific concepts and the disruption of scientific systems, leading to absence of absolute certain facts. The most significant of these attempts was the epistemological trend of Kurt Gödel's thought, died in 1978, who followed the critical attacks on mathematics to undermine its validity and certainty from the beginning of the nineteenth century until the beginning of the twentieth century. This destabilized the foundations on which mathematics was built, supporting his vision with the two incompleteness theorems, which implied far-reaching results regarding the foundations of mathematics. Gödel attempted to demonstrate the consistency of analysis by referring to the numbering theory, and he soon realized that he needed not only the consistency of numbering theory but also its validity. This destabilized the foundations of the Hilbert’s program without completely destroying it. It seems clear that the nature of validity in formal sciences such as mathematics and logic is based on the concept of consistency. Gödel examined all forms of mathematical definitions. In 1931, he proved that any of these systems contained in itself evidence of its firmness. Hence, he found himself in need of another strategy to find new dimensions to solve the dilemmas he faced. To establish his theorems, Gödel set out from his awareness of the significance of the formal system. Gödel succeeded where others had failed because of his interest in distinguishing the syntactic and semantic structure and reconstructing new specific formal systems

Keywords : The foundational crisis, Gödel's Completeness theore, undecidability, Pure Formalism, Consistency, Gödel Numbering, numeral wise expressibility, Semantic Antinomies, Metamathematics, Gödel's Incompleteness Theorems.

مقدمة

رغم وجود اختلافات كثيرة بين الفلسفة والعلم بيد أنه يوجد اتفاق واحد بينهما، وهو أنهما لا يستطيعان الوصول إلى حقائق يقينية صادقة صدقًا مطلقًا ونهائيًا.

إن التقدم والتطور الذي حدث في مجال الرياضيات أدى إلى حدوث أزمة في مجال الرياضيات. فاكتشاف الهندسات اللاإقليدية عند لوباتشفسكيّ، واكتشاف نظرية حساب المجاميع Theory of Setes عند "جورج "كانتور"، انتهيا إلى أن كل المسلمات الرياضية التي تم إقرارها من قبل من دون نقاش حول مدى صحتها لم تكن من نوع الأوليات الرياضية الصادقة صدقًا مطلقًا؛ الأمر الذي أدى إلى الاهتمام بالتحليل الدقيق للمدلولات الرياضية، فضلا عن ضرورة دراسة الأسس البديهية للنظريات الرياضية. كذلك الحال في نظرية حساب المجاميع لجورج "كانتور"، والتي أوضحت أن خصائص الأعداد اللآمتناهية غير خصائص الأعداد المنتهية المعروفة لدينا، وبذلك حاولت الرياضيات الحديثة أن تجعل للأعداد اللآمتناهية الكبر وجودًا حقيقيًا في عالم العلم.

لكن مع بداية القرن العشرين، ظهرت نظرية أينشتين عن النسبية، ومبدأ اللايقين عند هايزنبرج، وأسس النظرية الأكسيوماتيكية Axiomatic عند ديفيد هلبرت - إمام الرياضيات بجامعة برلين - تلك المحاولات التي أثبتت عدم اكتمال المفاهيم العلمية وزعزعة الأنساق العلمية؛ الأمر الذي لم يُعد معه حقائق يقينية وبخاصة يقين مطلق. ثم ظهر على الساحة "كورت جودل" ت ١٩٧٨، واشتهر بمبرهنتي عدم الاكتمال Theoremes Incompeleteness، اللتين انطوتا على نتائج بعيدة الأثر فيما يتعلق بأسس الرياضيات وعلم الحاسوب.

لقد أثبت "جودل" أن مناهج الرياضيات المطبقة منذ عصر "إقليدس" غير كافية لاكتشاف كل ما هو صحيح فيما يتعلق بالأعداد الطبيعية، وأدى اكتشافه هذا إلى زعزعة الأسس التي بنيت عليها الرياضيات حتى مطلع القرن العشرين، وإلى حث المفكرين على البحث عن بدائل، كذلك أرست أساليب "جودل" الابتكارية والتي أمكن - بالفعل - تطبيقها في خوارزميات عمليات الحوسبة Computations الأساس لعلم الحاسوب الحديث.

إن أشـــهر إســـهامات جودل العلمية هي برهانه على أن بعض القضـــايا المتعلقة بالأعداد الطبيعية هي صـــادقة أو صـــحيحة لكنها غير قابلة للإثبات، ولقد أثبت برهان "جودل" أن مســلمات نظرية الأعداد ليســت تامة؛ أي أن هناك قضــايا صــادقة فيما يتعلق بالأعداد الطبيعية لا يمكن إثباتها انطلاقًا من تلك المسلمات.

وتجدر الإشـــارة إلى: أن "جودل" بعد هجرته إلى أمريكا توقف عن البحث في نظرية المجموعات، وتحول اهتمامه إلى الفلســفة العلمية ونظرية أينشــتين عن النســبية، وقد اســتطاع أن يبرهن على أن الأكوان التي يمكن أن ينتقل فيها الزمن إلى الماضي تتوافق مع معادلات أينشتين.

نحاول في هذا البحث إلقاء الضـــوء على أزمة الرياضـــيات ومبرهنات عدم الاكتمال عند "جودل" من خلال المسائل الآتية :

١- أزمة الرياضيات قبل جودل.
٢- محاولة جودل حل الأزمة.
٣- مبرهنات جودل.
   - مبرهنة عدم الاكتمال الأولى: الإستراتيجية الشاملة.
٤- فلسفة الرياضيات.
   - العلاقة بين الرياضيات والفلسفة والعلوم الطبيعية.
   - نتائج البحث.

إشكالية البحث وتساؤلاته .

يتساءل هذا البحث عن ستة جوانب متصلة هي:

١- ما النتائج التي تمخضت عن التقدم في مجال الرياضيات؟

٢- كيف تسنى "الديفيد هلبرت" معالجة الأزمة في أسس الرياضيات؟

٣- ما موقف جودل من مناهج الرياضيات منذ عهد "إقليدس"؟

٤- ماذا أفادت مبرهنات جودل بالنسبة للرياضيات المعاصرة؟

٥- ما طبيعة العلاقة بين الرياضيات وفلسفة العلم؟

٦- ما الذي ترتب على اتجاه جودل إلى الفلسفة العلمية ونظرية النسبية؟

عناصر البحث:

أولًا- أزمة الرياضيات قبل جودل.

ثانيًا- الاتساق.

ثالثًا- مبرهنات جودل ومحاولة حل الأزمة.

رابعًا - فلسفة الرياضة عند جودل.

نتائج البحث.

قائمة المراجع.

منهج البحث:

إن المناهج المستخدمة فى إعداد البحث هما المنهج التحليلى، والنقدى المقارن، ولا شك أنهما منهجان يستقيمان تماماً مع موضوع الدراسة.

أولًا - أزمة الرياضيات قبل جودل:

شـــهدت الرياضـــيات مرحلة اليقين العلميّ منذ أقدم المفكرين عند كل من "طاليس"(*) و"فيثاغورس"(**) من خلال بناء النسق الاستنباطيّ، ابتداء من البديهيات، والتعريفات، والمسلمات؛ للبرهنة على المبرهنات باستخدام قاعدتي التعويض وإثبات التالي [١]، واهتمت الرياضيات ببرهان النظريات من دون محاولة صياغتها في نسق علميّ موحد، ذلك الذي أضفاه "إقليدس"(***) بتأثير من تحليلات "أرسـطو" للأسـس التي تسـتمد منها الهندسـة براهينها؛ وهي التعريفات والأصـول والمسلمات، التي مثلت حجر الزاوية في البناء الرياضـي بأكمله؛ لذا كانت هندسـة "إقليدس"(*) أول بناء وثيق يشهد بالعبقرية العلمية، التي تعتمد - في أساسها - على أسس ومسلمات جعلتها تتصف بالثبات والتقدم، وبعد ثلاثة وعشـرين قرنًا من الزمان ظهرت أنسـاق هندسـية أخرى فتحت المجال لإنشاء هندسات عديدة تتسق كل منها ذاتيًا وتخالف غيرها من الأنساق الأخرى؛ مما أدى إلى تصور جديد للحقيقة الرياضية وتبدل معيار اليقين الرياضيّ[٢].

في مطلع القرن التاسع عشر تعرضت الرياضيات لحركة نقدية تنصب على مصداقيتها ويقينها، ولاسيما تلك التي وجهت المتشككين إلى متناقضات نظرية المجموعات؛ حيث كان مفهوم اللامتناهي يستخدم في العلوم الرياضية منذ قديم الزمان، ولكنه كان يعتبر تارة بمثابة صيرورة، كما يقول الفلاسـفة، صـيرورة متغيرة قابلة للارتفاع والزيادة وتجاوز كل الحدود الممكنة وتارة أخرى بوصفه مصطلحًا يشير إلى حد رمزيّ لا يمكن لأية قيمة أن تبلغه مهما كبرت[٣].

وفي الربع الأخير من القرن التاسع عشر جاء العالم "جورج كانتور" بتصور مغاير للنظرة التي كانت عند العلماء عن اللامتناهي، فانتقل بالمفهوم من حال الوجود بالقوة إلى حال الوجود الحقيقيّ الآنيّ، ولفهم ذلك كانت انطلاقته عبر المقارنة بين مجموعتين اثنتين هما: مجموعة الأعداد الصحيحة: ٠، ١، ٢ .... ومجموعة الأعداد الحقيقية، وتتضمن الأعداد الصحيحة والأعداد الكسرية. إن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد والإحصـاء، خلافًا لمجموعة الأعداد الصـحيحة؛ الأمر

الذي تشير إليه أسطورة "زينون" اليونانيّ (القرنان الرابع والخامس قبل الميلاد)، المتعلقة بالسباق الخياليّ بين الأرنب والسلحفاة، وقد أشار "كانتور" إلى هذين اللامتناهيين بأول حرف ألف؛ فصار العدد الأصغر يسمى "ألف صفر" والأكبر ألف واحد، وحينئذ يتبادر إلى الذهن والسؤال، عما إذا كان هناك عدد لا نهائيّ آخر يأتي بعد ألف واحد من حيث الكبر، وقد بيّن "كانتور" أن هناك عددًا لا منتهيًا ثالثًا يأتي بعد ألف واحد وهو ألف اثنان ثم ألف ثلاثة فألف أربعة وهكذا إلى ما لا نهاية، فتتكون سلسلة من الأعداد اللامتناهية تعرف باسم الأعداد اللامتناهية(٤).

واستخدمت نظرية المجموعات بوصفها وسيلة لطرح وجهات نظر المذاهب المتطرفة في الرياضيات، في مواجهة "كورت جودل" الذي أعتبر رد فعلهم غير مسوغ وذلك لسببين :الأول؛ أن المتناقضات لا تحدث داخل الرياضيات، ولكن على حدودها القصوى نحو الفلسفة. والثاني؛ أنه قد تم حل المتناقضات بطريقة مرضية تمامًا والتي تبدو واضحة لكل من استطاع أن يفهم النظرية، ومع ذلك أوضحت مبرهنة عدم الاكتمال "لجودل" أن تصور الرياضيات بوصفها نسقًا كاملًا للصدق لا يمكن إنقاذه عن طريق مجموعة بديهيات(*)، وقواعد صورية. ومن جانب آخر فقد رفض أصحاب نظرية المجموعات تصور الرياضيات انطلاقًا من صدق البديهيات والتي لا يمكن إدراكها بأية طريقة؛ ولهذا فإن النتائج المترتبة عليها تصبح ذات مغزى فقط بالمعنى الافتراضيّ، ومن خلال تفسيرها على أنها لعب بالرموز وفق قواعد محددة(٥)، ولقد أطلق على أزمة الرياضيات أزمة الأسس التي يمكن ملاحظتها- بقوة - في الهندسة الإقليدية(٦).

إن بناء الهندسة الإقليدية يتطلب وجود المحددات الأتية(٧):

١- **مفاهيم أولية (غير معرفة)** Undefined Concepts: وهي مفاهيم بديهية مألوفة لا تحتاج إلى تعريف، مثل: النقطة والمستقيم والمستوى.

٢- **مفاهيم معرفة** Defined Concepts: وهي مفاهيم تحتاج إلى تعريف حتى تكون واضحة كمفهوم الدائرة والمربع ومفهوم التعامد والتوازي.

٣- **المسلمات** Postulates : وهي عبارات تعميمات يقبل بصحتها دون برهان .

٤- **النظريات** Theorms: وهي عبارات تعميمات يجب البرهنة على صحتها، وذلك عن طريق استخدام المسلمات أو النظرية المبرهنة .

٥- **التطبيقات** Applications**:** وتكون على شكل تمارين ومسائل يكون حلها بالمسلمات والنظريات ومفاهيم المعرفة وغير المعرفة.

وتتسم البنية الهندسية بالخصائص(٨) التالية :

١- **الاكتمال**: أي أن مجموعة المسلمات ضمن النظام نفسه كافية لبرهان أية نظرية تربط بين المفاهيم المعرفة وغير المعرفة .

٢- **الاستقلال**: أي أن مسلمات النظام ليست نتائج من بعضها، ولا يمكن التوصل إليها أو برهنتها من مسلمات أخرى .

٣- **التصنيف**: ويعني: أن النماذج المختلفة في البنية الرياضية تكون متماثلة، وذلك من خلال وجود اقتران تناظر بين هذه النماذج. تناظر واحد – واحد.

٤-**الاتساق وعدم التناقض**: أي: أن النظام الواحد لا يؤدي إلى نتيجتين متناقضتين، كما لا تتناقض المسلمات مع بعضها ولا توجد قضية ونقيضها صائبتين أو خاطئتين معًا.

بدت الهندسة علمًا بتلك الخواص الهندسية الممكنة عقلًا لا علمًا، بخواص لموجودات حقيقية،أي: أمام هندسات عديدة كل واحدة منها متسقة القضايا، ويؤكد "برتراندرسل" على أن المقصود بالهندسة الإقليدية أنها عبارة عن نسق يتألف من عدة تعريفات، وقضايا تمثل أبنية استدلالية أشد صعوبةً وتعقيدًا من التعريفات، وأن هذا النسق يتألف من مجموعة من الاستدلالات التي تعتمد على التضمن، ونعني بهذا أن المبرهنات الهندسية تتبع البديهيات بالضرورة، وأن صدق المبرهنات يعتمد على صدق المقدمات(٩).

هندسات لاإقليدية:

على الرغم من أن "إقليدس" صـنف مسـلمته الخامسـة ضـمن المبادئ التى يفترض أنها واضحة بذاتها، إلا أنها بدت غير ذلك؛ حيث افترضت أن الخطين المتوازيين لابد من أن يمتدا إلى ما لا نهاية في كلا الاتجاهين، فإن نقطة التلاقي – لو كان مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من قائمتين – قد تكون من البعد بحيث تخرج عن نطاق الخبرة المباشـرة ،و تعجز هذه المسـلمة عن أن تكون واضحة بذاتها كباقي المسلمات، ومن ثم يجب إقامة البرهان على صحتها(١٠).

حاول الكثيرون البرهنة على صـحة المسـلمة الخامسـة، وعلى الرغم من اختلافهم، فقد ثبت أنها مسـتقلة عن بقية مسـلمات "إقليدس"، بحيث من الممكن اسـتبدال مسـلمة أو أكثر بأخرى من أى نسـق للحصـول على هندسـات جديدة دون الوقوع فى التناقض. ويعتبر هذا تغييرًا جوهريًا فى أسـس الهندسـة. الأمر الذي أدى إلى تقلص فكرة الحقيقة (Verite) في الهندسـة عن ميدان المطابقة بين قضـايا الهندسـة والعالم الواقعيّ وانحصـرت في فكرة عدم التناقض، والاتسـاق والانسـجام المنطقيّ لقضـايا النسق الهندسـيّ فيما بينها، ويعتبرهذا تحول كبير ومهم في فكرة "الحقيقة " بصـفة عامة، أو الرياضيات؛ ومن ثم فكرة العلمية ذاتها (١١).

أصـبح المعنى المنطقى الصـرف للحقيقة والذى يعنى "اتسـاق مجموعة من القضـايا غير المتناقضة التي تستنبط من عدد من المسلمات"، هو معيار الحقيقة الذي يلازم كل "نسق استنباطي(*) فرضى"، مما دفع البعض(**) إلى محاولة إثبات صحته باستخدام "برهان الخلف"، بمعنى أن استحالة إثبات بطلان تلك القضية يتضمن في ذاته صحتها. وعلى الرغم من سلبية هذا البرهان، الذي لا يثبت فقط إستحالة نقيض المسلمة، وإنما أتاح فرصة اختبار الفروض المضادة لمسلمات "إقليدس"، وإقامة أنساق أخرى لا تعتمد على المسلمة الخامسة في هندسة "إقليدس"، وتستبدل فيها قضية أو أكثر بما يقابلها من قضـايا النسـق الإقليدى. فظهرت الهندسـة المطلقة التى اعتمدت على المسلمات الأربع فى النسـق الإقليدى، وإثبات فرض الزاوية الحادة فيها يؤدى إلى ظهور ما يسـمى بالهندسـة الزائدية(*)

والتى عرفت بهندسة لوباتشفسكي(**) وتعتبر هي الأكثر شهرة؛ لأنها كانت أول عرض منهجي منشور لهندسة لاإقليدية، أمتازت بمخالفتها للنسق الإقليدي في القضايا الآتية:

١- المكان سطح "مقعر"، درجة الإنحناء به أقل من صفر.

٢- مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين[١٢].

كتب لوباتشفسكي في عام ١٨٢٠م، نص بديهية "إقليدس" الخامسة، والتي عرفت ببديهية المتوازيات، من نقطة ما لا تقع على خط مستقيم، يمكن رسم عدد لامتناه من المستقيمات لا تتقاطع مع الخط المستقيم الأول. يمكن أن توجد العديد من هذه الخطوط في هندسة "لوباتشفسكى". ولقد أدرك الرياضي الألماني "برنارد ريمان" (١٨٢٦-١٨٦٦) لاحقًا، أن الهندسة ثنائية الأبعاد التي سيضربها الأشخاص المحبوسون على سطح الكرة ستختلف عن تلك الخاصة بالأشخاص الذين يعيشون على متن طائرة: على سبيل المثال، ستكون p أصغر قطر الدائرة، كما هو مرسوم على كرة، كبير نسبيًا مقارنة بالمحيط[١٣]. وبتعميم ريمان لمفهوم الفراغ الذى قاد إلى الفراغات المجردة، توصل ريمان إلى فكرة الهندسة التي لا توجد فيها خطوط مستقيمة لا تتقاطع مع خط مستقيم معين، تمامًا كما هو الحال في مجال تقاطع جميع الدوائر الكبيرة (أقصر مسافة بين نقطتين). ليقدم نسقًا هندسيًا جديدًا– يعرف بالهندسة الناقصية(**)، أو بالهندسة الكروية التى تخالف كلا من الهندسة الإقليدية والهندسة المطلقة وهندسة لوباتشفسكي، وهي تخالف الأنساق السابقة في القضايا الآتية[١٤]:

١- المكان سطح كروي، درجة الإنحناء به أكبر من الصفر .

٢- الخط المستقيم لايمكن أن يمتد إلى ما لانهاية، وإنما هو منته، لأنه دائري .

٣- مجموع زوايا المثلث يزيد على قائمتين .

لقد أوضح الرياضي فيلكس كلاين (١٨٤٩ -١٩٢٥) ما بين هذه الهندسات من علاقات تشابه، فتشير هندسة "إقليدس" إلى سطح انحناؤه صفر، في حين يشير لوباتشفسكي إلى سطح موجب

الانحناء (مثل الكرة) وطبقها ريمان على سطح سالب الانحناء. وبالاختصار يسمى كلاين هندسة "إقليدس" مكافئية – لأنها نهاية الهندسة الناقصية (هندسة ريمان) من ناحية، ونهاية الهندسة الزائدية (هندسة لوباتشفسكي) من الناحية الأخرى[١٥].

تفترض الأنساق الثلاثة مسبقًا تصور المكان. فهو إما أن يكون سطحًا مستويًا ("إقليدس") أو سطحًا مقعرًا (لوباتشفسكى)، أو سطحًا محدبًا (ريمان) وهذا يعني أن أصحاب تلك الأنساق قد نظروا إلى الأشكال الهندسية بوصفها أشكالاً متحركة في المكان. هذه الحركة[*] ضرورية لإشباع شرط القياس (قياس الزوايا والمسافات)؛ والذى إختلف دلالته ومغزاه بظهور مبحث جديد يعرف بما وراء الرياضيات Metamathematic يهتم بدراسة خواص الأنساق الأكسيوماتيكية كأنساقاً صورية تسمح وفقا لصورية النسق بالتخلي عن شرط القياس، وإحلال فكرة التكافؤ محل فكرة المساواة فى قياس الأشكال. وبذلك فإن شكلا ما يمكن أن يكافئ آخر مهما اختلف حجمه[١٦].

إن تمثيل الهندسة اللاإقليدية بهذه الأنساق وطريقة البرهنة على اتساق هذه الهندسات، تبين أن هذا التآلف نسبي فقط وليس مطلقًا. وقد نتج عن إثبات اتساق الهندسات اللاإقليدية، وهو أن مسلمة التوازي مسلمة مستقلة عن المسلمات الأخرى لإقليدس. وأنه لا يمكن استنباطها من المسلمات الأخرى كنظرية، كما تحررت الهندسة من قالبها التقليدي فأصحبت مسلمات الهندسة بالنسبة للرياضي مجرد افتراضات، فهو يختار مسلماته أو فروضه كما يحلو له ولكن بشرط أن تكون متآلفة مع بعضها. وهو لا يهمه الصدق الفيزيائي للمسلمة أو حقيقتها طالما أنه ينتج عن مجموعة مسلماته بناءً رياضيًا متماسكا من ناحية المنطق ثابتاً من ناحية التآلف. واثبات إتساق الهندسات اللااقليدية لم يحرر علم الهندسة فقط. ولكنه كذلك حرر الرياضيات ككل، فقد أصبحت الرياضيات تعتبر ابتكاراً يقوم به العقل البشري. كما ألغى الاعتقاد بأن حقائق الرياضيات مطلقة. وينسب لجورج "كانتور" قوله بأن "جوهر الرياضيات يكمن في حريتها"، ومن ثم أتاح فرصة إعادة النظر في الصدق المطلق وإحلال مبدأ الاتساق[١٧]. إذ تعددت الأراء والتوجهات الفكرية في تحديد طبيعتها؛ وتنازعت فيما

بينها، فذهب المناطقة إلى أن قضـــاياها مجرد قضـــايا من المنطق الصـــورى فحســـب، بينما ذهب الأكســـيوماتيكون إلى أن كل من المنطق والرياضـــيات إنما نبعا ســـويًا من أصـــل آخر هو الطريقة الأكســـيوماتيكية، بينما أكد الحدســـيون أن الحقائق الرياضـــية لا تنبع إلا من نوع خاص من التجربة الفكرية، وهى ما تسـمى "بالحدس الرياضـــى"(*)،(١٨). وبفضـل الجهود التي بذلت لتنقيح وإسـتكمال أســس الهندســة، والتي تمثلت في أعمال "ديفيد هلبرت"(**) وبوجه خاص في "أســس الهندســة"، اسـتخدم علماء الرياضـيات لفترة طويلة بعض المفاهيم الأسـاسـية الأخرى، مثل "مفاهيم ديدكند"(***) عن العدد الطبيعى والعدد الحقيقى، وسادت الرياضيات لفترة طويلة في إطار العمليات البديهية(١٩).

في عامي ١٩١٨ و١٩٢٢ عالج هلبرت أزمة أسس الرياضيات، والتي تدور حول متناقضات مجموعات "جورج كانتور"، واقترح لذلك تصورين :

التصـــور الأول: يتمثل في (بنية تركيب اللغة، والتعريفات، والبديهيات الرياضـــية ومبادئ المنطق) لاستخدامها في تطوير جزء محدد من الرياضيات الكلاسيكية الحالية تمامًا من حيث أشكال موضوعات اللغة. باختصـار، يجب إضـفاء الطابع الصـوري، أو تضـمينه في نسق صـوري S. وفي النسـق S، سيكون لدينا قائمة يتم اختيارها مسبقًا من الرموز (الأولية)؛ يتم تعريف تسلسلات محددة من (متتاليات) وتشكل من الرموز المعرفة لتكوين صيغ؛ والمتتاليات المحددة للصيغ يجب أن تكون برهان، وهى تلك الصيغ القابلة للبرهنة أو تشكل مبرهنات صورية. وبذلك يصبح استنباط القضايا من الجزء المحدد من الرياضـيات، عند إضـفاء الطابع الصـوري على النسـق S، يتكون ببسـاطة من الألاعيب الميكانيكية من الموضـوعات الصـورية، مع عدم الاعتماد على معانيها؛ على الرغم من أن المعنى هو الذي يجعل النســق مهمًا، ويفســر انعكاس الرياضـــيات غير الصـــورية. وإذا كان من الضرورى استخدام شيء ما من المعني أو التفسير، فينبغي وضع ما نستخدمه في النسق S في شكل بديهيات أو قواعد اسـتدلال(٢٠). تسـتخدم الرياضـيات مجموعة من المفاهيم المجردة، بدءًا من متوالية الأعداد الطبيعية 0، 1، 2، ...... والتى يمكن تحديد إدراكها كموضـــوعات يحددها موضـــعها في

التسـلسـل، وتسـتمر المفاهيم الرياضـية بشـكل معقد ومتعالٍ، كما هو الأمر في الأعداد التخيلية ومجموعات من الإحداثيات العليا. إذا لم يعترف علماء الرياضـيات بأنهم يسـتخدمون مفاهيم مثالية تفوق المعاني البديهية الواضحة بذاتها، فعليهم أن يفعلوا ذلك الآن[٢١].

التصور الثاني: يتمثل في ضرورة البرهنة على اتساق النسق الصورى عن طريق التفكير الرياضـي؛ وهو أمر بديهى لاشك فيه، بحيث لا يمكن البرهنة في النسق S على إثبات الصيغة A ونقيضها A~ في ذات النسق. وبالفعل تصبح موضوعات النسق الصورى متناهية: بحيث تتمثل في الرموز، سلسلة نهائية من الرموز، وسلسلة من المتسلسلات النهائية من الرموز .

"ديفيد هلبرت" من قمم الرياضة الحديثة لا يوافق "رسل" على أن تكون الرياضة منطقًا صوريًا بحتًا، وأخذ يطور فكرة أصل الرياضة والمنطق مما سماها "النظرية الأكسيوماتيكية Axiomatic Theory. ولا يرى في المنطق فرعًا من الرياضيات، ولا في الرياضيات فرعًا من المنطق، وإنما يرى أنهما شيئان نبعا معًا متوازيان من منبع واحد أبعد منهما هي الطريقة الأكسيوماتيكية أو الصورية البحتة Pure Formalism التي هي الأساس الأول والبعيد لعلمى الرياضيات والمنطق معًا. وهذا الذهاب إلى ما وراء الحدود والمسلمات الأولية في المنطق والرياضيات إنما ينتهى عند قبول حدود ومسلمات أولية أخرى لاهي إلى المنطق، ولاهى إلى الرياضيات، وإنما مجرد رموز اسمية Nominal نضعها وضعًا، ومن ثم، فهى صورية بحتة، وتلك الحدود والمسلمات هي الأكسيوماتيك التي تشتق منها الرياضيات والمنطق وهما متوازيان لا متصلان[٢٢].

وإن كان "هلبرت" قد اقترح إضفاء الطابع الصوري على النظريات الرياضية، أملًا في التصدى للمتناقضات، الأمر الذي دفعه إلى البحث عن نسق خارج إطار الرياضيات. وعمل على تهذيب أجزاء الرياضيات الكلاسيكية التي رفضها الحدسيون، ودراسة الأنساق الصورية وفقًا لبنيتها التركيبية (مع ترك معانى الرموز) كجزء للرياضيات الواقعية.، وأن يستخدم فقط اللانهائية المحتملة[*] والتي أطلق عليها مصطلح (اللامتناهي)، وباستخدام المناهج المتناهية finitistes فقط، وهو ما أسماه نظرية البرهان proof theory، أو ما وراء الرياضيات[**] Meta Mathematics[٢٣].

حاول "جودل" البرهنة على اتســـاق التحليل، وفقًا لبرنامج "هلبرت". ثم اقترح تقســـيم صعوبات المشكلة عن طريق رد اتساق التحليل إلى نظرية الأعداد. بدأ بالنظر في النموذج الذي يتم فيه تفسير مجموعة المتغيرات على أنها مجموعات يمكن تحديدها في الحساب. وسرعان ما أدرك أنه لن يحتاج فقط إلى اتساق نظرية الأعداد بل إلى صدقها أيضًا. ومن ثم تكشفت له النتائج التي نشرها في عام ١٩٣١، والتي هزت أسس برنامج هلبرت دون هدمه تمامًا[٢٤].

أصبح المطلب الأساسي لكى يكون النسق الاستنباطى مفيدًا هو التأكد مما يأتى:

(أ) "سلامة" النسق بحيث لايمكن أن تقدم القواعد الاستنباطية "زيفا"، ومن ثم يمكن استنتاج قضايا صحيحة فقط باستخدام القواعد والمسلمات التي تفترض صحتها.

(ب) أن أي صيغة "صالحة كليا" يمكن في الواقع استنتاجها، وكذلك وبالنسبة للنسق المشتق من الأصول PM .

ويعد البرهان المحدد من قائمة الصـــيغ المنطقية، حيث تتبادل الصـــيغ لتكون إما بديهية، أو نتيجة في الاستدلال من صيغة أو صيغتين تسمى مقدمات (S). فالبرهان وهو قائمة من صيغ أخرى، قابلة للإثبات والبرهنة. ففى حساب المحمول التقليدى هناك أثنتى عشرة صيغة بديهية. وثلاث قواعد للاستدلال يتم استخدامها. ومن كل ما سبق يمكننا القول: أن الصـيغ البديهية يتم اختيارها بالإضـافة إلى قواعد الاستدلال بحيث تكون كل صيغة مثبتة صحيحة[٢٥].

وضع "رسل" و"وايتهيد" النسق الاستنباطى في أصول الرياضيات (PM) على غرار نسق "إقليدس" البديهى، حيث يمكن تدوين مفاهيم موضـوع المنطق، والحساب، وردها إلى عدد محدد من المسلمات الصادقة وواضحة ذاتيا، وقواعد الاستنتاج من تلك المسلمات. ربما لم يكن ما يقصده رسل بـــ "المنطق" هو نفسه تمامًا مثلما جاء إلينا كـــالمنطق في أوائل القرن العشرين. لا يحتاج إلى تأويل. ومع ذلك، حاول "رسل" اتباع "فريجه" في صياغة حل لوجستيقي لتناسق علم الحساب واشتقاق قوانينه، وبذلك تتضح أهمية فكرة النسق الإستنباطى[٢٦].

يجب التفكير في اللغة باعتبارها سلسلة رمزية، أو صيغ "جيدة التكوين"، وبالتالي فإن تحديد بناء الجملة ومجموعة قواعد الاشتقاق أو الاستنباط لتحديد تسلسل الصيغ التي تشكل براهين مسموح بها، أى مجموعة القواعد المناسبة وهى ما لم يتم تحديده بعد. كان "هلبرت" قد لاحظ أن التجربة العملية للقواعد المستخدمة آنذاك تشير إلى أنها غير كافية بالفعل[٢٧].

إذ كان يأمل "هلبرت" على وجه الخصوص؛ إثبات الاتساق لكل أنساقه الصورية عن طريق الاستدلال النهائى، بحيث لايمكن لبرهانين داخل نسق واحد أن ينتهيا بزوج من الصياغات المتناقضة A و¬A[٢٨]. مؤكداً على أن العديد من الألغاز المنطقية ترتبط أرتباطا وثيقا بالرياضيات المعاصرة، الأمر الذي أدى إلى ضرورة ظهور نظرية الجهة، ونظرية البرهان، والمفهوم الحديث للكمال المنطقي، في فكره وكتاباته، حيث اعتقد إمكانية استبدال التأملات الفلسفية بالمشكلات الرياضية[٢٩].

ثانيًا– الاتساق Consistency:

بدا جليا أن طبيعة الصدق في العلوم الصورية مثل الرياضيات والمنطق إنما تستند إلى مفهوم الاتساق(*) المنطقي، أي لابد أن تكون خالية من التناقض حتى تأتي نسقيتها محكمة، وتلك الخاصية في حقيقة الأمر إن هي إلا خاصية منطقية بحتة وليست رياضية؛ إذ هو قانون محوري تأسس عليه المنطق بأسره، ومنذ اكتشاف المفارقات Paradoxes[٣٠]، أخذ المثاليون بمعيار "الاتساق" أساسًا لصدق العبارات؛ أي أن تكون العبارة على اتساق مع غيرها بحيث لا يكون ثمة تناقض فيما يقال؛ في الهندسة على سبيل المثال، تكون النظرية صواباً متي اتسقت مع سائر النظريات ومع سائر الفروض والتعريفات والمسلمات، بحيث تأتى نتيجة محتومة لما سبقها ومقدمة ضرورية لما بعدها، فإذا كان بين أجزاء البناء الهندسي مثل هذا الاتساق كان بناء صحيحًا، أما المدرسة الواقعية الجديدة التي تأخذ من العلم مبادئه ومناهجه ومدركاته الكلية، وتبدأ بالتحليل متبعة المنطق التحليلي فمعيارها في الصدق هو "التطابق" بين القول والموضوع الذي قيل فيه ذلك القول،

إذ إن المعرفة بهذا الشـــيء الموجود خارج الذات تتم من خلال الكشـــف عنه وتحديد المعرفة به في عبارات، ولهذا يجب أن يكون ثمة تطابق بين الوصف والموصوف؛ مما أدى إلى ضرورة وضوح الأسلوب وتحليل العبارات لبيان خلوها من الغموض، فكانت المدرسة الوضعية المنطقية التي جاءت فرعاً من "الواقعية الجديدة"؛ ونتيجة للتحليلات المنطقية التي قام بها رســـل في كتابه "أصـــول الرياضـــيات"، "أســـس الرياضـــيات" للكشـــف عن طبيعة الرياضـــيات والمنطق بواســـطة تحليل قضاياها(٣١).

أصـبحت مشـكلة الاتسـاق(*) في الوقت الراهن محور اهتمام علماء الرياضـيات منذ ظهور الهندسـات اللاإقليدية، فبينما كانت بديهيات الهندسـة الإقليدية صـادقة موضـوعيًا، كما اعتادت المناهج الاستنباطية أن تنتقل من قضايا صادقة إلى قضايا صادقة، اعتبرت كل مبرهنة من مبرهنات الهندسة الإقليدية صادقة. وجود قضيتين متناقضتين إحداهما كاذبة، لا يمكن أن تكون مبرهنة نقيض لمبرهنة أخرى. لكن إذا ماتم قبول البديهيات باعتبارها صـــادقة، فإذا كانت القضـية ونقيضـها يمكن التعتراف بهما بوصـــفها بديهيات، من هنا فإنها تتمتع بالصـــدق الضـــرورى، وليس هناك أى ضـــمانات بأن الاستدلال لن يقودنا إلى المتناقضات(٣٢).

ظلت مشـكلة اتسـاق هندسـة "لوباتشـفسـكى" بلا حل حتى عام ١٩٦٨، حيث ظهر أن كل نموذج هندسـى ملائم لبديهيات "لوباتشـفسـكى" ومؤسـس على هندسـته، فإنه متسـق حتى وإن كانت هندسة إقليدية. هذا النمط من البرهان يعرف حاليا بروابط برهان الاتساق Relative consistency proof، ومنذ ذلك الحين ظهرت الكثير من أدلة الاتســـاق، وكان أكثرها أهمية هو دليل الاتســـاق للهندسة الإقليدية من خلال الصورية التي تزعمها "ديفيد هلبرت" لمعالجة نسق الأعداد الحقيقية(٣٣).

وربما تكون أولى محاولات إثبات برهان اساق مطلق في علم الحسـاب، تلك المحاولة التي قدمها "ديفيد هلبرت" في المؤتمر الدولى للرياضيات عام ١٩٠٤، تضمنت الأفكار الأساسية لإسهامه الخاص فى مقال"حول أسس المنطق وعلم الحسـاب"، موضـحاً الشـرط الضـرورى الذى يرتبط به

استخدام العناصر المجردة فى تقديم برهنة لعدم التناقض، والذى يرد إلى معرفة أن الصيغة ١≠١ لايمكن الحصول عليها من خلال الأكسيوماتيك داخل النسق[٣٤].

اعتمد "هلبرت" على فكرة ربط الأعداد الترتيبية بأنماط المتغيرات وتعريف الدوال الحسابية، فنشأ توازن بينهما، وقام برهانه على الجمع بين النظرية الكانتورية للمجموعات[*] والصورية، حيث منهج ماوراء الرياضيات، معبرًا عن رغبته فى الحصول على برهنة على فرضية المتصل التى قال عنها بأنها الثمرة التى بها تعرف قيمة نظريته، إلا أن برهنته كانت ناقصة، غير مكتملة، رغم اجتهاده فى تأسيس برهانه على قضيتين افترض صحتهما. **القضية الأولى**: إمكانية نقض فرضية المتصل باستخدام الدوال المعرفة بواسطة الدالة المنطقية أو ما يطلق عليها أكسيوم المتناهى[*] ε، بحيث يمكن تعويض هذهة الدوال فى البرهان بدوال أخرى معرفة **والقضية الثانية**: إمكانية تعريف دالة الأعداد الطبيعية بالتراجع العددى، كما تم تكوينها من قبل. وعلى الرغم من أن تلك المحاولة قد باءت بالفشل، إلا أنه ينفى أنها قد فتحت أفاقاً جديدة للبحث أمام علماء الرياضيات[٣٥].

ثالثاً ـ مبرهنات جودل ومحاولة حل الأزمة:

انضم "جودل" إلى جماعة فيينا[**] في الثلاثينيات. وفى عام ١٩٢٥ توصل إلى وجهات النظر "الأفلاطونية"[*] بوجه عام خلال فترة تواجده بفيينا، وفى خلال الفترة مابين عامى ١٩٢٦-١٩٢٨. التزم "جودل" بمقابلة أعضائها بشكل منتظم، وبعد عدة سنوات تركها لكنه ظل على تواصل بأحد أعضائها ألا وهو "رودلف كارناب"[**]، والذى كان السبب الرئيس وراء انفصاله عن حلقة فيينا؛ لأنه قد طور وجهة نظر فلسفية خاصة به كانت في أغلب آرائها تتعارض مع وجهة نظر الوضعية[***] المنطقية"[٣٦].

صرح "جودل" بانتقاده لموقف "هلبرت" وقد قدم تصريحات قلبت الوضع رأسًا على عقب بشـأن فكرة الاتسـاق كمعيار للوجود وتتضـح هذه الفكرة في مبرهناته عن عدم الاكتمال[٣٧]، التى كادت بنتائجها أن تزلزل الفكر العلمى بأكمله، وكان لها تأثير على برنامج هلبرت[٣٨]. والذى تكمن أهميته فى توضيحه لدلالة براهين الاتساق، ومغزى البرهنة على تناسق النسق، كما أوضح معنى البرهنة على عدم التناقض، وهو ما يعتبر أصعب من البرهنة ذاتها، كما استطاع نحت وتأسيس طريقاً جديداً لعلم الرياضيات؛ هو الميتارياضيات الذى يعتمد على المنهج المتناهى. ويؤسس علم الحساب وقضاياه على الإشارات والرموز، ووضع الأكسيوماتيك الضرورى فى مكانه المناسب فى النسق، مما يتيح إمكانية البرهنة على القضية وتحديد قيمة صدقها بعد سلسلة من التضمنات، وهذا الحكم التقريرى هو ما حاول "جودل" دحضه.

يمكن القول بأن برنامج "هلبرت" بتصـوراته قد بدا محكومًا عليه من قبل "جودل" في مبرهنته الثانية. حيث أكد جودل في عبارته التي نقلت عنه. يمكن للمرء أن يتكهن أنه قد تأثر بأراء هلبرت في بادئ الأمر، فأتت أفكاره امتدادًا لتصورات هلبرت الأساسية ومع ذلك، فإن جودل لم يشر بعد ذلك إلى أي المناهج المادية التي لا يمكن التعبير عن كيفية صوريتها للنسقP[٣٩].

I. مبرهنات جودل:

انطلق جودل فى تأسيس مبرهناته من إدراكه لمغزى النسق الصورى المكون من أكسيومات بيانو بالنسبة لعلم الحساب، ومن النسق الراسلى لبرنكيبيا ماثيماتيكا بالنسبة للمنطق، الأمر، الذى جعله يتساءل هل تعد كل صيغة صحيحة قابلة للبرهان؟ كان مثل هذا التساؤل هو ما حاول جودل الإجابة عنه، ففى عام ١٩٣٠ بدأ قائلا: "لكل صيغة منطقية A من الشكل الأول لحساب المحمول، إما أن تكون A مثبتة ومبرهنة عليها، أو A ليست صادقة في نطاق { 0، 1، 2، ....} للأعداد الطبيعية، وبناء على ذلك، إذا كانت A صادقة، فإنه يتم استبعاد البديل الثانى عند جودل وتصبح A مبرهنة، وتمثل هذه إجابات كل من هلبرت وأكرمان للسؤال بشكل إيجابى[٤٠].

يوضح جودل أن بعض الصيغ يتم إداركها باعتبارها بديهيات منطقية، ويقدم على سبيل المثال؛ الصيغ الآتية:

$$(1)\ A\rightarrow (B\rightarrow A).$$

$$(2)\ \forall x\ A(x) \rightarrow A\ (a).$$

حيث تعبر كل من A، B، A(x) عن صيغ .

وتشـــير كل من x،a إلى أى متغيرات، وتصـــبح الصـــيغة A(a) نتيجة لتعويض المتغير a للمتغير x في الصيغة A(x)[٤١].

من الأفضل استعمال الصيغ $\forall x\ A(x)$ لأنها واضحة بذاتها على أنها تحتوى على المتغير الحر x

أما إذا كتبت A x A(x) فيجب تحديد أن A تحتوى على متغير حر.

وبالإضـــافة إلى ذلك، فإن النتيجة التي تترتب على التعويض عن المتغير a في الصـــيغة A(a). تكون حرة، بديهية.

$$\forall x\ \exists\ b\ Q(b, x) \rightarrow \exists\ b\ Q\ (b,a)$$

تصبح بديهية للصيغة:

$$\forall\ x\ A(x) \rightarrow A\ (a)$$

ولكن الصيغة التى لا تعتبر بديهية $\forall x\ \exists a\ Q\ (a,x) \rightarrow \exists a\ Q\ (a,a)$

إذ إن الصيغة البديهية تم اختيارها ولذلك كل بديهية تعد صحيحة[٤٢].

ثانيا: وبالتالى يمكن اســتنتاج قواعد الاســتدلال، من الصــيغ الواردة أعلى الخط ويطلق عليها مقدمات، والصيغ أسفل الخط يطلق عليها نتيجة على سبيل المثال:

$$\frac{A,\quad A\rightarrow B}{B} \qquad \frac{C \rightarrow A(x)}{C \rightarrow \exists x A(x)}$$

حيث تصبح كل من الـــ A، B،A(x) صيغ منطقية، تكون فيها (x) متغيرا. بينما لا تحتوى الصيغة C على المتغير a، ومن ثم يمكن اختيار قواعد الأستدلال موضحة مهمة نطاق غير الفارغ لـ D صدق المقدمات يؤدى إلى صدق النتيجة، وطبقا لذلك؛ فإنه إذا كانت المقدمات صادقة فإن النتيجة تصبح بالتالى صادقة(٤٣).

يبرهن الرياضى على صدق الصيغة من خلال إعتماده على صيغ أخرى، بعد إجراء بعض التغيرات وفقا لقواعد الأكسيومات والاستنباط التى وضعها قبلياً، وفى حساب القضايا التي تنظر للقضية كوحدة شاملة، يسمح بالبرهنة على الصيغة ككل، في حينتأتى أهمية حساب المحمول للبرهنة على الموضوع وبعض العناصر حسب القضية، فينفذ إلى البناء الداخلى للقضية، ويعبر عن هذا البناء بلغة رمزية متكاملة. ويتكون الجانب المورفولوجى للنسق من عنصرين أساسيين هما: الرموز وقواعد التركيب؛ ويمكن حصرهما كالتالى(٤٤) :

(١) الرموز من :

- قائمة الروابط المنطقية الخاصة بحساب القضايا (الثوابت المنطقية).
- قائمة غير محددة من المتغيرات الفردية ......x,y,z.
- قائمة غيرمحددة من المتغيرات الحملية: ..... ,f, g, h
- رمز السور الكلى: $\forall$.
- رمز السور الجزئي: $\exists$ وأحيانا يستعمل ! $\exists$ ويعنى يوجد واحد وواحد فقط .

(٢) قواعد التركيب التى تسمح بتكوين صيغ تركيبية جيدة التكوين:

التركيبات : p(y), Q (x,y) , P

- (x) ....صيغ
- إذا كانت A ، B صيغتين إذًا :(A-)، AvB هى أيضا صيغ.

– إذا كانت A صيغة، وx متغير، فإن $\forall x$ وA وأيضا $\exists x$ وA هى صيغ.

ويفضـــل اســـتخدام $\forall x,A(x)$ لوضـــوحها بدلا من A $A(x)$ التى يجب فيها تحديد أن A تحتوى على المتغير الحر x .

أخضـــع جودل للفحص جميع أنســـاق التعاريف الرياضـــية، وأثبت في عام ١٩٣١ أن ما من نسـق من هذه الأنســاق يحتوى في ذاته على دليل صــلابته. وبدأ من صــياغة منطقية لبنية الحســاب (وهى ما أطلق عليها مصـــطلح الميتارياضـــيات) برهن فيها على أنه: يســـتحيل إثبات عدم تناقض الحســاب، حيث يتضــمن منطوقات غير بينة، أى يمتنع إثبات كونها قابلة للبرهان أو للدحض. ونظرًا لأن هذه النتائج تنطبق على جميع الأنساق الرياضية المتقدمة، فإن نظريته ترسم علامة استفهام وشك حول الأنســاق المنطقية والصــورية لديفيد هلبرت وبرتراندرسل. وجمعت مقالاته في مجلدين صــدرا عن جامعة أكسفورد في الفترة ما بين عامى ١٩٨٦ و١٩٩٠[٤٥].

يبدو أن مناهج جودل الصـــورية، التى وظفت وتجســـدت في عام (١٩٣١)، قد خدمت هدفها في ضــمان قبول نتائجه من قبل كبار رواد النزعة الصــورية. لكن في الوقت نفســه، حتى أولئك الذين قدّروا قيمة الصورية. أثارت مواصفات نسق جودل الدقيقة P شكوكًا بشأن عمومية استنتاجاته. وعلى صعيد آخر، فإن معارضى الأنساق الصورية يمكن أن يشيروا إلى نتائج جودل على أنها سبب لرفض مثل هذه الأنساق تمامًا[٤٦].

إذ اســـتطاع "جودل" بأدلته تحطيم آمال الصـــوريين، لكن هذه الأدلة في الوقت نفســـه كانت أكثر إقناعًا لأولئك الملتزمين بالمُثُل الصــورية. وفي الأوســاط الأخرى، لم يكن هناك قبول لمبرهنات عدم الاكتمال بأي حال من الأحوال؛ حيث أثيرت الاعتراضـــات لعدة أســـباب فنية وفلســـفية. ســـادت بشـكل خاص الآراء التي تفيد بأن نتائج جودل كانت مضــادة للسـقوط أو كانت ذات عمومية محدودة. غالبًا ما كان يُنظر إلى القيود الأسـاسـية، على وجه الخصـوص، على أنها مسـؤولة عن ظاهرة الريبة undecidability[٤٧] وعدم التأكد.

لقد نجح جودل حيث فشل الآخرون بسبب اهتمامه بتمييز التركيب النحوي والدلالي، وإعادة بناء أنساق صورية محددة، واهتمامه بعدم التأكد النسبي وليس المطلق. لقد توقع مقاومة استنتاجاته وبذل جهداً لتقليل الاعتراضات بأسلوبه في العرض وتجنبه لمفهوم الصدق الرياضي الموضوعي، وعلى الرغم من إدراكه لانتقادات عمله، فقد تجنب الجدل العام واعتبر نتائجه مقبولة بسهولة. ومع ذلك، فإن امتداداته اللاحقة لنتائجه تُظهر اهتمامه بتأسيس عمومتها[٤٨].

ربما كانت دراسته للفيزياء هي الأساس في تشكيل عقليته وتأثره بمبدأ اللايقين[٤٩] الذي صاغه هايزنبرج[*] عام ١٩٢٧، هو استحالة التعين الدقيق لموضع الإلكترون وسرعته في آن واحد بدقة[٥٠].

II. مبرهنة عدم الاكتمال الأولى:

استطاع العالم جودل وهو في الثالثة والعشرين من عمره؛ أن يخلق من خلال نظريته ثورة فكرية اقتلعت جذور العلوم الصورية التي رسخ مبادئها في الأذهان على مر عدة قرون، حيث قدم برهانًا غير تقليدي في المنطق الرياضي سمى بمبرهنة عدم الاكتمال[**] Godel's Completeness theorm، والتى تقرر أن كل صيغة جيدة التكوين وصحيحة في منطق من المستوي الأول تعد مبرهنة هذا النسق[٥١]. والتي تعد في الحقيقة مبرهنتين منطقيتين لعدم الاكتمال. فأتت نتائج عمله على خلاف نتائج معظم علماء الرياضيات آنذاك، إذ جاءت مبرهناته لتعبر بالأعداد والصيغ الرمزية عن أفكاره، إذ اعتقد بأن التفاصيل الدقيقة الجوهرية للبرهان لاتقهر، واضعًا للبراهين[*] إستراتيجية شاملة[٥٢].

III. الاستراتيجية الشاملة لمبرهنة عدم الاكتمال :

الصفحات الفردية العشرون لبرهان جودل الشهير مضغوطة بكثافة. هناك ٤٦ تعريفًا أوليًا. هناك أيضًا مبرهنات أولية يجب إثباتها قبل أن يتم إجراء الحدث الرئيسي: بنية قضية حسابية صادقة وغير قابل للإثبات ضمن النسق الصوري. خطوط الاستدلال في البرهان مضغوطة للغاية، وتتألف من تسلسل هرمي لمستويات الخطاب المترابطة، والأصوات المخلوطة من السيمفونية[٥٣].

أكد "جودل" على أنه من المحتمل أن تكون هناك قضـايا حسـابية صـادقة، وإن لم تكن قابلة للإثبات، إذ أثبت أنه: يمكن للمرء - بافتراض الاتساق الصوري للرياضيات الكلاسيكية - تقديم أمثلة على القضايا الصادقة وفقاً للسياق؛ ولكنها غير قابلة للإثبات في النسق الصورى. وهو البرهان الذي ذاع شـهرته وأطلق عليه "برهان عدم الاكتمال الشـهير" والذى كان من المقرر تقديمه في عام ١٩٣٢، أنه أحد الأجزاء المذهلة للاسـتدلال الرياضـي الذي تم إنتاجه على الإطلاق، في بسـاطة إسـتراتيجيه الرئيسـية وفي تعقيد تفاصـيله، الترجمة الشـاقة لماوراء الرياضـيات إلى رياضـيات عن طريق ما يسـمى ترقيم جودل. إنه مزيج مرتب بدقة من عدة طبقات من "الأصـوات"، الرياضـيات وماوراء الرياضـيات على حد سـواء، دمج نقطة المقابلة في انسـجام موسـيقى لم يسـمع به من قبل، الأمر الذي جعل كل من إرنسـت ناجيل وجيمس ر.نيومان يصـفون برهان جودل بأنه "سـيمفونية فكرية مذهلة".[٥٤]

ويمكن حصر إستراتيجية مبرهنة "جودل" في عدة خطوات كالتالى[٥٥]:

الخطوة الأولى: وضع نسق صوري.

الخطوة الثانية: ترقيم جودل.

الخطوة الثالثة: إنشاء قضية تكون صادقة؛ لأنها تذهب إلى القول بأنها غير قابلة للإثبات.

الخطوة الأولى- وضع نسق صورى:

يبدأ "جودل" برهانه من خلال وضع نسقه الصوري، الذي يتكون، كما هو الحال في جميع الأنساق الصـورية، من أبجدية الرموز، وقواعد لتركيب هذه الرموز في البرهان، ومجموعة خاصـة تسـمى "البديهيات"، وجهاز استنباطي لاشتقاق المبرهنات (كـــ "نتيجة منطقية") من براهين أخرى والتي يجب أن تكون إما بديهيات أو نتائج من بديهيات.

في معظم أنساق المنطق الصوري، توجد رموز للروابط المنطقية "و" للوصل و"أو" (للفصل)، وكذلك للتعبيرات "إذا ... فإن..." (للتضمن المادى) و"... إذا وفقط إذا ..". إذ إن هناك أيضًا رموزًا تعبر عن مفاهيم الأسوار "كل" و" بعض". بالإضافة إلى وجود أقل عدد ممكن من الرموز الأساسية. حيث يمكن تحديد الوصل عن طريق سلب الفصل، حيث إن القضية المركبة "p and *q*" تعني نفس الشيء حيث "ليست الحالة إن p كاذبة أو q كاذبة."

بعد ذلك، يمكننا أن نتخلص من خطوة واحدة إلى الأمام، حيث يمكن تعريف التضمن بسلب الفص، حيث إن "إذا كان p فإن q" تعني نفس الشيء "not (p or q)"، إذ يمكن أيضًا التعويض عن مفهوم السور الجزئي "بعض"، باستخدام مفهوم "كل"؛ لأن "هناك بعض x's التي هي F" وهي نفس "all x's are not f" بعد عمليات الاستبعاد، تظل هناك تسعة مفاهيم أولية، وما يناظرها من رموز، للتعبير عن الحساب في نسق صورى[٥٦].

ويلاحظ أن: تحديد رموز النسق الصورى P الخاص به، وبديهياته وقواعد استنتاجه. قد استمدها من نسق برنكيبيا وايتهد ورسل عن طريق تطبيق منهجية الأنماط، مع أخذ الأعداد الطبيعية نمطًا أوليًا، وإضافة "بديهيات بيانو" بحيث يتم استخدام متغير نمط ثانٍ، والتى يتم الحصول عليها عن طريق تراكيب نظرية الأنماط البسيطة على بديهيات؛ للحصول على الأرقام الطبيعية التي يتم أخذها كأدنى نمط.

تعهد جودل بـــ "رسم الفكرة الرئيسة لأولى مبرهنات عدم الاكتمال"، دون ادعاء الدقة. وهذا يتوافق مع المخطط الأولي؛ لكنه يرسم بالفعل بنية تركيب الصيغة A" في النسق S"، وتعتبر الرموز S و"A" هنا رموزًا مستمدة من البرنكيبيا "PM" وكذلك العلاقة "[R (q , ~q)". وفيها يمكن تأويل النسق بإضفاء الطابع الصورى على نسق المفاهيم والقضايا عندما تحدث عن بنية تركيب الصيغة A أو العلاقة [R (q , ~q) التي يجب أن تعبر عن عدم قابليتها للبرهنة، وافترض أن الصيغ الصحيحة هي فقط التي يمكن برهنتها في النسق S أوفى PM. يريد المرء أن يكون الأمر كذلك، إلى الحد الذي يمكن فيه أن تكون الصيغ ذات معنى واضح. لكن التصور غير الصورى للصدق لم يكن مقبولًا بشكل شائع باعتباره فكرة رياضية محددة، خاصة بالنسبة لأنساق مثل البرنكيبيا PM أو نظرية زرميلو[*] Zermelo-Fraenkel[٥٧].

للبرهنة على الإشكالية الأولى من قانونه كوَّن جودل قضية منP تسمى صيغة مغلقة ويرمز لها بالرمز G، تترجم حسابياً القضية الميتارياضية ولهذا فهى غير قابلة للبرهنة .

على الرغم من صعوبة تفاصيل البرهان، إلا أن الإستراتيجية الكلية امتازت بالبساطة في حد ذاتها. كما تتسم بالغرابة لاقتراب الدليل من حافة التناقض الذاتي، مما يثبت أن هناك قضايا حسابية صادقة لا يمكن إثباتها. ويعد من أغرب الأشياء التي تتعلق بالإثبات هي أنه يستخدم في تحديد بنية الاستدلال، المفارقات الدلالية الذاتية، لإعادة تشكيل البنية التركيبية إلى غايتها الخاصة.

ويمكن فهم الإستراتيجية العامة للبرهان بالنظر إلى صيغة جودلG التي تنص على: "أننى غير قابلة للأثبات"، والتى جسدت إحدى النقائض اللغوية[*] Semantic Antinomies، فى سياق أقدم مفارقة[**]، معروفة على الإطلاق، يمكننا أن ننقل جوهر الإثبات بطريقة مبسطة وسهلة. فهذه العبارة، في حد ذاتها، ليست متناقضة، وإنما صادقة إذا كانت وفقط إذا كانت كاذبة. وهذا الموقف يناظر إستراتيجية مبرهنة جودل لعدم التناقض، حيث لا يمكن إثبات القضية G داخل هذا النسق ،على عكس تناظرها، ليست متناقضة، على الرغم من أنها مثل كل القضايا الدلالية الذاتية، غريبة إلى حد ما[٥٨]. وكانت تعويضات جودل وإحلاله عبارة "غير قابلة للإثبات" محل "كاذبة" للهروب من المتناقضات، إلا أن القضية ونفيها يمكن اعتبارهما غير قابلتين للإثبات (بينما لايمكن أن يكون كلاهما كاذبًا)[٥٩].

يكمن الفرق بين قضية جودل التى يحاول البرهنة عليها، وبين القضية المناقضة فى مفارقة الكذاب التى تؤكد بنفسها أنها غير صادقة فى تغيير الصدق بالقابلية للبرهان[٦٠].

إذا كانت G قابلًا للإثبات، فإن نفيها سيكون صادقًا. ولكن إذا كان نفيها صادقا، فإن القضية نفسها كاذبة. ولهذا إذا كانت القضية G قابلة للإثبات فإنها كاذبة. ولكن إذا كانت G قابلة للإثبات وصادقة أيضًا. بعد كل شيء فما الذي يقدمه الدليل؟ مع افتراض اتساق النسق (حيث يمكن إثبات كل القضايا في نسق غير متسق). حيث لا يمكن البرهنة على صدق القضية ونقيضها في نسق يتسم بالاتساق، ومن ثم إذا كانت القضية ونفيها قابلتين للإثبات،- ويعد ذلك تناقضًا - مما يعني أن G غير قابلة للإثبات.

وبالتالي، إذا كان النسق متسقًا، فلن تكون G مثبتَّة فيه. ولكن هذا هو بالضبط ما تقوله G: إنها غير قابلة للإثبات. ومن ثم فهى G صادقة. ولذلك، فإن G تكون غير قابلة للإثبات وصادقة معا، وهو بالتحديد الاستنتاج الشهير لبرهان جودل، أن هناك قضية صادقة لكنها غير قابلة للإثبات يمكن التعبير عنها في النسق إذا ما كان هذا النسق متسقًا.

ولأن G لها أيضًا المعنى الحسابي المباشر والذي بالطبع يعد صحيحًا إذا كان G صحيحًا (لأنه G)؛ فإن برهان جودل يوضح أن هناك حقائق حسابية لا يمكن إثباتها في النسق الصورى، على افتراض اتساق النسق. فإن النسق الصورى إما أن يكون غير متسق النظام أو غير مكتمل.

يوضح البرهان: أننا يجب أن نحاول معالجة عدم الاكتمال من خلال إضافة G بشكل صريح كبديهية، ومن ثم إنشاء نسق صوري جديد موسع، ثم يمكن بناء نظير لـ هذه الصيغة ضمن هذا النسق الموسع الذي يكون صحيحًا ولكنه غير قابل للإثبات في النسق الموسع. الخلاصة: هناك تقريرات غير قابلة للإثبات، لكنها مع ذلك صادقة، قضايا في أي نسق صورى يحتوي على حساب أولي، على افتراض أن هذا النسق متسق. النسق الذي يصل إلى الحد الذي يمكنه أن يحتوى على علم الحساب لا يمكن أن يكون متسقاً ومكتملًا في آن واحد. وهذه هي الإستراتيجية الشاملة. بمعنى ما (بمجرد أن يستوعب المرء الفكرة الغريبة لقضية واحدة يمكنها التحدث في وقت واحد عن نفسها وعن الحساب)[٦١].

الخطوة الثانية - ترقيم جودل Godel Numbering:

والخطوة التالية فى البرهان هي ابتكار منهج آلى لتخصيص رقم فريد لكل قضية من النسق. يبدأ ترقيم جودل بتعيين رقم لكل رمز من الحروف الأبجدية، كل صيغة، كل برهان، من خلال تعيين هذه الأرقام يتم تحقيق مزج الأصوات، مع العبارات الحسابية التي تصدر أيضًا عبارات ماوراء الرياضيات، وبمجرد أن يتم اكتمال ترقيمه مع قواعد تعيين الأرقام إلى تسلسل قضايا براهين الميتارياضية. بالإضافة إلى القدرة على تحليل بنية العلاقات بين القضايا بواسطة تحليل العلاقات الحسابية المجردة وما يناظرها من أرقام، سوف يتم دمج نوعين مختلفين من الأوصاف: الأوصاف

الحســـابية، التي تحدد العلاقات بين الأرقام التي يمكن التعبير عنها في النســق الصــوري؛ وماوراء الأوصاف ويقصد بها العلاقات المنطقية القائمة بين القضايا في النسق. وهى ماوراء العبارات، والتي هي البنية التركيبية البحتة للعبارة، وقواعد بنية تركيب النسق الصورى[٦٢].

تسـمح فكرة الترقيم والتى هي في الأسـاس فكرة الترميز، بالانتقال ذهاباً وإياباً بين القضــايا الأصــلية والرمز. مع ضــرورة التأكد من أن نفس الرقم لن يتم تعيينه لموضــوعات مختلفة، لكل من الصــيغة وكذلك لسـلسـلة من البرهان. تقدم قواعد الترميز خوارزمية للحصــول على أي صــيغة، أو تسلسل وتعاقب للبراهين، لترقيم جودل الفريد. هناك أيضًا خوارزمية للعملية المرتدة: بالنظر إلى أي ترقيم من ترقيمات جودل المعطى، يمكننا أن نكتشـف بشـكل فعال أي موضـوع صـورى في النسـق الذي يمثله. يجب أن يراعى ترقيم جودل شـرطًا واحدًا آخر؛ هو ترجمة الأوصـاف النحوية للعلاقات المنطقية[٦٣].

وتتجلى حقيقة أهمية منطق العلاقات والذى يعد هو الركيزة الأساسية والجوهرية فى التعبير عن الحقائق الرياضـية تعبيرًا صـحيحًا من الناحية النظرية، وهذا ما أدركه "بيرس" Pierce[*] حيث اعتبرا أن العلاقة أساسا فصل أزواج، وربما يرجع ذلك كما يرى "رسل" إلى خطأ فلسفى؛ إذ جرت العادة دائما على اعتبار قضايا العلاقات أقل فى إطلاقها من فصول القضايا، واختلاط القضية الحملية بفصل القضايا، مما أدى إلى اعتبار العلاقات نوعًا من الفصول، واقتضى ذلك استخدام قوانين معقدة للجمع عند محاولة البحث فى العلاقات الفردية، هذا بالإضـــافة إلى أنهما ســـارا على نهج بول، فجاء عرضـــهما للعلاقات صـــعبا معقدا، مما اســـتحال معه التطبيق العملى، وبذلك يمكن القول أن منطق العلاقات أوثق صلة بالرياضيات من منطق الفصول أو القضايا[٦٤].

وشكلت دراسة العلاقات أهم أجزاء المنطق الحديث، إذ إن الاستنباط بأكمله إنما يقوم على الخواص المنطقية للعلاقات وبالتالى يكون لمفهوم العلاقة أهمية أساسية[٦٥].

بينما حصر هلبرت الميتارياضيات فى البراهين المتناهية التى تستلزم رياضيات اللامتناهى، دون تحديد خصائص هذه البراهين، فقد وضع جودل أرقاماً كودية للميتارياضيات فى علم الحساب،

باستخدام لغة الأعداد للربط بين كل من الجهاز الرمزى والأعداد الطبيعية، مما يعد ذلك بمثابة ميلاد جديد لتفكير الرياضيات فى ذاتها، إنها عبارة عن إضفاء الجانب الحسي لقابلية البرهنة(٦٦).

من خلال "نظام الترميز الكودى"، يمكن تقديم G بمفهوم حسابي، مما يجعلها أيضًا عبارة حسابية. وجد جودل طريقة بارعة لجعل اللغة الحسابية تتحدث عن صوريتها. إن نتيجة هذه التقنية هي أن العبارة G تقوم في وقت واحد بإصدار عبارتين مختلفتين، تقرر المطلب الحسابي وأيضًا عدم قابليتها للإثبات. بعبارة أخرى، ما يجب على G أن تقوله، بالإضافة إلى محتواها الحسابي المباشر وهو: G قابلة للإثبات في النسق إذا وفقط إذا كان نفيها قابًاة للإثبات.

أظهر جودل في الواقع كيفية بناء قضية صادقة ولكنها غير قابلة للإثبات، ليس للنسق الصورى لعلم الحساب فحسب وإنما لأي نسق صورى يحتوى على حساب. لذا، وإذا ما حاولنا أن نحيد طريقنا عن مبرهنة جودل لعدم الاكتمال الأولى من خلال بناء نسق صورى جديد ألحق به القضية G باعتبارها بديهية، فيمكن بناء قضية إشكالية جديدة لهذا النسق. وهكذا إلى مالا نهاية، بحيث يمكن إثبات أنه في أى نسق صوري يحتوى على حساب أولى توجد قضايا غير قابلة للإثبات ولكنها مع ذلك صادق. وهذه هي مبرهنة جودل الأولى لعدم الاكتمال(٦٧).

أظهر جودل أن نظرية الأعداد الأولية إما أن تكون غير متسقة أو غير مكتملة. متسائلاً "هل يمكن أن يكون هناك شك في أن ٢ + ٢ = ٤؟ أو أن حاصل ضرب العدد ٢٧ و٣٧ هو الناتج ٩٩٨؟ ما الذي يجري هنا؟إن التفكير الناضج يقنع المرء أن ما يجري إن هو إلا خدعة منطقية. في حديث جودل الأكثر إقناعا، استطاع الخداع بجملة معينة G لتقول عن نفسها إنها غير قابلة للإثبات. نعلم جميعًا إلي أين ستؤدى تلك القصة، على الأقل بشكل حدسي. إذا كانت G كاذبة، ومن ثم يمكن إثباتها مما يؤدي إلى تناقض في النهاية. لذا كان من الأفضل أن تكون G صادقة. وبما أنه يمكن تنفيذ هذا المنطق في أي نسق قوي ومتسق ومتماسك S، فإن الجانب اللغوى والدلالى يزعم أن النسق S غير مكتمل، ويحتوي على صدق غير قابل للإثبات (**مبرهنة جودل الأولى**)، يفتقر النسق إلى مدلولات البرهان الصورى لاتساقه الذاتى (**مبرهنة جودل الثانية**)(٦٨).

ويمكن حصره في الآتى :

١- توجد صيغة صحيحة جيدة التكوين لنسق متسق، لكنها غير قابلة للبرهنة داخل هذا النسق.

٢- مع التسليم بوجود نسق متسق؛ فإنه لايمكن وجود برهان لاتساق هذا النسق من داخله[٦٩].

ففي ضوء قاعدة إثبات التالى modus ponens، إذا استطعنا إثبات اتساق النسق، أمكننا أن نثبت أيضًا أنه توجد صيغة صادقة ولكن غير قابلة للبرهنة. ومحاولة إثبات التالى فإن ذلك ينطوى على مخاطرة التسليم باحتواء الجزء للكل، وهو ما يعد مستحيلاً وفق قاعدة إثبات التالى والتي تعد إحدى قواعد الاستدلال التي تمتاز بالبداهة ،إذ التسليم بقضية لزوم فإن إثبات المقدم؛ يلزم عنه التسليم بالتالى[٧٠].

ومن خلال العرض السابق نلاحظ ما أسسه جودل " للترقيم"، وفيه يتم تعيين عدد طبيعى لكل عنصر من عناصر نسقه الصورى $\mathbf{2^{n1}}$, $\mathbf{3^{n2}}$,……., $\mathbf{pk^{nk}}$، حيث **pk** هو العدد الأولى المتغير وفقاً للعدد الذى يتم التعويض به عنK ، وبالتالي، فإذا كان ترتيب ترقيم جودل؛ $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$,………..,$\mathbf{n_k}$ هي بالفعل أعداد للمتسلسلات والمتواليات المحددة للرموز الأولية , $\mathbf{2^{n1}}$, $\mathbf{3^{n2}}$,……., $\mathbf{pk^{nk}}$. وبهذا فقد أقام جودل ترقيمًا يناظر فيه بين مفاهيم النسق الصورى؛ مثل "الصيغة" و"الإثبات"، بطريقة متعددة ومختلف العمليات والعلاقات التي نشأت فيما يتعلق بالنسق. وتحقيقا لهذه الغاية، يأخذ جودل خطوة أساسية في الواقع، يتم الكشف عنها في حسابه[٧١].

الخطوة الثالثة - إنشاء قضية تكون صادقة لأنها تذهب إلى القول بأنها غير قابلة للإثبات:

تعتمد هذه الخطوة على فهم محتوى قانون جودل، لتوضيح هذه النقطة، على أسس جودل وبافتراض معيار الترميز الذي يعين لكل صيغة A رقمًا طبيعيًا فريدًا. وبافتراض أن هذا الترميز هو تخطيط فعال من الصيغ إلى الأعداد الطبيعية، والحصول على استخدام الصيغة A^1 تقديم هذا الترقيم N، يكون فئة كل الأعداد الطبيعية؛ وبأخذ النسق الصوري S بشكل مجرد، بحيث يتم التطابق فيه بين الأعداد الطبيعية وما يناظرها من ترقيم داخل النسق[٧٢].

أضـــفى الجانب الســـيمانطيقى والدلالى على المبرهنة الأولى أهمية في تـأويل نظرية الأعداد(*)، وأتت أهميتها من حقيقة أن الصـيغة غير القابلة للإثبات، ذات بنية تركيبية خاصــة، وهذا الشكل بالتحديد للصياغة الصورية للمبرهنة تقرر وجود قضية صادقة فى علم الحساب غير قابلة للبرهان. وبذلك قادت إلى برهان المبرهنة الثانية، وقدمت كل من **براهين** المبرهنة الأولى والثانية معًا رسمًا للنسق S.

والذى يعد النمط الأول للحساب. وقد أثبت جودل نظير هذه المبرهنات للنسق غاية في القوة، إنما يتمثل في نسق البرنكيبيا P والذى يتضمن نظرية الأنماط(*) وبالتالى كانت نتائجه أعظم قدرة من نتائج مبرهناته الأولى والثانية. ومع ذلك أثبت جودل أن النسق P، والنسق الممتد P من خلال إضافة الاتساق -W لإثبات فصل من البديهيات؛ يحتوى على صيغة غير قابلة للإثبات من قضايا الحساب من النمط الأول. هذه الأنساق القوية لاتستطيع إثبات كل قضاياها(٧٣).

ومع ذلك، نلحظ وجود تشـــابه بين الحجج؛ ســـواء إن تم تطبيقها في النســـق S أو P، ولهذا السبب ذاته يمكن استخدام النسق S في أى نسق(٧٤).

"في أى نسق صورى كاف لنظرية العدد هناك صيغة غير قابلة للإثبات، هذه الصيغة غير قابلة للبرهنة ونفيها غير مبرهنة أيضا"(*).

لقد أثبت برهان جودل أن مسلمات نظرية الأعداد ليست تامة، أي أن هناك قضايا فيما يتعلق بالأعداد الطبيعية لا يمكن إثباتها انطلاقًا من تلك المسلمات وعدم اكتمال الأنساق الصورية؛ والتي تفترض الصياغة الصورية(*) لعلم حساب الأعداد الطبيعية. وقد برهن أن مثل تلك الأنساق إنما تحتوى على قضايا داخل إطارها مما لايمكن البرهنة عليها ولايمكن رفضها على السواء. وبلغ البحث ذروته في الاستنباط الفلسفى الأساسى القائل: بأن الصياغة الصورية بطريقة كاملة للمعرفة العلمية مستحيلة(٧٥).

إن افتراض صحة ما أدلى به جودل: "بأنه لاتوجد صيغة A(x) ومتغيرات العدد الطبيعى x هناك براهين في النسق الصورى S لكل القضايا (الصيغ A(٠)، A(١)، A(٢)، A(x)... وأيضا لـ نفى الصيغة $\forall x \neg A(x)$.

وقد أطلق على هذا الافتراض مسمى w-consistency الاتساق، ويقصد به، ليس هناك صيغةA تبرهن على كل من A ونقيضها A ¬.وبتطبيق الاتساق –w على الصيغة $\forall$ x A، حيث x متغير حر في القضية A، وتتضمن الاتساق –w ، بساطة الاتساق. ويمكن إعادة صياغة مبرهنة جودل بالمصطلحات:

إذا كانت S متسقة معW فإنها تكون غير مكتملة

IF S is w-consistent it is (simply) incomplete

أى إذا كان النسق الصورى S متسقًا w، فإنه غير مكتمل. حيث توجد به صيغة مغلقة G بحيث لايمكن إثبات صحتها وصحة نقيضها -G ¬ ولكن G صادقة .فكيف يمكن حدوث ذلك؟

توجد حقيقة أساسية مؤداها، أن في داخل "النسق الصورى" جزءًا من تأويلاته هو أن الموضوعات التي نتعامل معها مثل الرموز وأشكالها، محددة ونهائية، أو أنها مجموعات لانهائية، فإن التسلسل النهائى للرموز، والتسلسل النهائى لمثل تلك الصيغ وللمجموعات اللانهائية للموضوعات اللغوية Linguistic objects من خلال اقترانهم واحد – لـــ واحد مع الأعداد الطبيعية، أو باستخدام منهج آخر لربطهم بالأعداد الطبيعية، كما فعل جودل .. حيث أعاد تقديم كل عناصر النسق الصورى بواسطة أرقام، وهو ما يسمى "ترقيم جودل Gödel number[٧٦].

لقد أصبح النسق الصورى S كافيًا لجزء محدد للنظرية الابتدائية للأعداد الطبيعية، يمكننا التعبير في قضايا النسق الصورى S بواسطة ترقيم جودل والتي تقول شيئًا عن طبيعة النسق S نفسه. وتوضح كيف استطاع جودل بعبقريته بناء وتركيب القضية G؛ لتكون في صورة $\forall x A(x)$ حيث تعبرA(x)، "x ليست من ترقيم جودل للبرهان عن الصيغة مع عدد جودل ثابت محدد P" وP ترقيم

جودل للصيغة G نفسها!. وهكذا فإن G تعنى "غير قابلة للإثبات Unprovable"، كما تعنى أن "كل x ليس ترقيم جودل للبرهان". ولذلك، إذا كانت G مثبتة، فإن G سوف تكون كاذبة (بافتراض الصحة)، ولكن G غير قابلة للإثبات، ومن ثم (وطبقاً لنص ما تقوله G) فإنها صادقة؛ وبالتالى (على أفتراض الصحة) فإن نقيضها G¬ أيضا غير قابلة للإثبات. ومن السهولة تحديد أن الاتساق-w يكفى كافتراض الصواب في استنتاج أن نفيها G¬ غير قابل للأثبات، والاتساق في النهاية أن G غير قابلة للأثبات[٧٧].

فسنجد أن الأعداد ليس لها كيان؛ لأنها حين تطبق على عدد اأنعكاسى تعنى أنه، إذا علم فصل له n من الحدود، كان هذا الفصل "شبيها" بالفصل الذى نحصل عليه بإضافة حد آخر. إذا أرتقينا سلم الأنماط إلى الدرجة التى تضمن وجود فصل له n من الحدود, عندئذ فإن هذا الفصل "شبيه" بفصل له n+ 1 من الحدود[٧٨].

أظهر جودل عام ١٩٣١ أن هذا ليس هو الحال عندما تؤخذ نظرية الأعداد الأولية المعتادة كنطاق، مع أي من الأنساق الصورية المختلفة التي تتبادر إلى الذهن لإضفاء الطابع الصورى عليها، هناك قضية A لنظرية الأعداد الأولية والتي لا يمكن تقريرها صوريًا في النسق S، أي أن لايمكن البرهنة على الصيغة A أو نقيضها A - في داخل النسق S[٧٩].

استخدم جودل ترقيم نظرية العلاقات $(x_1, \dots \dots, x_n)$ ، الذى استمده من مصطلحات كلاين عام ١٩٥٢، والذى يمكن التعبير عنه رقمياً"numeralwise expressibility" في النسق p بالصيغة الآتية: $R (X_1, \dots \dots , X_n)$ مستخدمًا الرموز $X_n ,\dots \dots, {}_1$ متغيرات حرة. والقول معبرًا رقميًا $(x_1, \dots \dots, x_n)$ فى النسق لكل متغير $x_1, \dots \dots, x_n$.

بحيث يصبح الإثبات قابلًا للبرهنة في النسق

$$R (x_1, \dots \dots, x_n) \to \{ R (x_1, \dots \dots, x_n) \textit{ is provable in } p \}$$

ويصبح النفى قابل للبرهنة .

$$R (x_1, \dots \dots, x_n) \to \{ \sim R (x_1, \dots \dots, x_n) \textit{ is provable in } p \}$$

بينما Ŕ يتم قراءتها Not R، ليســـت R، وهنا لا نتبع مفاهيم مصـــطلحات جودل، وإنما تســـتخدم $1, \dots \dots, x_n$ للـدلالـة على التعبير الرقمي للأعـداد الطبيعيـة $1, \dots \dots, x_n$ في النســـقp، وهكذا فإن $1\ ff^0\ x_1\ f,s$ ، و$R\ (x_1, \dots \dots, x_n)$، **هى نتيجة** إحلال تال للمتغيرات $x_1, \dots \dots, x_n$ لســلســـلة المتغيرات المتتالية $X_1, \dots X_n$ في العلاقة $R\ (X_1, \dots \dots, X_n)$. مع ضرورة التمييز في المصطلحات بين نمط الحروف الرومانية والتي تستخدم في تسمية الموضوعات الصـــورية، ماعدا نمط الحروف المائلة العريضـــة x؛ التي تســـتخدم لترقيم الأعداد الطبيعية x وبين الحروف المائلة التي تسـتخدم في الكينونات في نظرية الأعداد غير الصـورية (ماعدا الحرف f الذي يستخدم للرمز التالي، والرمز المائل E في صور القضية الوجودية (Ex)[٨٠].

تتركب المتسـلسـلات التى تظهر فى علم الحســاب، من حدود- أعداد صـحيحة، منطقات، أعداد حقيقية، فكل عدد حقيقي مركب من عناصر، وفى هذه الحالة يمكن البدء من عناصر ثم تركيب كليات لامتناهية متعددة تدريجياً هي: المجموعات، والوحدات، والأولى: قد تتطابق مع الفصـــول؛ من حيث إنها تتألف من وحدات تنتج عن جمعها أو حســـابها، على حين أن الثانية: لا يعاد تأليفها بجميع مكوناتها؛ لوجود حد واحد على الأق، إما أن يكون محمولاً أو علاقة معلقة، والمجموعة قد تكون مجموعة من الوحدات، وفى العدد يتحقق أمر التواصل[٨١].

أدخل جودل مفهوم "إمكانية التعبير عنه رقميًا "numeralwise expressibility" ومفهوم "معبراً عنه رقميًا "numeralwise expressing"، وقدم مصـطلح القابلية للحسـم "decidable" داخل النسق الصـورى P، لقول أن العلاقة $R\ (X_1, \dots \dots, X_n)$ علاقة "حاسمة" داخل النسق S، إنمـا تـدل على أن هنـاك منهجًـا فعـالًا أو خوارزميًـا لتقرير صــــدق أو كـذب لكـل قيمـة في علاقـة المتغيرات[٨٢].

توضـح تلك المبرهنة نزعة جودل للتحدث بحدود رقمية، وليسـت مباشـرة من حيث الأشـياء الصـــوريـة التي تفضـــل أن تكون أكثر قـابليـة للفهم. وبـالتـالي بـدلاً من القول بـأن الصـــيـاغـة

$(X_1, \ldots \ldots, X_n)$ بمتغيرات حرة $X_1, \ldots \ldots, X_n$ يتحدث جودل عن رمز عددى للعلاقة r بمتغيرات حرة $u_1 , u_2 ,\ldots u_n$.

وبدلا من القول بأن الصياغة $(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ قابلة للبرهنة أو الإثبات يمكن القول بقابلية ترقيم جودل للبرهنة، وهو ما قدمه في التدوين أثناء تقديمه مصطلحات يمكن قراءتها. والتى يمكن توضيحها كالآتي(٨٣):

$$" Bew[\mathrm{Sb}\ (r^{u_1 \ldots\ldots u_n}_{z_{(x_1)} \ldots\ldots z_{(x_n)}})]"$$

بحيث تصبح العلاقات $(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ تلك التي يتم تعريف بنيتها التركيبية لهذه العلاقات ويمكن معالجة الخاصية التي تجعل صيغة ما معبرة عدديًا عن علاقة محددة $R\ (X_1, \ldots \ldots, X_n)$ في ماوراء الرياضيات عند هلبرت؛ حيث يذهب للقول بإمكانية الربط بين كل الجهاز الرمزى بعلاقة تركيبية غيرصورية بطريقة محددة $R\ (x_1, \ldots \ldots, x_n)$، وهو ما يفيد تنظيم تفكيرنا الرياضي عن النسق P(٨٤).

يحتاج جودل إلى إظهار أن كل مجموعة من العلاقات النظرية محددة البنية التركيبية والتي تنشأ، من خلال ترقيمه، في دراسة النسق الصوري P والذي يمكن التعبير عنها عدديا في النسق P. هي العلاقات المحددة التي يحتاجها في نهاية المطاف، والتي تنشأ بشكل طبيعي. كان لدى جودل إستراتيجية أنتج من خلالها هذه النتائج. التي تتكون من تعريف فئة دالات الأعداد النظرية وعلاقاتها، كل منها ذات بنية تركيبية محددة، وممكن التعبير عنها عدديًا في النسق(٨٥).

IV. الخطوات التنفيذية للاستراتيجية

يمكن تسمية الخطوات التالية بمفهوم الجانب التطبيقي للاستراتيجية:

الخطوة الأولى: وفيها يعطي جودل تعريفًا دقيقًا صارمًا لفئة ترقيم الدالات الأعداد النظرية $\varnothing\ (x_1, \ldots \ldots, x_n)$. والتي أطلق عليها مصطلح "مرتدة" recursive. والتي تم استخدامها من

قبل عند ديدكند عام ١٨٨٨، وسكوليم في عام ١٩٢٣، وهلبرت عام ١٩٢٦، واكرمان عام ١٩٢٨، ويطلق عليها بعد كلاين "دالة مرتدة أولية " ‟primitive recursive“.

تعتبر العلاقة العددية النظرية $(n \geq 1)$ $R(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ **علاقة** مرتدة أولية؛ إذا وفقط إذا كانت هناك دالة مرتدة أولية $\emptyset(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ لكل المتغيرات $x_1, \ldots \ldots, x_n$

ويمكن التعبير عنها:

$$R(x_1, \ldots \ldots, x_n) \sim [\emptyset(x_1, \ldots \ldots, x_n)] = 0$$

يتم تحديد البنية التركيبية للدالات والعلاقات المرتدة أولية، وتقدم المبرهنات الثلاث بعض سمات الإغلاق المقيدة لفئة هذه الدلات والعلاقات.(٨٦)

الخطوة الثانية: يُظهر جودل قائمة تضم ٤٦ دالة وعلاقات الأعداد النظرية التي تنشأ في مناقشة نسقه P من خلال ترقيمه، موضحاً أن أول ٤٥ دالة هي دالات مرتدة أولية. يتم إنشاء القائمة بكفاءة عالية، من خلال البدء بما هو مطلوب للتعامل مع سلسلة الأعداد الأولية بشكل مرتد، والمضي خطوة بخطوة من خلال كل فكرة تركيبية.(٨٧)

الخطوة الثالثة، نص فيها جودل على أن كل علاقة مرتدة أولية يمكن التعبيرعنها عددياً في النسق الصورى. ويتم تقديم البرهان وتبسيط المبرهنة إذا تم تنفيذه خارج العلاقات $(x_1, \ldots \ldots, x_n, y)$

من الشكل $\emptyset(x_1, \ldots \ldots, x_n) = y$ التي يوجد لها صيغة $(X_1, \ldots \ldots, X_n, y)$ مع المتغيرات الحرة فقط $X_1, \ldots \ldots, X_n, y$، ويمكن تمثيل الدالة عدديًا في الصيغة

$\emptyset(x_1, \ldots \ldots, x_n) in\ p$ **ومثل المتغيرات** $_1, \ldots \ldots, x_n, y$

فإن:

$$\emptyset(x_1, \ldots, x_n) = y \rightarrow \{R\ (x_1, \ldots, x_n\ , y).(\mathrm{E!y})R(\ x_1, \ldots, x_n\ , y) \text{ is provable in P}\}$$

ما يحتاج إليه جودل بشكل أساسي لإثبات مبرهنته، هو أنه من أجل كل العلاقات المحددة البنية التركيبية $R\ (\ x_1, \ldots \ldots, x_n$، هناك صيغة $R\ (X_1, \ldots \ldots, X_n)$ التي يعبر عنها تعبيرًا رقميًا في النسق P. ولكن طريقته في الحصول على مثل هذه العلاقات $(\ x_1, \ldots \ldots, x_n\ )$ مع الصيغ المناظرة لها $(X_1, \ldots \ldots, X_n)$ **هو أمر** convenient للغاية لدرجة أنه يركز عليه.

يسمى جودل أرقام الصيغ التي تم الحصول عليها عن طريق إجراءاته المرتدة. في ضوء التغيير في المصطلحات منذ بحث جودل، تُسمى هذه الصيغ $(X_1, \ldots \ldots, X_n)$ هنا بمرتدة أولية. باستخدام التدوين الذي دخل المجال لاحقًا، أو صيغ النموذج **X Π R (X)**، والنموذج **X Π R (X)** ~ على التوالي، حيث تعنى الصيغة R(X)؛ صيغة مرتدة أولية تنتمي إلى الفئة Π والفئة Σ(٨٨).

أما، **الخطوة الرابعة:** فلقد كان جودل في وضع يسمح له بصياغة وتأسيس المبرهنة، بحدود وعبارات ماوراء الرياضيات بحتة، فكانت النتيجة الموعودة المتمثلة في "مبرهنة عدم الاكتمال الأولى": والتى تنص على أن: هناك قضية لا يمكن البرهنة على صدقها A وكذبها A ~ في النسق الصورى. نظرًا لأن النسق S "الذي أنشأ هذا من أجله، فإنه يأخذ أي نسق P_K له نفس الرموز مثل P ويأتي من P بإضافة فئة من البديهيات، فئة K التي تشير إلى أرقام جودل المرتدة الأولية، وتتضمن هذه الأنساق P_K P نفسها، كما هو الحال عندما تكون فئة K هي الفئة الفارغة(٨٩).

باعتباره القضية A غير القابلة للتحديد، يستخدم (في التدوين) القضية**X Π R (X,q)** حيث إن R وq فرضيات ماوراءالرياضيات، فهو يتطلب أن يكون النسق "w – P_K متسًا إذا وفقط إذا كانت الصيغتان A وA ~، يمكن برهنتهما. ويكون النسق S متسقًا إذا كان وفقط إذا كان فيه، وإذا لم

تكن الصيغة S (x) التي تحتوي فقط على المتغير الحر مثل x، كلها من الصيغ A (x) لـــ x = 0، 1، 2، .. وكذلك الصيغة $\sim \mathbf{X}\ \Pi\ R\ (X,q)$ قابلة للبرهنة. ويتم تطبيق هذا الترميز فقط على صيغة $(\sim \mathbf{X}\ \Pi\ R\ (X,q))$[٩٠].

١- محاولة البحث عن مدى تعميم نتيجة عدم اكتمال جودل:

نجد أن جودل قد لاحظ في المقام الأول، أن الخطوة الثالثة تعميم من الفئة التكرارية الأولية K إلى فئة K التي يمكن التعبير عنها رقميًا في P. بالإضافة إلى ذلك، فقد لاحظ أن اثنين فقط من خصائص النسق P التي استخدمت: الخاصية الأولى: فئة البديهيات وعلاقة النتيجة المباشرة يمكن تحديدها بشكل تكراري أولى، عن طريق استبدال العلامات الأولية بالأرقام الطبيعية.

٢- كل علاقة تكرارية أولية قابلة للتعبير الرقمي في النسق P:

يعبر عن الرأي القائل: "إن السبب الحقيقي لذلك عدم الكامنة في جميع الأنساق الصورية للرياضيات هو أن تشكيل أنماط أعلى من أي وقت مضى يمكن أن تستمر في الانتقال. بينما في أي نسق صورى هناك لا تعد ولا تحصى تتوفر العديد منها". "ضمنا في هذه الملاحظة هو أن التقارب من الأنماط العليا لنسق صورى يسمح للفرد تحديد مفهوم الصدق لهذا النسق، ثم لإظهار أن كل قضية صادقة قابلة للإثبات، ومن ثم تحديد القضية الموضحة في المبرهنة السادسة بأنها غير قابلة للنقض في النسق"[٩١].

في نهاية المطاف يأتي عمل جودل الذي يبلور طبيعة العلاقة بين العمليات الاستدلالية التي تعمل على الأنساق الرمزية، وطبيعة الصدق، أو تأويل معنىي ودلالة الألفاظ مبرهنة الاكتمال. والتي هي غالبًا ما يقال أن أعمق مبرهنة عدم الاكتمال التي جاءت بعد عام توضح الحد من المنهج الأكسيوماتيكي أو البديهي، وعلى وجه الخصوص توقفت عن برنامج ديفيد هلبرت لوضع الرياضيات على أساس آمن، يمكن إثباته بشكل متماسك. قد يكون صحيحًا أنه قد تم المزيد من الحبر والورق على مبرهنة عدم الاكتمال وعواقبها أكثر من أي نظرية أخرى في الرياضيات[٩٢].

اقترح "هلبرت"، عند إضفاء الطابع الصورى على مجال الرياضيات في النسق الصوري S، لقد قصد أن يشمل S كل ما هو ضروري للبرهنة على القضايا التي تنتمي إلى ذلك المجال. لذلك كان يأمل، لكل صيغة A بدون متغيرات حرة، إما أن القضية المثبتة A قابلة للبرهنة أو نقيضها A ~ في النسق، وبذلك يتسم النسق S بالاكتمال(٩٣).

كيف توصل جودل لهذه النتائج؟

كما هو موضح بالفعل، من خلال إمكانية تعيين الأعداد الطبيعية لكل عنصر من عناصر النسق، وأرقام محددة لعناصر محددة. مثل هذا الارتباط، استدعاء الأرقام المرتبطة، ترقيم جودل للعناصر الصورية. مما يتيح إمكانية أنه في النسق الصوري الذي يجسد نظرية الأعداد، ستكون هناك صيغ عن الأعداد الطبيعية يمكن تأويلها،، من خلال ترقيم جودل، لتخبرنا بأشياء عن عناصر النسق الصورى(٩٤).

استغل "جودل" ببراعته هذا الإمكان في ترتيب بنية نسقه الصورى S والذى يتضمن الصيغة A التي تشير إلى أن كل رقم طبيعي x لايعد ترقيم جودل للبرهنة في النسق S للصيغة المحددة B، مع B يحدث ليكون A نفسه. حيث A يقول "أنا غير قابل للبرهنة (في S1)". وتمثل تلك تناظرا للمفارقة القديمة عن الكذاب، والتي لدينا عبارة تؤكد كذبها. ل "كاذبة" جودل استبدال ببساطة "غير قابل للإثبات"، مما يجعل العبارة واضحة في S. دعنا نفترض أن النسق S يمتاز بسمات جوهرية، أمثل إمكانية إقامة البرهنة على الصيغ الصحيحة فقط. فإنه في حالة صيغة جودل A والتي يمكن البرهنة عليها (في S)، سيكون من خلال ما تقول أنها كاذبة؛ لذلك ،ومن خلال افتراضنا المسبق، أنها غير قابلة للبرهنة، ومن ثم تصبح في حقيقة الأمر صادقة؛ وهكذا، مرة أخرى من خلال افتراضنا بأن القضية المنفية، A ~هى أيضا غير قابلة للبرهنة. وبالتالي، فإن القضية A غير قابلًا للدحض رسميًا في النسق(٩٥).

تفترض ماوراء الرياضيات عند هلبرت التعامل فقط مع الصيغ الصورية، وذلك باستخدام الاستدلال المتناهى الوحيد. ولذلك، يقول جودل: "يمكن حصر الغرض من تنفيذ البرهان بالكيفية السابقة في إحلال أمور عدة صورية بحتة؛ الافتراض المسبق بأن كل صيغة صحيحة قابلة للبرهنة بالتأويل الذي يأخذ بعين العتبار أي ماوراء الرياضيات"(٩٦).

لقد أثبت جودل أن محاولة هلبرت للبرهنة على أن لا تناقض في الأنساق الصورية لايمكن إنجازها، وأكد أنها نتيجة حاسمة؛ فإذا كانت الرياضيات تكتسب مصداقيتها الموضوعية من عرض مقدماتها فى أنساق تتكون من إشارات وعلامات خالية من المعنى، إلا التى تفرضه قواعد التكوين والاستنتاج، ومع حالة استحالة البرهنة على اللاتناقض ينهار صرح اليقين الرياضي بأسره، وتظهر أهمية البرهنة من حيث هى التى تمد النسق المعنى والوضوح.

رابعًا- فلسفة الرياضيات عند جودل:

لايعتمد المنهج الرياضي على الاستنباط فحسب، وإنما على نوع من الاستقراء هو الاستقراء الرياضي، والذي يمتاز عن الاستقراء العادي بأنه يقيني، وبأنه ينقلنا من عدد محدود من الحالات المنتهية إلى عدد لا ينتهي واعتبره بديهية حدسية ضرورية تعتمد عليها كل الأنساق الرياضية والمنطقية، ولذا أكدوا اعتماد الرياضيات على الحدس الاستقرائي من جديد(٩٧).

أن الرياضيات الآن تعد من أهم العلوم، ويعد منهجهامن أدق المناهج، وتحاول العلوم الأخرى أن تطبق منهجًا يحاكي منهجها؛ ولكن ذلك ليس إلا نهاية تصبح نقطة بداية لتطور كبير شاركت فيه وستشارك فيه كل الشعوب منذ بداية الفترة التاريخية، ومن المعروف أن تاريخ العلوم مختلط اختلاطا كبيرا مع مراحل تقدم الحضارة(٩٨).

العلاقة بين الرياضيات والفلسفة والعلوم الطبيعية :

شهد تاريخ الفلسفة وجود اتجاهين رئيسين، قسما الفلاسفة إلى مجموعتين، **الاتجاه الرياضي**: بمعني الرياضة عند فيثاغورس؛ تكون فيه الرياضيات ضربًا من المعرفة قريبًا منها التصوف، يبلغ اليقين ولا يستخدم الحواس، تلك هي الفلسفة المثالية التي تنسج من العقل فلسفاتها متسقة الأجزاء في بناءات متكاملة؛ وأما الاتجاه الثاني: فهو **اتجاه طبيعي تجريبي**، يجعل تجربة الحواس وسيلة المعرفة؛ أما الفلسفة التحليلية فقد أستطاعت استخراج العنصر الفيثاغوري من أصول الرياضيات، وبيان أن قضاياها تحصيل حاصل، وما تنتهي إليه من نتائج تتفاوت في درجة احتمالها لليقين دون أن تبلغ اليقين الكامل؛ وفرقت بين "القضية التكرارية" في الرياضيات، والقضية الإخبارية في العلوم الطبيعية، ونجد أن الفلسفة التحليلية المعاصرة من الواقعية الجديدة، والوضعية المنطقية، قد أتفقت على السبيل لحل مشكلة أزمة الرياضيات من خلال تحليل التركيب اللغوي للعبارات[٩٩].

يذهب رسل في تمييزه بين الرياضيات وفلسفتها؛ إلى أن الرياضيات تستخدم رموزاً وعلامات، مثل الأعداد وأحرف الهجاء والعلامات الدالة على الجمع والطرح والضرب والقسمة والتساوي وما إلى ذلك، ثم تركب تلك الرموز والعلامات في صيغ ومعادلات دون أن تقف عند هذه الرموز والعلامات نفسها بالتحليل؛ مثلاً إن "+٠ =١" وتستبعد من مجالها تحليل معاني الرموز المستخدمة. ومتى أصبحت هذه الرموز نقطة إهتمام الباحث وموضوع حديثه، كانت فلسفة الرياضيات. ومن هذا المنطلق تتجلى حقيقة الأعداد نقطة الابتداء في دراسة الرياضيات والتي كانت تعد ظناً أبسط المدركات الرياضيات، إلا أنها في الحقيقة على درجة بعيدة من التركيب، لا يظهر إلا بعد تحليل طويل، كالذي قام به كثيرون من علماء الرياضيات والمنطق المحدثين، وعلي رأسهم "رسل"، وأظهروا بتحليلاتهم أن فكرة العدد تسبقها خطوات عقلية أبسط منها. تقع كلها في مجال المنطق، ويصبح أساس التفكير الرياضي إن هو إلا مرحلة متقدمة من إبداع فكري يبدأ مع الأصول الأولية للمنطق[١٠٠].

ثم أصبح تعريف العدد عند رسل: يبدأ بقائمة من الألفاظ الأولية التي نقبلها بغير حاجة منا إلى تعريفها، وبواسطتها تعريف ما شئنا من الألفاظ الرياضية، وتشتمل هذه القائمة على المدركات الأولية التي قبلناها بغير تعريف، أي اللآمعرفات، التي يجب أن تنحصر في أقل عدد ممكن؛ ولا

مناص من قبولها على أنها من البساطة في تكوينها والابتدائية في أسبقيتها بحيث لا تحتاج في تعريفها إلى ســواها. وكان العدد من بين تلك المدركات الأولية، ولهذا لم ير الرياضــيون ضــرورة لتعريف العدد. أما المناطقة الرياضــيون فقد ذهبوا إلى غير ذلك، إذ رأوا أن الرياضـــة البحتة بكافة فروعها، تشـــترك في مجموعة واحدة من اللامعرفات الأولية، وأن هذه اللامعرفات إن هي إلا المدركات الرئيسة في علم المنطق، مثل "فصل" "استدلال" "صادق" وبهذا استطاعوا رد قضايا الرياضيات إلى عبارات لا تشــتمل إلا على الثوابت المنطقية مضــافًا إليها متغيرات. كيفية رد العدد إلى مدركات منطقية، يجب أولاً التمييز بين ثلاثة أشياء:

١- المجموعة التي تعد.

٢- العدد نفسه الذي تُعد به تلك المجموعة.

٣- فكرة العدد بصفة عامة.

يتضـــح إذن أن المجموعة المعدودة، شـــيء غير العدد الذي نعد به تلك المجموعة، إذ يمكن تطبيقه على مجموعة أخرى؛ ومادمنا نطلق رمزاً واحداً هو " العدد" على هذه المجموعات المختلفة من أشياء، فلابد أن يكون بين تلك المجموعات صفة مشتركة هي التي نقصد إليها حين نستخدم هذا الرمز "العدد".

ويجب التمييز بين عدد معين وبين فكرة العدد بصـــفة عامة؛ فهذه الأعداد المختلفة ما هي إلا أفراد من فئة واحدة تجمعها؛ لأن بينهما صـفة مشـتركة، فالعدد "٣" و"٥" والعدد "٦" أفراد مختلفة الدلالات بعضها عن بعض، لكنها تنطوي رغم اختلافها تحت فئة واحدة هي العدد[١٠١].

ويرى جودل أن تطور دراسة أسس الرياضيات بمصطلحات ومفاهيم فلسفية مثل الإمكان الفلسفى(*)، هي السبيل لتفسير جوهر إبستمولوجيا المعرفة الرياضية التي تقع بين المفهومين الفلسفى والرياضـــى أوالمزج بينهما. انتهى به البحث للقول بأن: "حقيقة الرياضـــيات ومغزاها إنما تكمن في الوسط بين المفهوم الفلسفى والرياضى أو أنها تتألف من المزج بينهما"[١٠٢].

أثبت جودل أن علم الرياضيات - الذي يصنف كأرقى أنماط علم البرهان – ليس مكتمل البرهنة، بل ولا بإمكانه أن يبلغ لحظة تمام البرهان؛ لأنه عاجز عن البرهنة على كل عناصر نسقه البنائي، حيث لابد له حتما من مقدمة أولية غير قابلة للتوكيد، ومن ثم، أصبحت المعرفة الرياضية؛ والتى كانت من قبل حقل المعرفة اليقينى والذى كان ينظر إليه من قبل باعتباره أولياً وقبليًا؛ قبل أن يأتى جودل بفكره الثورى على الساحة؛ كان علماء الرياضيات أوفر حظًا، حيث كانوا على يقين من معرفتهم وطبيعة العلم الرياضى، أما جودل فقد كان لديه ما يمكن قوله عما تستطيع عقولنا أن تعرفه وأن تكون عليه أو لاتكون، متجاوزًا بها إلى ما هو أبعد من مجال نطاقها الصورى الضيق في معالجة القضايا والأمور، مثل طبيعة الصدق والمعرفة واليقين وفقا لطبيعتنا الإنسانية، الأمر الذي جعل أحد كتاب ما بعد الحداثة يطلق على جودل "شيطان الرياضيات" إذ أصبحت الرياضيات التي لم تكن مجرد لغة، وإنما كانت هي اللغة التي نستطيع من خلالها فك شفرة الكون لنستطيع فهمه وفهم كل شيء فيه، وبعد جودل لم يعد الأمر كسابق عهده إذ أصبحت جزءا كبيرا من اللايقين الذي نحياه ونحيا به، وأصبح ضرورة عدم الاكتمال لنسقنا الصورى للفكر شيئا جوهرياً وتأسيسيًا(١٠٣).

ومما لا شك فيه، أنّ إيجاد مجموعة متكاملة ومتسقة من القضايا المنطقيّة التي من الممكن استخدامها لإثبات صحّة جميع الحقائق الرّياضيّة هو ضربٌ من المستحيل.

إن نتائج مبرهنات جودل قد أعادت النظر في محاولة رسل رد الرياضيات للأسس المنطقية.

من الواضح إذًا، أن اهتمام رسل بالمنطق والرياضيات تأدى به إلى اعتقاد راسخ وإيمان قوى بإمكانية الجمع بينهما؛ ويبدو ذلك من تأويله للرياضيات وبصفة خاصة علم الحساب باعتباره امتدادًا(*) للمنطق ورد الرياضيات للمنطق، باعتبارها تنطوى على أفكار غير محددة وقضايا غير مبرهنة ماعدا القضايا والأفكار المنطقية(١٠٤).

صنعت مبرهنة العالم الرياضـي كورت جودل عن عدم الاكتمال قيودًا أسـاسـية على طبيعة الرياضـيات، أتت بصـدمة للمجتمع العلمي بأكمله؛ لأنها أطاحت الاعتقاد الشـائع بأن الرياضـيات منظومة متماسكة كاملة تتأسس على أساس منطقي واحد. ويمكن القول: أن جودل قد أوضح حقيقة وجود مسـائل لا يمكن حلها بأي مجموعة من القواعد أو الإجراءات، وأنه في داخل أي منظومة صـورية من البديهيات مثل الرياضـيات تبقي هناك صـيغ لا يمكن إثباتها ولا تفنيدها على أسـاس البديهيات التى تعين المنظومة، وفى الحقيقة فإن مبرهنة جودل ومبدأ اللايقين عند هايزنبرج – والاستحالة العلمية، هذا كله يشكل مجموعة من القيود في صميم معرفتنا العلمية(١٠٥).

نتائج البحث:

من اهم النتائج التي توصلت إليها جراء هذا البحث ما يلى –

أولًا – أثَّر كيرت جودل تأثيرًا كبيرًا على التفكير العلمى والفلسـفى في الوقت الذي عمل فيه برتراند رسل والفردنورت هوايتهد وديفيد هلبرت على تحليل نظرية المجاميع لفهم أسس الرياضيات قبل جورج "كانتور".

ثانيًا-كان من أبرز النتائج التي تمخضـت عن التقدم العلمى في مجال الرياضـيات وكذلك الفيزياء أن أحدث أزمة في العلمين، إذ إنهما لا يستطيعان الوصول إلى حقائق يقينية صادقة صدقًا مطلقًا. فاكتشـاف الهندسـات اللاإقليدية عند لوباتشـفسـكى، واكتشـاف نظرية حسـاب المجاميع عند"جورج "كانتور"" انتهيا إلى أن كل المسـلمات الرياضـية التي تم إقرارها من قبل دون نقاش حول مدى صحتها، لم تكن من نوع الأوليات الرياضية الصادقة صدقًا مطلقًا، الأمر الذي أدى إلى الاهتمام بالتحليل الدقيق للمدلولات الرياضية، فضلًا عن ضرورة دراسة الأسس البديهية للنظريات الرياضية .

ثالثًا-أتت رؤية "هلبرت" لحل أزمة أسـس الرياضـيات لتجسـد أهمية البعد الدلالي والسيمانطيقي للغة؛ حيث أهتم ببنية تركيب اللغة وإضفاء الطابع الصورى، فأخذ يخطو بالرياضيات

نحو مزيدًا من التجرد بالأكسيوماتيك الذي انتهى بقبول حدود ومسلمات أولية صورية بحتة.

رابعًا-أما عن موقف جودل من مناهج الرياضـيات المطبقة منذ عصـر "إقليدس"، فقد أثبت أنها غير كافية لاكتشـاف كل ما هو صـحيح فيما يتعلق بالأعداد الطبيعية، وأدى اكتشـافه هذا إلى زعزعة الأسس التي بنيت عليها الرياضيات حتى مطلع القرن العشرين. كذلك أرست أساليب جودل الابتكارية والتي أمكن بالفعل تطبيقها في خوارزميات عملية الحوسبة الأساس لعلم الحاسوب الحديث.

خامسًا – إن مبرهنة جودل أثبتت أن مسلمات نظرية الأعداد ليست تامة، أي أن هناك قضايا صادقة فيما يتعلق بالأعداد الطبيعية لايمكن إثباتها انطلاقًا من تلك المسلمات.

أن مبرهنة عدم الاكتمال "لجودل" أطاحت الاعتقاد الشائع بأن الرياضيات منظومة متماسكة كاملة تتأسس على أساس منطقي واحد. وقد وضع جودل أسس مبرهنته التي تتمثل في (أ) وضع نسق صوري. (ب) ترقيم جودل، (ج) إنشاء قضية تكون صادقة لأنها تذهب إلى القول بأنها غير قابلة للإثبات.

سادسًا-لقد أكدّ جودل على أهمية العلاقة الوثيقة القائمة بين الرياضيات والفلسفة والعلوم الطبيعية. رأى أن تطور دراسة أسس الرياضيات بمصطلحات ومفاهيم فلسفية مثل الإمكان الفلسفى، هي السبيل لتفسير جوهرأابستمولوجيا المعرفة الرياضية التي تقع بين المفهومين الفلسفي والرياضي أو المزج بينهما. وانتهي به البحث إلى، أن حقيقة الرياضـيات ومغزاها إنما تكمن في الوسـط بين المفهومين الفلسفي والرياضي، أو أنها تتألف من المزج بينهما.

إن نتائج مبرهنات جودل قد أعادت النظر في محاولة برتراند رسل رد الرياضيات للأسس المنطقية.

سابعًا – توقف جودل عن البحث في نظرية المجموعات؛ وذلك بعد هجرته إلى أمريكا وتحول اهتمامه إلى الفلسفة العلمية ونظرية النسبية لأينشتاين، وقد استطاع أن يبرهن على أن الأكوان التي يمكن أن ينتقل فيها الزمن إلى الماضي تتوافق إلى حد كبير مع معادلات أينشتين.

أولًا- المصادر والمراجع العربية والمترجمة إليها:

١- برتراندرسل (١٩٦٤): أصول الرياضيات، ترجمة: محمد مرسي أحمد، وأحمد فؤاد الأهوانى، دار المعارف بمصر،الجزء الرابع، القاهرة.

٢- ـــــــــــ(١٩٨٠): مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة: محمد موسي أحمد، ملاراجعة: أحمد فؤاد الاهواني، مؤسسة سجل العرب، القاهرة.

٣- جمال ضاهر: مدخل إلى علم المنطق (٢٠١٤)، الطبعة الأولى، دار الفارابي، لبنان.

٤- حربى عباس عطيتو (٢٠٠٩): اتجاهات التفكير الفلسفي عند اليونان، الطبعة الأولى، دار المعرفة الجامعية.

٥- الحسن بن الهيثم (٢٠٠٥): شرح مصادرات كتاب "إقليدس"، تحقيق ودراسة: أحمد عزب أحمد، مراجعة: أحمد فؤاد باشا، مطبعة دار الكتب والوثائق القومية، القاهرة.

٦- زكي نجيب محمود (د.ت): برتراندرسل، نوابغ الفكر الغربي٢، الطبعة الثانية، دار المعارف بمصر، القاهرة.

٧- زبيدة مونية بن ميسي (٢٠١٧): الرياضيات بنظرة فلسفية على خطى كفاييس، الطبعة الأولى، ألفا للوثائق، الجزائر.

٨- سهير فضل الله أبو وافية (٢٠٠٨): تاريخ وفلسفة العلوم، الدار العالمية للنشر والتوزيع.

٩- صلاح محمود عثمان محمد (١٩٩٨): مشكلة الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة، منشأة المعارف بالإسكندرية.

١٠- عبد الأمير المرتضي المؤمن (٢٠٠١): الفلك والفضاء (من الخرافات والتنجيم إلى تلسكوب هابل)، الدار الثقافية للنشر.

١١- ماهر عبد القادر محمد (٢٠١١): كارل بوبر منطق الكشف العلمى، أورينتال، الإسكندرية.

١٢- ـــــــــــ (٢٠١٥): نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية الإسكندرية.

١٣- محمد ثابت ألفندى (١٩٦٩): فلسفة الرياضة، الطبعة الأولى، دار النهضة العربية، بيروت.

١٤- ـــــــــــ (١٩٨٧): فلسفة الرياضة، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية.

١٥- محمد محمد قاسم (١٩٩١): نظريات المنطق الرمزي "بحث في الحساب التحليلي والمصطلح"، دار المعرفة الجامعية.

١٦- محمد مهران (١٩٧٨): مقدمة فى المنطق الرمزى، دار الثقافة للطباعة والنشر، القاهرة .

١٧- إيه سي جرايلينيج (٢٠١٤): برتراندراسل، ترجمة: إيمان جمال الدين الفرماوي، الطبعة الأولى، مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة.

١٨- جورج سارتون (٢٠١٠): تاريخ العلم (العلم والحضارة الهللنستية في القرون الثلاثة الأخيرة قبل الميلاد)، ترجمة: لفيف من العلماء، الجزء الرابع، العدد١٦٤١، إشراف: ابراهيم بيومي مدكور، محمد مصطفي زيادة، المركز القومي للترجمة.

١٩- ستاتس بسليوس (٢٠١٨): فلسفة العلم من الألف إلى الياء، ترجمة صلاح عثمان، مراجعة: محمد السيد، الطبعة الأولى، العدد٢٥٣٩، المركز القوميّ للترجمة، القاهرة.

٢٠- ستيفن هوكنج (٢٠٠٣): الكون في قشرة جوز، ترجمة: د. مصطفي إبراهيم فهمي، العدد ٢٩١، عالم المعرفة، المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت.

٢١- فيرنر هايزنبرج (٢٠١٤): الفيزياء والفلسفة ثورة في العلم الحديث، ترجمة وتقديم: خالد قطب، الطبعة الأولى، العدد ٢٠٤١، المركز القوميّ للترجمة، القاهرة.

ثانيًا- القواميس والمعاجم:

١- جميل صليبا (١٩٨٢): المعجم الفلسفي، الجزءان الأول والثاني، دار الكتاب اللبناني.

٢- بلانشي (٢٠٠٥): المذهب الأكسيوماتيكي، ترجمة: ماهر عبد القادر.

٣- جورج طرابيشي (٢٠٠٦): معجم الفلاسفة، الطبعة الثالثة، دار الطليعة، بيروت.

٤- روزنتال ويودين (١٩٦٧): الموسوعة الفلسفية العربية، ترجمة: سمير كرم، مراجعة: صادق جلال العظم، وجورج طرابيشي، دار الطليعة للطباعة والنشر.

٥- زكريا إبراهيم (١٩٨٣): المعجم الفلسفي، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة.

٦- فؤاد كامل وآخرون (١٩٨٢): الموسوعة الفلسفية المختصرة، مراجعة: زكى نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية.

٧- فئة من أساتذة التعليم العالي (١٩٧١): الرياضيات المعاصرة دراسة نظرية ومسائل، نظرية المجموعات، بيروت.

٨- فريد جبر وآخرون (١٩٩٦): موسوعة مصطلحات علم المنطق عند العرب، الطبعة الأولى، مكتبة لبنان.

٩- مراد وهبه (٢٠٠٧): المعجم الفلسفى، دار قباء للطباعة والنشر، القاهرة.

١٠- معن زيادة (١٩٨٨): الموسوعة الفلسفية العربية، المجلد الثانى، الطبعة الأولى، المدارس والمذاهب والاتجاهات والتيارات، القسم الأول، معهد الإنماء العربى.

١١- منير البعلبكي (١٩٩٢): معجم أعلام المورد، الطبعة الأولي، دار العلم للملايين، بيروت

١٢- موريس شربل (١٩٨٩): علماء الرياضيات، دار الكتب العلمية، لبنان.

١٣- ـــــــــ (١٩٩١): موسوعة علماء الرياضيات حياتهم وآثارهم، دار الكتب العلمية للنشر

والتوزيع.

ثالثًا: الرسائل العلمية :

١- محمد أحمد مصطفي، السرياقوسي، محمد فتحي، الشنيطي (١٩٨٢): المنهج الرياضي بين المنطق والحدس، رسالة دكتوراة، جامعة الزقازيق.

رابعًا: المجلات العلمية:

١- إدريس خليل (٢٠٠٦): اللامنتهي بين الحقيقة والمعرفة، ع٢٣، أكاديمية المملكة المغربية.
٢- محمد عبد الوهاب حمزة (٢٠١٣): مفاهيم أساسية الهندسة وإستراتيجيات تدريسها، الطبعة الأولى، كنوز المعرفة.
٣- معصومة محمد كاظم، وليم تاوضروس عبيد(١٩٩٣): الهندسة اللاإقليدية (قصة تحرير الفكر الرياضي وانطلاقه)، الطبعة الأولى، دار النهضة العربية.

خامسًا: القواميس الاجنبية

1- Blackburn, Simon (1996): The Oxford Dictionary of Philosophy Oxford Paperback Reference, Oxford University Press.

سادسًا- المراجع الاجنبية:

1- A.N .Prior (1972): Russell, Bertrand Arthur William, in "The Encyclopedia of Philosophy", Edited By: Paul Edwards, Collier Macmillan, New York, Vol. 7
2- Alex Malpass and Marianna Antonutti Marfori(2017): The History of Philosophical and Formal Logic “From Aristotle to Tarski” , An imprint of Bloomsbury Publishing Plc, London, Oxford, New York,

3- Dagfinn Follesdal(1995): “Introductory note to 1961”, IN “Kurt Gödel Collected Works”, Edited by Solomon Feferman & John W. Dawson Dagfinn Follesdal, Oxford University Press, New York Oxford, v.3
4- J. Van Heijenoort (1972): “Gödel’s Theorem” in “The Encyclopedia of Philosophy” Edited By, Paul Edwards, Collier Macmillan, New York, VoL.3
5- John W. Dawson, Jr (1984): The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems, Source: PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Volume Two: Symposia and Invited Papers, Published by: The University of Chicago Press on behalf of the Philosophy of Science Association
6- Kurt Godel: Collected Works (1986): Volume I, Edited by Solomon Ferman, Oxford University Press, New York Clarendon press,Oxford
7- Rebecca Goldstein ”Incompleteness” (2005): The Proof and Paradox of Kurt Gödel, Atlas Books, W.W. Norton & Company, New York
8- Robert K. Meyer (1996): Kurt Gödel and the Consistency of R## in Gödel 96 Logical Foundation of Mathematics, computer science and physics, edited by Petr Hajek, Brno, Czech Republic
9- Solomon Feferman: In the light of logic,in "logic 'and Computation in philosophy,Oxford, U, press, U.S.A

هوامش البحث

(*) طاليس الملطي Thales (٦٢٤-٥٤٥): أول عالم يوناني، قال عنه برنب: هو أول مفكر تستطيع أن تطلق عليه كلمة "عالم" وهو في الوقت نفسه أبو الرياضين الفلكيين اليونانيين؛ بفضل الروح العلمية تمكن طاليس من تحقيق الحقائق، وكانت له أفكار في الرياضيات وإنجازات هندسية ومعرفية. انظر: عبد الأمير المرتضي المؤمن (٢٠٠١): الفلك والفضاء (من الخرافات والتنجيم إلى تلسكوب هابل)، الدار الثقافية للنشر، ص ص٤٦-٤٧.

(**) فيثاغورس (٥٨٠-٥٠٠ ق.م): فيلسوف يوناني مؤسس المدرسة الفيثاغورية، أسهم في تطوير الهندسة، وقال إن تطهير النفس ممكن عن طريق معرفة الحساب والهندسة والموسيقي. أرسي فيثاغورس دعائم علم الرياضيات منذ القدم وقد فطن إلى وجود صلة بين العدد والشكل الهندسي مما جعل الأعداد أشكالًا ووحد بينهما وجعل الأعداد أصل الأشياء، والذي قد تطور عن أفلاطون ليصبح بمثابة المثال، وعند أرسطو بمثابة الصورة، الأمر الذي جعل لفيثاغورس دورًا عظيمًا في تاريخ الفلسفة عند اليونان، انظر: منير البعلبكي (١٩٩٢): معجم أعلام المورد، الطبعة الأولى، دار العلم للملايين، بيروت، ص٣٣٥، حربي عباس عطيتو محمود (٢٠٠٦)، ملامح الفكر الفلسفي عند اليونان، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ص ص٨١-٨٤.

(١) ماهر عبد القادر محمد (٢٠١٥): نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ص٩٢.

(***) إقليدس Euclldes (٣٠٠-٢٦٥ ق.م): في الحقيقة أننا نجهل تمامًا حياة إقليدس، وأول من تكلم عنه هو عالم الرياضيات أبولونيوس في مقدمة كتابه الأول عن المخروطيات، وكذلك ذكر كتاب العناصر لإقليدس. ومن إنتاج إقليدس الفصول الثلاثة عشر من كتاب العناصر وهي المعطيات –الأحداث – تقسيم علم البصريات مدخل متناسق – وجزء من الخفيف والثقيل. وهناك كتب أيضًا عن القسمة، ونلاحظ أن: كتاب الأصول لم يعالج الهندسة فقط، وإنما عالج الجبر أيضًا ونظرية الأعداد، حيث ذكر مسائل الجبر في قالب هندسي، وحلت بالطرق الهندسية، وقد برهن قانونًا التوزيع والتبادل في الجبر هندسيًا. كما استطاع أن يقدم لنا كثيرًا من المتطابقات في صورة هندسية بحتة، انظر: موريس شربل: علماء الرياضيات، دار الكتب العلمية، لبنان، ١٩٨٩، ص٢٧، جورج سارتون (٢٠١٠): تاريخ العلم (العلم والحضارة الهللنستية في القرون الثلاثة الأخيرة قبل الميلاد، ترجمة: لفيف من العلماء، الجزء الرابع، العدد ١٦٤١؛ إشراف: ابراهيم بيومي مدكور، محمد مصطفي زيادة، المركز القومي للترجمة، ص٩٠.

(*) هندسة إقليدس: نسق هندسي إكسيوماتيكي، قدمه إقليدس حوالي (٣٦٥-٣٠٠ ق.م) عالم الهندسة اليوناني ومؤلف كتاب العناصر، وقد انطلق إقليدس في بنائه من خمس مصادرات تقرر الخامسة منها: أنه من نقطة خارج خط مستقيم يمكن رسم خط مستقيم واحد فقط موازٍ له، وهندسة إقليدس هي هندسة المكان الفيزيائي وفقًا لخبرتنا به. انظر، ستاتس بسليوس (٢٠١٨): فلسفة العلم من الألف إلى الياء، ترجمة: صلاح عثمان، مراجعة: محمد السيد، الطبعة الأولى، العدد٢٥٣٩، المركز القوميّ للترجمة، القاهرة، ص١٢٦.

(٢) محمد ثابت الفندى (١٩٨٧): فلسفة الرياضة، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ص ص١٤-١٨ (بتصرف).

(٣) إدريس خليل (٢٠٠٦): اللامنتهي بين الحقيقة والمعرفة، ع٢٣، أكاديمية المملكة المغربية، ص٢٧١.

(٤) ادريس خليل، المرجع السابق، ص٢٧٢

(*) البديهية Axiom: البديهية قضية أولية صادقة بذاتها يجزم بها العقل من دون برها، وجمعها بديهيات كقولنا الكل أعظم من الجزء والأشياء المساوية لشيء واحد متساوي، والبديهيات في العلوم الرياضية غير الأوضاع والمسلمات؛ لأن البديهيات مبادئ تحليلية أولية صادقة بذاتها ومشتركة في جميع العلوم الرياضية في حين أن المسلمات مبادئ تركيبية غير صادقة بذاتها، وهي مختلفة باختلاف العلوم الرياضية، ويطلق لفظ بديهيات على أحد عناصر المنهج الإكسيوماتيكي هي الدراسة النقدية لمبادئ البرهنة الرياضية. انظر: جميل صليبا (١٩٨٢): المعجم الفلسفي، ج١، دار الكتاب اللبناني، بيروت، ص ص٢٠٢-٢٠٣

(5) Dagfinn Follesdal(1995): “Introductory note to 1961”,IN “Kurt Gödel Collected Works”, Edited by Solomon Feferman & John W. Dawson Dagfinn Follesdal, Oxford University Press, New York Oxford, v.3, P.365

(٦) إدريس خليل (٢٠٠٦): اللامنتهي بين الحقيقة والمعرفة، المرجع السابق، ص٢٦٩.

(٧) محمد عبد الوهاب حمزة (٢٠١٣): مفاهيم أساسية الهندسة وإستراتيجيات تدريسها، الطبعة الأولى، كنوز المعرفة، ص١٨.

(٨) محمد عبد الوهاب حمزة، المرجع السابق، ص١٩.

(٩) الحسن بن الهيثم (٢٠٠٥): شرح مصادرات كتاب "إقليدس"، تحقيق ودراسة: أحمد عزب أحمد، مراجعته: أحمد فؤاد باشا، مطبعة دار الكتب والوثائق القومية، القاهرة، ص٣٠.

(١٠) صلاح محمود عثمان محمد (١٩٩٨): مشكلة الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة، منشأة المعارف بالإسكندرية، ص٨٨ .

(١١) سهير فضل الله أبو وافية (٢٠٠٨): تاريخ وفلسفة العلوم، الدار العالمية للنشر والتوزيع، ص٢٤٣.

(*) النسق الاستنباطي ينطلق من بديهيات Axioms وتعريفات definitions ومسلمات postulates يبرهن على مجموعة من النظرياتTheorems واللواحق Corollaries باستخدام قاعدة التعويض Substitution أو قاعدة إثبات التالي، انظر، ماهر عبد القادر(١٩٨٨): نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، ص٩٢.

(**) من أشهرهم الرياضي العربى نصير الدين الطوسي (١٢٠١-١٢٧٣) الذى أعتبر كتابه "شكل القطاع" بعد ترجمته لعدة لغات بمثابة مصدر ومرجع لعلماء أوروبا، واتخذه جيرولامو ساكيرى (١٦٦٧-١٧٣٣) مصدرًا أساسيًا لبرهانه "فرض الزاوية الحادة". صلاح محمود عثمان محمد: المرجع السابق، ص٨٩ .

(*) الهندسة الزائدية HyperblicGeometry: هى تلك الهندسة التى نجح في تطويرها ثلاثة من أكبر الرياضيين في القرن التاسع عشر، على رأسهم: الألماني "كارل فردريش جاوس" K.F.Gauss (١٧٧٧-١٨٥٥)، والمجرى "يوحنا بولياى J.Bolyai (١٨٠٢-١٨٦٠)، والروسي "نيكولاي لوباتشفسكى" N. Lobachevsky (١٧٩٢-١٨٥٦)، وتعتمد على إنكار المسلمة الخامسة، وإثبات برهان "الطوسي"، و"ساكيرى" الذى اشتهر "بفرض الزاوية الحادة" the acute-angle hypothesis؛ والذى ينص على أنه: لا يمكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم معلوم من نقطة ما خارج هذا المستقيم"، واعترافا بفضل لوباتشفسكى أطلق الرياضيون عليها "الهندسة اللوباتشفسكية. صلاح محمود عثمان محمد: المرجع السابق، ص٨٩-٩٠ .

(**) لوباتشفيكي –نيقولاي إيفانوفتيش (١٧٩٤-١٨٥٦) عالم رياضيات روسي، ولد في جوركي، لمع اسمه في الرياضيات بعد أن اكتشف هندسة لاإقليدية جديدة، نشرها في كتابه الهندسة الخيالية، ومسلمة لوباتشفسكي من نقطة خارج خط يمكننا أن نرسم عددًا لا متناه من الخطوط الموازية لهذا الخط، موريس شربل (١٩٩١): موسوعة علماء الرياضيات حياتهم وآثارهم، دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع، ص٢٥٤ .

(١٢) صلاح محمود عثمان محمد: مشكلة الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة، المرجع السابق، ص٩٠.

(13) Blackburn, Simon (1996): The Oxford Dictionary of Philosophy Oxford Paperback Reference, Oxford University Press, p,193

(*) الهندسة الناقصية EllipticalGeometry: هى تلك الهنندسة المخالفة لهندسة إقليدس ولوباتشفسكى وبولياى، والتى قدمها ريمان Riemann (١٨٢٦-١٨٦٦) فى مقال له بعنوان: فرضيات تساعد على تأسيس الهندسة" عام ١٨٥٤ ذهب فيه إلى أن المكان الحقيقى ليس لامتناه ولكنه هو لامحدود، والمسافة بين نقطتين

يمكن أن تصـــل إلى نهاية قصـــوى، ومن هنا كانت هندســـته مماثلة للهندســـة الدائرية وأتصـــفت بكونها كروية spheridal، لتكون بمبادئها عكس الزائدية ويصـــبح الخط المســـتقيم متناه لأنه دائرى. زبيدة مونية بن ميســـي (٢٠١٧): الرياضـــيات بنظرة فلســـفية على خطى كفاييس، ألفا للوثائق، الجزائر، الطبعة الأولى، ص ص١٠٥-١٠٦.

(١٤) صلاح محمود عثمان محمد: مشكلة الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة، المرجع السابق، ص٩١.

(١٥) جورج ســارتون (٢٠١٠): تاريخ العلم (العلم والحضـــارة الهللنســتية في القرون الثلاثة الأخيرة قبل الميلاد)، ترجمة: لفيف من العلماء، ص٩٠ .

(*) الألماني "هيرمان فون هيلمهولتز H.v.Helmholtz (١٨٢١-١٨٩٤) أول من صـــاغ هذا الافتراض في العصـــر الحديث مســـميًا إياه "مبدأ الحركية الحرة"، ووفقًا له تلتقي الهندســـات الثلاث "إقليدس"، ريمان، لوباتشفسكي) فى كونها هندسات قياسية أو مترية. صلاح محمود عثمان محمد: مشكلة الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة، المرجع السابق، ص٩٢.

(١٦) صـلاح محمود عثمان محمد: مشـكلة الاتصـال واللاتناهي بين العلم والفلسـفة، المرجع السـابق، ص٩٢-٩٣.

(١٧) معصـومة محمد كاظم، وليم تاوضـروس عبيد(١٩٩٣): الهندسـة اللاإقليدية (قصـة تحرير الفكر الرياضـي وانطلاقه)، الطبعة الأولى، دار النهضة العربية، ص٤٨.

(*) الحدس الرياضــى: أسـس هلبرت حركة عرفت باسـم المدرسـة الصـورية الجديدة، مبادئها عدم التسـليم لأى رياضـيات متعينة بالاسـتقلال عن اللغة فى الوجود والصـحة، التسـليم بذلك لما وراء الرياضـيات، الموضـوع الرياضـى كيان مستقل تمامًا عن الرياضـى الذى يفكر فيه؛ ولهذ اعتبر الرياضـيات بحثًا فى العلاقات القائمة بين هذه الموضــوعات وليسـت بحثًا فى طبيعة هذه الموضــوعات، كما قال هلبرت، إن الشــىء الوحيد المهم هو تلك العلاقا؛ ولذا لابد من أن تتحرر الرياضـيات تأثير اللغة من خلال تبنى التحليل الصــورى المجرد للموضــوعات الرياضية، شكلا من الاستعمال للحدس فيما يتعلق بالأعداد الطبيعية والأستقراء التام، كما أعترف أنصاره بوجود فارق جوهرى بين المنطق والرياضـــيات. معن زيادة (١٩٨٨): الموســـوعة الفلســـفية العربية، المجلد الثانى، المدارس والمذاهب والاتجاهات والتيارات، القســـم الأول، معهد الإنماء العربى، الطبعة الأولى، ص ص٤٩٦-٤٩٧.

(١٨) محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص١٦.

(**) ديفيد هلبرت David Hilbert (١٨٦٢- ١٩٤٣) عالم رياضـــيات ومنطقى ألمانى، مؤســس مدرســة غوتنغن الرياضـــية، اشــتغل بنظرية المتغيرات الجبرية والأعداد الجبرية وأســس الرياضـــيات والمنطق الرياضي.وفى كتابه " أسس الهندسة "عام ١٨٩٩ رد الهندسة الإقليدية إلى نسق محكم من البديهيات التى حددت مسبقا، وأضـفى الطابع البديهى على المعرفة. وقدم جهدًا مهمًا فى دالة القضـية والدالة الحسـابية، وقد صـاغ فى عدد من المقالات التى ظهرت له فى أوائل العقد الثانى من القرن العشـرين تناولًا جديدًا لأسـس الرياضـيات. مما أدى إلى ظهور مفهوم الصـورية من جهة وما وراء الرياضـيات من جهة أخرى. م. روزنتال ويودين (١٩٦٧): الموسوعة الفلسفية، ترجمة: سمير كرم، مراجعة: صادق جلال العظم، وجورج طرابيشي، دار الطليعة للطباعة والنشر، ص٥٦٠.

(***) ديدكند ريتشاردDedekind-Richard (١٨٣١-١٩١٦)، أوجد ديدكند الهندسة التجريبية بشكلها الحالي بالاشـتراك مع هـــ. ووبرH.weber حول دراسـة المنحنيات الجبرية في مجال الهندسـة والتحليل إلى فرع من فروع الجبر، وأكد أهمية الهندسة في دراسة حلقة التوابع المنظمة في مثل هذه المنحنيات، أخيرًا لعب دورًا مهمًا في أكسيوماتيكية الأعداد الحقيقية في تحضير نظرية المجموعات بالاشتراك مع كانتور لمدة بضع سنوات، كما تأثر بالعالم الكبير Dirichlet في الكثير من دراسـاته. انظر: موريس شـربل: موسـوعة علماء الرياضـيات، دار الكتب العلمية بيروت، ص١٢٦

(19) J. Van Heijenoort (1972): “Gödel’s Theorem” in “the Encyclopedia of Philosophy” Edited By, Paul Edwards, Collier Macmillan, New York, (W.D) VoL.3, P. 349.

(20) Kurt Godel: Collected Works (1986): Volume I, Edited by Solomon Ferman, Oxford University press –New York Clarendon press –Oxford P. 126.

(21) Ibid, p.126-127

(٢٢) محمد ثابت الفندى: أصول المنطق الرياضى، دار المعرفة الجامعية، ١٩٨٩، ص ص١٠٥-١٠٦.

(*) اللا متناهى المحتمل Potentiel: بالمعنى المقصـــود هو الذى يقوم على أن كل عدد طبيعى يفترض وجود عدد أكبر منه مباشـــرة، بحيث يأتى بعد p العدد p+1 وهكذا، بينما اللامتناهى الفعلى هو الذى يقوم بتأســيس الأعداد دفعة واحدة. زبيدة مونيه بن ميسي: (٢٠١٧)، الرياضيات بنظرة فلسفية على خطى كفاييس، ص٢١٥.

(**) ما وراء الرياضيات أو الميتارياضيات Meta Mathematics: وهي عبارة عن نظرية فى الرياضيات، يولد عنها المفهوم النهائي، وهي علم جديد تمامًا له موضـــوعه الخاص به، وليســت كيانات رياضـــية تدل عليها صيغ أو معادلات، وهذه الصيغ تكون منفصلة تمامًا عن مثل هذه الكيانات وتكون مقبولة كموضوع للبحث. وما

وراء الرياضيات لها نفس العلاقة مع التعبيرات الرياضية، كما الحال بالنسبة للرياضيات المألوفة (العادية) مع الأعداد نفسها، تطور ما وراء الرياضيات بظهور اتجاهين، الاتجاه الأول: يتمثل في التأصيل من التفكير في الأساس المنطقى للهندسة، وهو ما وصل من خلال محاولة اكتماله إلى الأكسيوماتيك، والاتجاه الثانى: يهدف إلى إصلاح المنطق نفسه بمساعدة أساليب الجبر. انظر بلانشي (٢٠٠٥): المذهب الأكسيوماتيكي، ترجمة: ماهر عبد القادر، ص ص٦٥-٦٦.

(23) Stephen C. kleene: “Kurt Gödel A biographical memoir: Op.cit., p 150-151.

(24). محمد ثابت الفندى: مرجع سابق، ص١٠٦

(25)Stephen C. kleene: “Kurt Gödel A biographical memoir: Op.cit., P. 140.

(26)Alex Malpass and Marianna Antonutti Marfori(2017): The History of Philosophical and Formal Logic “From Aristotle to Tarski”, An imprint of Bloomsbury Publishing Plc, London, Oxford, New York, p. 270.

(27)Alex Malpass and Marianna Antonutti Marfori, Op. Cit., p272.

(28) Stephen C. kleene: “Kurt Gödel A biographical memoir, Op.cit., p 151.

(29) Alex Malpass and Marianna Antonutti Marfori :Op.cit, p. 244.

(*) الاتساق Consistency: هو عدم التناقض، وهو مقياس الصواب والخطأ فى العلوم الصورية (المنطق والرياضيات)، اما العلوم الطبيعية فإن مقياس الصواب والخطأ فيها هو تطابق النتائج مع الواقع. والفكرة المتسقة بذاتها هى تلك التى يكون مدلولها لا تناقض فيه ولا تكلف.مراد وهبه (٢٠٠٧): المعجم الفلسفى، دار قباء للطباعة والنشر، ص٢٠. ونظرية الاتساق: هى نظرية دعا إليها "كارناب" فى حلقة فيينا؛ مؤداها أن حقيقة أى نسق مردودة إلى الاتساق الذاتى بين قضايا هذا النسق. وأى قضية جديدة نريد إدخالها على النسق صادقة حين لا تفسد الاتساق الذاتى، وبذلك لا يخرج النسق عن كونه "مواضعة" convention، وهو مصطلح استخدمه هنرى بوانكاريه H. Poincare للدلالة على أن مبادئ العلوم وبالأخص مبادئ الهندسة ليست أحكامًا تركيبية عقلية أو تجريبية وإنما هى مواضعات. انظر، مراد وهبه (٢٠٠٧): المعجم الفلسفى، دار قباء للطباعة والنشر، القاهرة، ص٧١٤.

(٣٠) ماهر عبد القادر (٢٠١٥): نظريات المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص٩٣ .

(٣١) زكي نجيب محمود (دون تاريخ نشر): برتراندرسل، نوابغ الفكر الغربي٢، الطبعة الثانية، دار المعارف بمصر، القاهرة، ص ص٣٨-٤٣.

(*) أدى تصور الاتساق إلى زعزعة الهندسة الإقليدية، وبالتالي أدى إلى تعديلات في المنهج الإقليدي وأصبح هذا المنهج يسمى بالمنهج اليقيني الاستنباطي Deductive Categorice، واختلفت وجهة نظر المعاصرين عن أفكار إقليدس وأرسطو في الهندسة إذ يذهبون إلى :١-أن هناك تطابقًا بين المبادئ الأولية والواقع الخارجي، ٢-أن هذه الأسس ضرورية، كما يعتقدون أن هذه الأفكار الأولية بدت مجرد افتراضات غير ضرورية ولكنها تتسم بكونها غير متناقضة، حيث إن إثبات التالي في القضية الشرطية لا يستتبع بالضرورة إثبات المقدم، أي أن القضية الرياضية تحليلية وشرطية، أي أنه إذا صدقت المقدمات فلابد أن تصدق النتائج، وبذلك تغير مفهوم الصدق في الهندسات اللاأقليدية فأصبح لا يعني مطابقة القضايا للواقع وذلك طبقا لافتراض الفروض مع الالتزام بعدم التناقض بين هذه الفروض المفترضة. سهير فضل الله أبو وافية (٢٠٠٨): مرجع سابق، ص ص٢٣٠-٢٣٢ .

(32) J. Van Heijenoort: “ Gödel’s Theorem” ,Op.cit. , P. 349.

(33) Ibid., p.349.

(34) Ibid., P.P. 350.

(*) نظرية المجموعات تعدر من المفاهيم الرئيسة في الرياضيات المعاصرة، وهو من البساطة بحيث يمكن إدراكه بسهولة من خلال كثير من المواقف التى يصادفها كل منا في حياته اليومية، فمجموعة أرقام العدد ٣٨٦٣٥، هي ٨،٦،٣،٥، مجموعة الأعداد الحقيقة المغايرة للصفر، الأعداد الموجبة والسالبة، كما يوجد المجموعة الخيالية، المجموعات المنتهية وغير المنتهية. انظر: فئة من أساتذة التعليم العالي (١٩٧١): الرياضيات المعاصرة دراسة نظرية ومسائل، نظرية المجموعات، بيروت، ص ص٤٢-٤٨ .

(*) الأكسيوم المتناهى Axiome transfini: هو أكسيوم جديد يتجاوز أكسيوم الاختزال، اقترحه هلبرت فى مقاله "الأسس المنطقية للرياضيات" عام ١٩٢٣، بحيث يربط بكل محمول فى دالة قضية ذات متغير حر، ويصبح الأكسيوم هو الحد أو النهاية الذى يحقق الخاصية لكل العناصر الأخرى، ويطلق عليه ممثل –لاتناهي. وقد اعتبره هلبرت مصدرًا ومنبع كل التصورات والأكسيومات المتناهية. زبيدة مونيه بن ميسي ٢٠١٧، مرجع سابق، ص ص١٩٩-٢٠٠.

(٣٥) زبيدة مونيه بن ميسي (٢٠١٧): الرياضيات بنظرة فلسفية على خطى كفاييس، مرجع سابق، ص ص٢٠٤-٢٠٥.

(**) **حلقة فيينا Vienna circle:** وعرفت باسم حركة الوضعية المنطقية؛ شهدت جامعة فيينا ازدهارًا طيبًا للمذهب التجريبى نتيجة لتعاليم "أرنست ماخ"، الذى شغل كرسي لفلسفة العلوم الاستقرائية فى عام ١٨٩٥

لمناقشة المشكلات الفلسفية. وفى عام ١٩٢٢، تم اختيار "مورتس شليك" لشغل هذا الكرسى، إلا أنه يلاحظ أن المشاركين فى الحلقة لم تكن لهم اهتمامات فلسفية أصلا، إلا أنهم اجتمعوا على اهتمام مشترك بالمنهج كمدخل أساسى للمعرفة، حيث أراد هؤلاء أن يؤسسوا الفلسفة العلمية، وينظروا الفلسفة علميًا عن طريق ممارسة التحليل المنطقى، وكان التأثير المباشر على فلسفة دائرة فيينا، كتابات هيوم ومل وأرنست ماخ، وأفكار المنهج العلمى عند هنرى بوانكاريه وبيير دوهيم وألبرت أينشتين، والطريقة الإكسيوماتيكية عند بيانو وهلبرت، والمنطق الرياضى عند فريجة وشرودر ورسل وهوايتهد، بينما كان التأثير الأكبر لرسالة فتجنشتين التى دونت عام ١٩٢١ فلسفة الذرية المنطقية. إن الفلسفة ليست نظرية وإنما هى نشاط فعال. وانتشرت بصورة سريعة، وتكونت لها حلقة سمنار فى برلين انضم إليها هانز رشنباخ وريتشارد فون ميزس، كارل هيمبل، وفى عام ١٩٢٩ حينما أصبح جودل مواطنا نمساويًا، وأصبح هاهان المعلم المسئول عنه ،ولقد كان رياضيا للجيل الجديد الذى عاد إلى النمسا، وقد كان شغوفًا ومتحمسًا للتحليل الحديث، بنفس قدر تحمسه للمنطق وأسس الرياضيات، وفلسفة العلم، ولقد قدمه هاهان إلى جماعة الفلاسفة المحيطين بشليك بدائرة فيينا، مما أتاح لجودل معرفة أفكارهم وساعده على تكوين رؤيته الخاصه به. والتى تعارضت فيما بعد مع أعضاء الجماعة، والتى كانت سببًا مباشرا فى تركه لهم، ثم صدرت مجلة المعرفة التى تجمع أبحاث الوضعية المنطقية تحت عنوان :نظرية المعرفة عام ١٩٣٠، وقدا صدرت لهم مجموعة من مقالات تتعلق "بالتصور العلمى للعالم"، وبعد أن أشتهرت بوصفها حركة عالمية. وفى عام ١٩٣٨ حظرت السلطات النازية نشاط الحلقة فرحل نيراث إلى هولندا؛: وجودل إلى الولايات المتحدة الأمريكية. أخذ كل عضو من أعضاء الجماعة يعمل بمفرده. ماهر عبد القادر محمد (٢٠١١): كارل بوبر منطق الكشف العلمى، أورينتال، الإسكندرية، ص ص17-15. وأيضا: فؤاد كامل وآخرون (١٩٨٢): الموسوعة الفلسفية المختصرة، مراجعة: زكى نجيب محمود، مكتبة الأنجلو المصرية، ص١٢٩.

Solomon Feferman: In the light of logic, in "logic 'and Computation in philosophy, Oxford, U, press, U.S.A ., p142.

(*) وجهات النظر الأفلاطونية: كان لأفلاطون دور رئيس في الإشارة إلى موضوع المنطق وفكرة القانون المنطقي مؤكدًا أنه مثلما توجد قوانين لحركة الأفلاك، كذلك الأمر في القوانين التي تحكم حركة الأحكام العقلية لتجنب الوقوع في الضلال، معتمدًا على المنهج الجدلي الذي يسمح لنا بلوغ الأفكار العليا واجتياز مرتبة الأجناس وبذلك أوجز التقسيم الثنائي بين أكثر القضايا عمومية والانتهاء بالفكرة النوعية، وتلك القسمة أثرت تأثيرًا بالغًا في أرسطو وجعلها النوايا الأولى لفكرة القياس. انظر: حربي عباس عطيتو(٢٠٠٩): اتجاهات التفكير الفلسفي عند اليونان، الطبعة الأولى، دار المعرفة الجامعية، ص ص٢٣-٢٤.

(**) رودلف كارناب Carnap, Rudolf (١٨٩١-١٩٧٠) فيلسوف وعالم ألماني – أمريكي. ربما كان واحدًا من أهم فلاسفة العلم قاطبة .كان أحد أعضاء دائرة فينا Vienna Circle، ثم هاجر إلى الولايات المتحدة عام ١٩٣٥، وظل هناك حتي وفاته، قدم إسهامات أصيلة وجوهرية في الكثير من مجالات فلسفة العلم، أبرزها بنية النظريات العلمية، ومنطق التأكيد، والمنطق الاستقرائي، والسيمانطيقا، تركز عمله على المسائل الأبستمولوجيا، انظر: ستاتس بسليوس: فلسفة العلم من الألف إلى الياء، ص٥٣.

(***) الوضعية المنطقية: Positivisme logique: اتجاه فلسفي معاصر يعول أساسا على التجربة؛ تحقيقًا للدقة والتحليل المنطقي للغة العلماء ولغة الحديث ويعدها المصدر الوحيد للمعرفة، وليس للعقل من عمل إلا مجرد تنسيق معطياتها وتنظيمها. ثم تحولت إلى دراسة تحليلية منطقية للغة العلم؛ لتحقيق وحدة مشتركة بين فروع العلوم المختلفة، انظر: زكريا إبراهيم (١٩٨٣): المعجم الفلسفي، القاهرة، ص٢١٤.

(36) Solomon Feferman: In the light of logic, Op.cit , p.130-131.

(37) Ibid, p.142.

(38) John W. Dawson, Jr: The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems, Source: PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Volume Two: Symposia and Invited Papers (1984), Published by: The University of Chicago Press on behalf of the Philosophy of Science Association, p.255.

(39) Kurt Godel: Collected Works, Op.cit., p139.

(40) Stephen C. Kleene: "Kurt Gödel A biographical memoir , Op.cit., P. 140.

(41) Stephen C. Kleene: "Kurt Gödel A biographical memoir, Op.cit., p.138.

(42) Ibid, p. 138.

(43)Stephen C. Kleene: "Kurt Gödel A biographical memoir , Op.cit., p.p.138-139.

(٤٤) زبيدة مونية بن ميسى (٢٠١٧): الرياضيات بنظرة فلسفية على خطى كفاييس، ألفا للوثائق،الجزائر، الطبعة الأولى، ص ص١٨٥-١٨٦.

(45) جورج طرابيشي (٢٠٠٦): معجم الفلاسفة، الطبعة الثالثة، دار الطليعة، بيروت، ص٤٣٧ .

(46) John W. Dawson, Op.cit. p.p. 256-25٧.

(47) Ibid, p.25٠.

(48) John W. Dawson , Op.cit., p.266 .

(49) Ibid, p266.

(*) فيرنر هايزنبرج: فيزيائي نووي ألمانيّ (١٩٠١-١٩٧٦)، أســتاذ الفيزياء النظرية، وضـــع نظريته في ميكانيكا الكم عام ١٩٢٥م، فمنح؛ من أجل ذلك جائزة نوبل في الفيزياء لعام ١٩٣٢م، وضـــع مبدأ اللاتعين عام ١٩٢٧م، ومن مؤلفاته الطبيعية في الفيزياء المعاصرة والفيزياء والفلسفة، انظر: منير البعلبكي (١٩٩٢): معجم أعلام المورد، ط١، دار العلم للملايين، بيروت، ص٤٧٠ .

(50) Back burn ,Simon:(1996) The Oxford Dictionary of Philosophy , p 209**.**

وانظر، فيرنر هايزنبرج (٢٠١٤): الفيزياء والفلسـفة ثورة في العلم الحديث، ترجمة وتقديم: خالد قطب، الطبعة الأولى، العدد ٢٠٤١، المركز القوميّ للترجمة، القاهرة، ص٤٦.

(**) نظرية جودل Gödel Theorem: قدم كورت جودل نظرية رياضـــية فى مقال منشـــور له عام ١٩٣١ بعنوان "قضايا غير محسومة صوريا، "واردة فى كتاب "مبادئ الرياضيات " برنكيبيا ماتيماتيكا وتدلل النظرية على أن أية قضية حسابية صورية هى ناقصة بمعنى أن ثمة عبارات تعبر عن حقيقة حسابية ولكن غير مبرهنة عليها فى داخل النسق. والنسق الصورى مكون من جملة بديهيات وقواعد تستنبط منها النظريات بطريقة صورية بحتة لاعلاقة لها بالمعنى. وكل المطلوب هو أن تتسم البديهيات والقواعد بالفاعلية. مراد وهبة: المعجم الفلسفى، مرجع سابق، ص٢٨٧ .

(٥١) محمد محمد قاســم (١٩٩١): نظريات المنطق الرمزي "بحث في الحســاب التحليلي والمصــطلح"، دار المعرفة الجامعية، ص٣٧٣**.**

(*) البرهان Demonstration: هو حجة الفاصـــلة البينة يقال برهن يبرهن برهنة إذا جاء بحجة قاطعة لدى الخصم، وبرهن بمعنى بيّن عليه أقام الحجة، وفي الحديث الصدق والبرهان، والبرهان هنا الحجّة والدليل، بعض الطرق التى نستعملها للبرهنة على صـواب وخطأ القضـايا هي طرق مباشـرة والتى نغفلها طرق غير مباشـرة، هناك نوعان من البراهين غير المباشـرة بالاستناد إلى مبدأ التناقض، والذي يشير من أجل البرهنة على صـواب قضية بالاستبعاد إلى مبدأ التناقض علينا أن نبرهن أن نقيضها خاطئ، الأمر الذي يذكرنا بطريقة أرسطو للبرهنة على سـلامة أشـكال الحجج والتي كنا قد أطلقنا عليها اسـم (برهان الخلف)، والثاني باسـتعمال عكس المعكوس والذي نراه عندما نرغب في البرهنة على خطأ القضية (أ)، بهذه الطريقة نفرض أنها صحيحة، ثم نجد شيئًا ينبع بشـكل سـليم منها، ولكن من المعروف أنه خاطئ التبين أن القضـية (أ) تؤدي بشـكل سـليم إلى نتيجة خاطئة هو

إثبات على خطئها، انظر: جميل صليبا: المعجم الفلسفي، ج١، ص٢٠٦، جمال ضاهر(٢٠١٤): مدخل إلى علم المنطق، الطبعة الأولى، دار الفارابي، لبنان، ص ص٢١٨-٢١٩.

(52) Rebecca Goldstein ”Incompleteness” (2005): The Proof and Paradox of Kurt Gödel, Atlas Books,W.W.Norton&Company, NewYork, p23.

(53) Ibid, p164.

(54) Rebecca Goldstein, Op.cit., p.p.155-156.

(55) Ibid.,pp.168-177.

(56) Ibid, pp. 168-169.

(*) "بديهية زرميلو"؛ أول نسق من اقتراح إ. زرميلو فى عام ١٩٠٨ بديهية يمكن صياغتها ولكن لايمكن إثباتها بحدود من المنطق، ويعتبر زرميلو أن البديهية حقيقة لا تقبل المناقشة .كما كان له الفضل فى إظهارها مستقلة تماما عن مسألة صحتها أو بطلانها، مما جعل الرياضيين يستخدمونها دون تردد بعد أن أعلنها. موضحًا أنها تكافيء القضية القائلة بأن: "كل فصل يمكن أن يكون محكم الترتيب، أى يمكن أن يرتب فى متسلسلة لكل فصل فرعى فيها حد أول باستثناء الفصل الصفرى، والبرهان الكامل على هذه القضية صعب وبرهانه يعرف باسم "بديهية زرميلو"، فهناك على الأقل علاقة واحدة (ع) هى علاقة واحد بكثير يشتمل ميدانها العكسى على جميع الفصول الفرعية الموجودة لـــ (ا) وتكون بحيث إذا كان(س) له العلاقة (ع) مع ما كان (س) عضوا عن طريق التستقراء المتصاعد الترتيب تشتمل على جميع أعضاء (ا) وهذه المتوالية تسمى: نظرية زرميلو" انظر: م. روزنتال ويودين (١٩٦٧): الموسوعة الفلسفية العربية، ترجمة: سمير كرم، مراجعة: صادق جلال العظم وجورج الطرابيشي، دار الطليعة للطباعة والنشر، ص٤٨٧. وأيضًا: برتراند رسل (١٩٨٠): مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة: محمد موسي أحمد، ملاراجعة: أحمد فؤاد الاهواني، مؤسسة سجل العرب، القاهرة، ص ص١٣٤-١٣٥.

(57)Kurt Godel: Op.cit.,p128 .

(*) النقائض اللغوية: يقال المصطلح على نتيجة مستحيلة منطقية نستنبطها ببرهان يبدو ظاهريًا أنه سليم، وتنشأ النقائض فى القضايا التى يكون غرضها التعبير عن لغة معينة، ومن ثم فإن هذه القضية ينطبق عليها قانون عدم التناقض المنطقى، إذ إنها تبرهن على أنها صادقة وكاذبة معا. وهناك طرق مختلفة لرفع النقائض اللغوية منها: التفرقة بين ما بعد اللغة "اللغة الشارحة" واللغة الشيئية، ومن ثم فإن التعريف الدقيق للمحمولات المتطابقة فى ما

بعد اللغة. مراد وهبه، المعجم الفلسفى، مصدر سابق، ص٧٤٦. وأيضا: م. روزنتال. ويودين، الموسوعة الفلسفية، المصدر السابق، ص٥٤٨.

(**) مغالطة أو مفارقة الكذاب: تُعزى هذه المفارقة إلى يوبوليدس الملطى الميغارى، الذي قال ضمنًا: جميع الكريتيين كذابون وملخصها؛ إذا قلت إنك تكذب وكنت صادقًا، فأنت تكذب، وهذا معناه إنك صادق وكاذب في آن واحد. وهذه المغالطة وغيرها كان يوبوليدس الملطى من أنصار المدرسة الميغارية يعارض "أرسطو" في بعض آرائه المنطقية. حربى عباس عطيتو، اتجاهات التفكير الفلسفي عند اليونان (العصر الهلليني)، دار المعرفة الجامعية، ٢٠٠٩، ص٢٨٧.

(58) Rebecca Goldstein: Op.cit. , p.p 165-166 .

(59) Stephen C. kleene: Op.cit.p.154.

(60). زبيدة مونيه بن ميسى (٢٠١٧): مرجع سابق، ص٢١١

(61) Rebecca Goldstein: The Proof and Paradox of Kurt Gödel,Op.cit, pp167. 168.

(62) Ibid, p.171.

(63) Ibid, pp.170-171.

(*) بيرس تشارلز Pierce Charles (١٨٣٩-١٩١٤) فيلسوف ومنطقى أمريكى، مؤسس البرجماتية، أثرت مؤلفاته تأثيرًا مهمًا فى المنطق الرياضى والوضعية الجديدة، وفهم المنطق باعتباره "نظرية عامة فى العلاقات" وتعتبر من أهم مؤلفاته الرئيسة فى مجال نظرية الأحتمال ومنطق العلاقات. م. روزنتال: الموسوعة الفلسفية، مصدر سابق، ص٩٨.

(64) برتراند رسل (١٩٦٤): أصول الرياضيات، ترجمة: محمد موسى أحمد، واحمد فؤاد الاهواني، دار المعارف، بصر، ج٤، القاهرة، ص٦٠-٦١ .

(65). محمد مهران (١٩٧٨): مقدمة فى المنطق الرمزى، دار الثقافة للطباعة والنشر، القاهرة، ص٣١٥

(66). زبيدة مونيه بن ميسى (٢٠١٧)، مرجع سابق، ص٢١٢

(67) Rebecca Goldstein: The Proof and Paradox of Kurt Gödel, Op.cit., p. 183.

(68) Robert K. Meyer (1996): Kurt Gödel and the Consistency of R## in Gödel 96 Logical Foundation of Mathematics, computer science and physics, edited by Petr Hajek, Brno, Czech Republic. P.247.

(69) محمد محمد قاسم (١٩٩١): نظريات المنطق الرمزى، مرجع سابق، ص٣٧٣.

(70) Robert K. Meyer, Op. Cit., P.248.

(71) Kurt Godel: Collected Works: Op. cit., P 129.

(72) Robert K. Meyer: Op.cit., P. 248.

(*) العدد Number: هو أحد المفاهيم العقلية الأساسية، وهو بهذا الاعتبار لا يحتاج إلى تعريف، ويسمي بالكم المنفصل، بخلاف الكم المتصل، وهو ما كان بين أجزائه حد مشترك، وعلم العدد هو العلم الرياضي المحض، ويقسم إلى علم الكم المنفصل: الحساب والجبر، المتصل: الهندسة وحساب اللانهايات. ونظرية الأعداد تعد فرعًا من العلم الرياضي وهي تبحث في اختلاف الخواص العددية باختلاف الاعداد، خلاف الخواص المشتركة المسماة بالخواص الجبرية. والعددإأما سالب أو موجب. ومجموع الأعداد السالبة والموجبة أطلقوا عليهم الأعداد الجبرية، انظر: جميل صليبا (١٩٨٢): المعجم الفلسفي، الجزء الثاني، دار الكتاب اللبناني، ص ص٦٠-٦١.

(*) نظرية الأنماط: وضعها "رسل" من خلال ملاحظة أن التناقض الظاهري الذي اكتشفه "رسل" سببه أن صفة عدم كون الفئة فردًا من نفسها تنطبق على الفئة التى تضم كل الفئات التى تحمل تلك الصفة. لكن إذا أمكن ابتكار قيد يقضي بأن هذه الصفة قابلة لتنطبق على الفئات التى تضم أفرادًا فقط وليس على الفئة التى تضم فئات؛ فلن ينشأ تناقض ظاهري، ويوحي هذا أنه لابد من وجود شيء ما يعد فارقًا يتألف من مستويات فيما بين الصفات، بحيث إن الصفات المسندة في مستوى معين يتعذر إسنادها عند مستوى أعلى، توجد صيغة أخرى لنظرية الأنماط اقترحها عالم الرياضيات والفيلسوف فرانك رامزي: باسم النظرية البسيطة للأنماط، وهذه النظرية تشير إلى أن: اللغة التى تنطبق على حقل معين تحمل تعبيرات جبرية من المستوى ١-الأسماء وتشير إلى الأشياء الموجودة في الحقل وتحمل تعبيرات جبرية من المستوى. ٢-المحمولات وتشير إلى صفات تلك الأشياء فقط وتحمل تعبيرات جبرية من المستوى. ٣-محمولات–المحمولات وتشير إلى صفات تلك الصفات فقط وهكذا. انظر: إيه سي جرايلينيج (٢٠١٤): برتراندرسل، ترجمة: إيمان جمال الدين الفرماوي، الطبعة الأولى، مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة.

(73) Robert K. Meyer: Op.cit., p250.

(74) J. Van Heijenoort: "Gödel's theorem", op.cit., P. 354.

(**) هذه العبارة من حين لآخر تشير إلى مبرهنة جودل الأولى، ويضاف أن: الصيغة التى لايمكن تحديدها صادقة" والنتيجة اللازمة لهذه المبرهنة، أن اتساق النسق الصورى كاف لنظرية العدد لايمكن البرهنة عليه من

خلال النسق (ينتج فى بعض الأحيان الإشارة إلى مبرهنة جودل وأيضا المبرهنة الثانية لجودل)، وهذه النتائج نشرها جودل عام ١٩٣١، وكان قد قدم عرضًا موجزًا لها.

J. Van Heijenoort: “Gödel’s theorem”, op.cit., P. 348.

(*) مصطلح الصورية Formalism: الصورية بوجه عام اتجاه يرمي إلى التعويل على الشكل دون المضمون وإهمال العنصر المادى، وفيه الصورية فى علم المنطق الصوري؛ لأنه يقيم قوانينه دون الاستناد للتجربة. انظر: عبد المنعم الحفنى، المعجم الفلسفي، ص١٧٠. وأيضا: مراد وهبه، المعجم الفلسفي، مرجع سابق، ص٩٦. ولقد مثلت الصياغة الصورية منهجًا لتحقيق مضمون المعرفة على نحو أكثر دقة؛ لذا يعد منهجًا معرفيًا إبستمولوجيًا يساعد على إقرار وتحديد المضمون عن طريق تحقيق وتثبيت شكله. ولهذا تعد جانبًا جوهريًا لعملية الإدراك. وقد نشأ هذا الجانب مع نشأة الفكر واللغة وظهور اللغة المكتوبة، ومع تطور العلم وخاصة الرياضيات حيث أضيفت علامات ذات طبيعة خاصة، وظهر منهج الصياغة الصورية المنطقية جنبًا إلى جنب مع المنطق الصورى. يقوم بإستخراج صورة منطقية للنتائج والبرهان، إذ إن خلق حساب التفاضل والتكامل فى الرياضيات وفكرة الحساب الكلى عند ليبنتيز طورت تلك المناهج، وأدى بناء الحساب المنطقى إلى إمكان تطبيق مناهجه فى تحقيق الصياغة الصورية لفروع العلم بأسرها. واكتسبت مجالات المعرفة التى تمت صياغتها صوريًا طابع الأنساق الصورية، والصياغة الصورية للمعرفة لاتستبعد العلاقة المتناقضة بين المضمون والشكل. ويقوم عدم التطابق هذا بين الصياغة الصورية والمضمون المصاغ صوريا كمصدر داخلى لتطوير الوسائل المنطقية الصورية للعلم، كماتيظهر أيضًا النقيضة المنطقية والتي يحاول حلها من خلال بناء أنساق صورية جديدة لصياغة الأجزاء التى لاتشملها الصياغات الصورية السابقة وهكذا تتحقق صياغة صورية أعمق للمضمون ولكن الاكتمال المطلق لايتحقق أبدًا.(م. روزنتال ويودين: الموسوعة الفلسفية، مصدر سابق، ص ص٢٧٩-٢٨٠.

(٧٥) م.روزنتال ويودين: الموسوعة الفلسفية، المصدر السابق، ص٣٢٢.

(76) Stephen C. kleene: “Kurt Gödel A biographical memoir”, Op.cit., p153.

(77) Ibid, p.p.153-154.

(78) برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص ص١٥٠-١٥١.

(79) Kurt Godel: Collected Works, Op.cit. , P. 128.

(80) Ibid, p.130.

(81). برتراندرسل: أصول الرياضيات، مرجع سابق، ص ص١١٠-١١٥

(82) Kurt Godel: Collected Works, Op.cit.,p.130.

(83) Ibid., p.131.

(84) Kurt Godel: Collected Works,Op.cit., p.131.

(85) Ibid. , P. 131.

(86) Ibid.,pp.131-132.

(87) Kurt Godel: Collected Works, Op.cit, p.132.

(88) Ibid,p.p. 132-133.

(89) Kurt Godel: Collected Works,Op.cit., p 133.

(90) Ibid., p.p.133-134.

(91) Kurt Gödel: Collected Works, Op.cit., P. 135.

(92) Alex Malpass and Marianna Antonutti Marfori:Op.cit., p. 269.

(93) Kurt Godel: Op.cit., P.127.

(94) Ibid, P.128.

(95) Kurt Godel: Op.cit, p ١٢٨.

(96) Ibid, p.129.

(٩٧) محمد أحمد مصطفي، السرياقوسي، محمد فتحي، الشنيطي (١٩٨٢): المنهج الرياضي بين المنطق والحدس، رسالة دكتوراة، جامعة الزقازيق، ص ص١٨-١٩.

(٩٨) محمد أحمد مصطفي، السرياقوسي، محمد فتحي، الشنيطي، المرجع السابق، ص٢٠.

(٩٩) زكي نجيب محمود: برتراند رسل، نوابغ الفكر الغربي٢، ط٢، دار المعارف بمصر، القاهرة، ص٤٣- ٤٥.

(١٠٠) المرجع السابق، ص ص٤٧-٤٨.

(١٠١) زكي نجيب محمود: برتراند رسل، المرجع السابق، ص ص٥١-٥٢.

(*) الإمكان: الإمكان في اللغة، مصدر أمكن إمكانا كما تقول أكرم إكرامًا وهو أيضًا مصدر مكن الشيء من ذاته: تقول أمكن الأمر فلانًا ولفلان سهل عليه وأيسر له فعله وقدر عليه، الامكان في اللغة الإنجليزية يطلق على الأفعال والحوادث الممكنة، والإمكان من مقولات(كانت) وهو مقابل للوجود والضرورة والقضايا التي يدخل فيها الإمكان تسمى عنده القضايا الممكنة ويقابلها من ذوات الجهة فيها الجهة الوجودية والضرورية، الإمكان إما أن يعني به ما يلزم سلب ضرورة العدم وهو الإقناع على ما هو موضوع له في الوضع الأول،

وهناك ما ليس بممكن فهو ممتنع. والواجب محمول عليه هذا الإمكان. وإما أن يعني به ما يلازم سلب الضرورة في العدم والوجود جميعًا على ما هو موضوع له بحسب النقل الخاص، حى يكون الشيء يصدق عليه الإمكان الأول في نفيه وإثباته جميعًا حتى يكون ممكنًا أن يكون وغير ممتنع أن لا يكون. انظر: جميل صليبا: المعجم الفلسفي، الجزء الأول، مصدر سابق، ص ص١٣٤-١٣٥، فريد جبر وآخرون (١٩٩٦): موسوعة مصطلحات علم المنطق عند العرب، الطبعة ناشرون، الطبعة الأولى، مكتبة لبنان، ص ص١٠٩-١١٠.

وضع جودل وجهات النظر الفلسفية فى نطاق محدد وفقا لتقاربها أو تباعدها عن الميتافيزيقا. فوضع أكثرهم بعدًا عن الميتافيزيقا على اليسار، حيث وضع أصحاب المذهب الشكي، والمادي، والوضعي، التجريبي، التشاؤمي، بينما وضع على اليمين، المذهب المثالي، اللاهوتي، والتفاؤلى. لاحظ جودل أن الفلسفة قد تطورت تطورًا هائلا منذ رينسانس من اليمين إلى الشمال تعاطفه مع الجانب الأيمن والذى يتوافق مع الصورة التى لديه عن وجهات نظر العالم، والتى حصل عليها من وانج Wang ١٩٨٧، قدم جودل العديد من التعبيرات الواضحة عن هذا الرأى ووجهات النظر فى كتاباته ومحاضراته.

Dagfinn Follesdal: Op. Cit, P.364.

(102) Ibid, P.364.

(103) Rebecca Goldstein:"Incompleteness", Op.cit, p.24 .

(*) فى رد "رسل" الرياضيات لأفكار المنطق مخالفة صريحة لكانط الذى ردها إلى ما فى تركيبنا الذهنى من حدوس للمكان والزمان، والتى من شأنها تبني الأحكام التركيبية القبلية للرياضيات، وبذلك غدت قضاياها أشبه بالقضايا المنطقية الشرطية بما تحمله من دلالة على طبيعة ما تقرره من صدق أو صحة (وفقًا لمفهوم تضمن الشرط لجوابه دون تقرير شئ عن الوجود الخارجي؛ بالإضافة إلى دلالة بنيتها التركيبية (صور منطقية صرفة تتكون من ثوابت ومتغيرات). محمد ثابت الفندى (١٩٦٩): فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية ،بيروت، طبعة أولى ،ص ص١٣٤-١٣٥ (بتصرف).

(104) A.N .Prior (1972): Russell, Bertrand Arthur William, in "The Encyclopedia of Philosophy", Edited By: Paul Edwards, Collier Macmillan, New York, Vol. 7, p.245.

(١٠٥) ستيفن هوكنج (٢٠٠٣): الكون في قشرة جوز، ترجمة: د. مصطفي إبراهيم فهمي، العدد٢٩١، عالم المعرفة، المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب الكويت، ص١٢٩.