



مجلة البحوث المالية والتجارية

المجلد (22) – العدد الثاني – إبريل 2021



تطبيق طريقة بوتستراب البواقي لتقليل آثار الازدواج الخطي
باستخدام لغة R

Applying Residuals Bootstrap Method to Reduce the Effects of Multicollinearity Using R

د. عماد محمد سالم سيد سالم

مدرس الإحصاء – كلية الاقتصاد والإدارة – جامعة 6 أكتوبر

أستاذ مساعد الإحصاء – معهد الإدارة العامة – الرياض

رابط المجلة: <https://jsst.journals.ekb.eg/>



المستخلص

عادة ما نواجه مشكلة الازدواج الخطي في نموذج الانحدار الخطي المتعدد عند خرق افتراض استقلال المتغيرات المفسرة، مما يسبب خللاً في للحصول على أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE، باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية OLS، مما يؤدي إلى تضخم الأخطاء المعيارية لمقدرات طريقة المربعات الصغرى، وبالتالي اتساع فترات الثقة.

واقترحت الدراسة استخدام طريقة بوتستراب البواقي كإحدى طرق أسلوب إعادة المعاينة، وذلك بهدف تقليص آثار الازدواج الخطي، حيث أثبتت الدراسة أنه عند تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد لمتغيرين فقط، وفي ظل وجود مشكلة الازدواج الخطي، للعينات أقل من أو يساوي 30 مشاهدة، فإن تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي باستخدام طريقة بوتستراب البواقي، يعطي نتائج أفضل من التقدير باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، وتم التحقق من ذلك باستخدام لغة البرمجة الإحصائية R، من خلال دراسة المحاكاة، وبالتطبيق على مجموعتي بيانات، حيث أوضحت نتائج دراسة المحاكاة والتطبيق أن مقدرات طريقة بوتستراب البواقي لها فترة ثقة أقل طولاً، وأخطاء معيارية ذات قيم أقل.

الكلمات المفتاحية

الازدواج الخطي، إعادة المعاينة، بوتستراب، بوتستراب البواقي.

Abstract

The problem of multicollinearity in the multiple linear regression model occurs when the assumption of independence of the explanatory variables is violated. This causes a defect in obtaining the best linear unbiased estimator BLUE, using the OLS method, which leads to amplification of the standard errors of the OLS method estimators, thus expanding the Confidence intervals.

This study shows that using residuals bootstrap method gives better results than OLS method when estimating the parameters of the multiple linear regression model for two variables that have multicollinearity. This was verified using R Language through a simulation study, and by applying to two data sets. The results of simulation and application showed that residuals bootstrap estimators have a narrower confidence interval length and standard errors with lower values than OLS estimators. This was true for all degrees of multicollinearity between two explanatory variables when the sample size is less than or equal to 30 observations.

Key words

Multicollinearity, Resampling, Bootstrap, Residuals Bootstrap, R Language.



1- مقدمة

ازدهرت في الآونة الأخيرة الطرق المعتمدة على برامج الحاسب الآلي، كنتيجة لكبر حجم البيانات فيما يسمى بالبيانات الضخمة Big data والتطور الهائل في الخوارزميات، والتي كان لها دورٌ كبيرٌ في مجال الإحصاء التطبيقي، ومنها أسلوب إعادة المعاينة Resampling Technique، والذي تزايد الاعتماد عليها، حيث تبنى هذه الطريقة على سحب عدد كبير من العينات من نفس حجم العينة الأصلية مع الإرجاع، ويتم في كل عينة تقدير الإحصائية محور الاهتمام، وبعد ذلك أخذ التوقع الرياضي للإحصاءات المقدرة من كافة العينات المسحوبة، مما يعطي توزيعاً عينياً مشابهاً للتوزيع في المجتمع، وبالتالي يمكن الحصول على تقدير غير متحيز للإحصائية محور الاهتمام (Efron, 1993). وفي هذا البحث تم استخدام طريقة بوتسترب Bootstrap لتقدير معلمات معادلة الانحدار الخطي، كإحدى طرق إعادة المعاينة، كما أنها إحدى أساليب الطرق المكثفة للحاسب الآلي CIM's، حيث تم استخدام إمكانات لغة البرمجة الإحصائية R في عملية التنفيذ باستخدام المحاكاة والتطبيق. وبالرغم من أنه عادةً ما يتم تقدير معلمات معادلة الانحدار الخطي بطريقة المربعات الصغرى العادية OLS لأنها تعطي أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE (Gujarati, 2004)، إلا أنه لكي يتم الحصول على هذا المقدر بهذه الطريقة لابد من توافر مجموعة من الافتراضات، والتي يؤدي خرق أحدهم إلى آثار غير مرغوبة في خصائص المقدرات وعملية الاستدلال الإحصائي، ومن الناحية العملية يستخدم أغلب الباحثين نموذج الانحدار الخطي المتعدد والذي يشترط عدم وجود ازدواج خطي عند تقدير معالمته، فالازدواج الخطي Multicollinearity ظاهرة عينية بالضرورة، ولا بد من التعامل معها لما لها من آثار سيئة من تضخم الأخطاء المعيارية لمقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية، وبالتالي اتساع فترات الثقة، مما يزيد من احتمال قبول فرض العدم وهو خاطئ (احتمال الخطأ من النوع الثاني β)، وبالتالي عدم القدرة على الاستدلال الإحصائي بدقة عن معالم نموذج الانحدار الخطي المتعدد في ظل وجود الازدواج الخطي. ولذلك تم اقتراح استخدام طريقة بوتسترب البواقي في تقدير تلك الأخطاء المعيارية، وذلك باستخدام العينة التي تم الحصول عليها من الدراسة لعل تقريب توزيع معاينة لتقدير الخطأ المعياري لمقدرات نموذج الانحدار، مما يعطي قدرة أكبر على الاستدلال الإحصائي بصورة دقيقة.

2- مشكلة البحث

تبرز الحاجة للاستدلال عن معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد باختبار مدى معنوية مقدراته كمرحلة لاحقة لتقديره. وغالباً ما يستخدم نموذج الانحدار الخطي المتعدد المقدر بطريقة المربعات الصغرى العادية، والتي يتطلب تطبيقها توافر مجموعة من الافتراضات، وينصب البحث على شرط استقلال المتغيرات المفسرة خطأ كأحد هذه الافتراضات. وفي الواقع العملي، غالباً ما يواجه الباحثين بيانات لا يتوفر فيها شرط الاستقلال، وذلك بدرجات مختلفة من الازدواج الخطي، مما يؤدي إلى نتائج مضللة، نظراً لتضخم الأخطاء المعيارية للمقدرات، والذي يترتب عليه عدم القدرة على إجراء الاستدلال الإحصائي لمعلمات نموذج الانحدار بصورة دقيقة.

ويمكن صياغة مشكلة الدراسة من خلال التساؤل البحثي التالي:

1. ما مدى فعالية استخدام طريقة بوتستراب لتقليل آثار الازدواج الخطي؟
2. ما الحالات التي يفضل فيها استخدام طريقة بوتستراب في تقدير فترات ثقة مقدرات معلمات الانحدار الخطي المتعدد؟

3- هدف البحث

يهدف هذا البحث للتعامل مع مشكلة الازدواج الخطي باستخدام طريقة مقترحة معتمدة على لغة البرمجة الإحصائية R. حيث يقترح البحث حلاً غير تقليدي مبني على استخدام طريقة بوتستراب في تقدير فترة ثقة لمعلمات النموذج واختبار فروضه، وذلك بتقدير الأخطاء المعيارية للمقدرات $\hat{\beta}$ باستخدام بوتستراب، والمقارنة بين الأخطاء المعيارية وفترات الثقة للمقدر الناتجة عن طريقة OLS وطريقة Bootstrap بواسطة دراسة المحاكاة والتطبيق، وذلك وفقاً لدرجات مختلفة من الازدواج الخطي، وأحجام عينات مختلفة، وذلك لأغراض المقارنة لتحديد الحالات المثلى لاستخدام البوتستراب.

4- أهمية البحث

تعتبر مشكلة الازدواج الخطي من المشكلات التي تناولها العديد من الباحثين ولم يتم التوصل لحل نهائي لها حتى الآن، وتزداد عدم القدرة على التوصل إلى تقديرات دقيقة في حال



كون تباينات وتغايرات مقدرات OLS كبيرة وفقاً لدرجة الازدواج الخطي، مما يؤدي إلى نتائج مضللة عند تجاهل وجود مشكلة الازدواج الخطي أو عدم معالجتها بأسلوب فعال. لذا فمن الأهمية التعرض لتلك المشكلة، حيث تم اقتراح طريقة بوتستراب كحل لهذه المشكلة، من خلال كونه مدخلاً عاماً للاستدلال الإحصائي يعتمد على بناء توزيع المعاينة الإحصائية بإعادة المعاينة من البيانات المتاحة كحل بديل يضاف لمجموعة الحلول الحالية. وتبرز أهمية البحث من خلال كونه يتبنى مدخلاً مقترحاً لحل تلك المشكلة بما يمكن من تقدير معاملات النموذج بصورة أكثر دقة وبالتالي زيادة القدرة على التنبؤ، فضلاً عن اختبار الفروض بصورة صحيحة، كما تنفرد طريقة بوتستراب عن طريقة المربعات الصغرى العادية بإمكانية تقدير معاملات نماذج الانحدار الخطي المتعدد في حالة الازدواج الخطي التام بدون إجراء أي تعديل في بيانات العينة الأصلية، كما هو الحال عند استخدام طريقة تقدير معلمة ريدج.

5- أسباب الازدواج الخطي وآثاره

تشير مشكلة الازدواج الخطي إلى وجود ارتباط خطي بين متغيرين أو أكثر من المتغيرات المفسرة، لذا فهذه المشكلة لا تحدث في حالة الانحدار البسيط، وينشأ الازدواج الخطي لأسباب عدة من أهمها اتجاه المتغيرات المفسرة مع التغير مع الزمن، فمثلاً بمرور الزمن تتزايد المتغيرات الاقتصادية التالية معاً: الدخل، الاستهلاك، الادخار، الاستثمار، وحيث أن هناك ارتباط بين هذه المتغيرات فإن الازدواج الخطي سوف يتحقق. كما ينشأ الازدواج الخطي أيضاً بسبب استخدام متغيرات مفسرة ذات فترة إبطاء في المعادلة المراد تقديرها، فالدخل في الفترة الزمنية الحالية يتحدد جزئياً بواسطة قيمته في الفترة الزمنية السابقة، وحيث أن هناك ارتباط بين القيم المتتالية لمتغير ما، فإن الازدواج الخطي سوف يتحقق.

ويترتب على حدوث الازدواج الخطي زيادة التباين للمقدرات بدرجة كبيرة دون التأثير على التنبؤات المستمدة من الانحدار، وتكون القيم المقدرة لمعاملات الانحدار غير محددة وغير دقيقة. وكذلك تضخم الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار، مما يؤدي إلى نتائج مضللة للاستدلال الإحصائي.

6- طريقة بوتستراب

قدّم (Efron, 1979) طريقة البوتستراب لأول مرة عام 1979، وتم تطويرها عام 1993 بواسطة (Efron and Tibshirani, 1993) كطريقة من طرق إعادة المعاينة، ويتم استخدام بوتستراب لإيجاد التقديرات الإحصائية المختلفة، حيث استخدمها Efron في بادئ الأمر لتقدير الخواص الإحصائية مثل التباينات وفترات الثقة. ومنذ ذلك الحين كان هناك استخدام واسع النطاق للبوتستراب في حل المشكلات التطبيقية. وتعتمد طريقة بوتستراب على المعاينة العشوائية مع الإحلال لعدد كبير جداً من العينات ذات الحجم المتساوي من عينة الدراسة الأصلية، على أن يتم سحب مفردات كل عينة بصورة مستقلة، وفي كل مرة يتم حساب المعامل الإحصائي والذي يرمز له بالرمز T^* ، المحسوب من عينات بوتستراب التي يرمز لها بالرمز S^* ، مُكوّناً عدداً كبيراً جداً من المعاملات والتي تنشئ ما يسمى بتوزيع بوتستراب، وتكون القيمة المتوقعة لهذا التوزيع هي تقدير للظاهرة المقاسة (معلمة المجتمع).

ويستخدم بوتستراب للاستدلال على خصائص المجتمع من خلال عينة واحدة عشوائية مسحوبة من نفس المجتمع، وعادةً ما تكون هذه العينة هي المعلومة الوحيدة المعروفة عن المجتمع، ولذا فمن المهم أن تكون العينة ممثلة للمجتمع. وبالتالي يمكن اعتبار بوتستراب مدخل للاستدلال الإحصائي مبني على بناء توزيع معاينة للمعامل الإحصائي محل الاهتمام، من خلال إعادة المعاينة للبيانات المتاحة. وفي هذه الحالة نستخدم بيانات العينة كأنها مجتمع، ونسحب منها عينات بتكرار. حيث تبني فكرة البوتستراب على تقدير التوزيع الاحتمالي للبيانات بدقة تزيد بزيادة عدد المكررات، ثم يتم إيجاد أو تقريب توزيع المعاينة للإحصائية تحت ذلك التوزيع المقدر. وسيتم التركيز على طريقة البوتستراب اللامعلمية، لأنها تسمح بتقدير توزيع المعاينة للإحصائية تجريبياً دون وضع افتراضات حول شكل المجتمع.

والمبدأ الأساس للبوتستراب هو أن المجتمع (P) بالنسبة للعينة (S)، مثل العينة بالنسبة لعينات بوتستراب (S^*) وهو ما يمكن التعبير عنه بما يلي:

$$P \text{ vs. } S \sim S \text{ vs. } S^*$$

$$P = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$





$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

With \downarrow replacement

$$S^* = \{x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n\}$$

وعادة ما يتم تنفيذ طريقة البوتستراب بمجموعة من الخطوات الحسابية، ففي حالة طريقة بوتستراب اللامعلمية تكون خطوات تنفيذ الخوارزم algorithm كالتالي:

1. سحب عينة عشوائية، بإرجاع، من نفس حجم العينة الأصلية n.
2. استخدام بيانات العينة الجديدة في حساب المعامل الإحصائي محل الاهتمام.
3. تكرار الخطوات (1)، (2) عدد R مرة.
4. حساب الانحراف المعياري (مثلاً) لعدد R من الإحصاءات.

ومن المتغير العشوائي الناتج من الخطوة الأخيرة، يمكن معرفة الخصائص الدقيقة Exact والتقاربية Asymptotic.

وقد أوضح (Wei Zhen, 2009) أنه تحت شروط احتمالية معينة، والتي عادة ما تكون صحيحة في الواقع، فإن البوتستراب يقدم دائماً نتائج أكثر دقة وثباتاً **More accurate and reliable** من الطرق التقليدية، وخصوصاً للاستدلال المبني على العينات الصغيرة، فلا توجد قاعدة عامة لاختيار أسلوب عن آخر، وإنما يعتمد التحليل على البيانات محل الدراسة.

7- طريقة البوتستراب في الانحدار الخطي

بالرغم من أن التوزيع الأصلي للبيانات محل الدراسة قد يكون غير طبيعياً، إلا أن توزيع بوتستراب التقاربي **Asymptotic Bootstrap Distribution** يقترب من التوزيع الطبيعي، الأمر الذي يسهل استنباط العديد من النتائج الإحصائية. وتلك الميزة –وبالإضافة إلى قوة لغة R– أدت إلى انتشار وشيوع استخدام هذه الطريقة في التقديرات الإحصائية المختلفة، وخصوصاً في تقدير معاملات نموذج الانحدار، إذ لم يتوفر شرط الطبيعية. ويعتبر البوتستراب من الأدوات القوية **Powerful** لتقريب التحيز والخطأ المعياري للمقدر في النماذج الإحصائية المعقدة. حيث يؤكد (Freedman, 2005) أنه مع وجود n كبيرة بدرجة معقولة **reasonably large** فإن

توزيع $\hat{\beta} - \beta^*$ يعتبر تقريب جيد لتوزيع $\hat{\beta} - \beta$. وأيضاً تعتبر مصفوفة التباين والتغاير التجريبية لـ $\hat{\beta}^*$ تقريباً جيداً لمصفوفة التباين والتغاير النظرية لـ $\hat{\beta}$.

ولتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي يمكن إعادة المعاينة باستخدام البوتستراب في نموذج الانحدار الخطي بطريقتين (Efron and Tibshirani, 1993)، إما لأزواج المشاهدات (الحالات)، أو للبواقي. حيث في الطريقة الأولى **Cases Resampling bootstrap method** تكون random-x Resampling method، وتكون العينة الأصلية حجمها n ومفردات هذه العينة هي $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ، وبإعادة المعاينة عشوائياً وإرجاع، يتم تكوين عينة بوتستراب $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*)$ مأخوذة باستقلال باحتمال متساوي n^{-1} من (y_j, x_j) وبتقدير معلمات نموذج الانحدار من البيانات الجديدة بطريقة المربعات الصغرى مثلاً، وبتكرار تكوين عينة بوتستراب وتقدير مقدر المربعات الصغرى عدد R مرة يصبح لدينا عدد R من التقديرات، ويكون مقدر بوتستراب هو متوسط تلك القيم.

وفي الطريقة الثانية **Residuals resampling bootstrap method** والتي تكون **fixed-x Resampling**، يتم بناء نموذج انحدار بالبيانات الأصلية $y = x\beta + u$ ، ثم يتم حساب البواقي $e = y - x\hat{\beta}$ ، وتعتبر العينة الأصلية للبواقي هي e_1, \dots, e_n ، ثم يتم إعادة المعاينة منها عدد n مرة عشوائياً وإرجاع، ليتم الحصول على الأخطاء البوتسترابية u_1^*, \dots, u_n^* وذلك بافتراض أن البواقي تمثل حدود الأخطاء - والتي يتم استخدامها في تكوين المتغير التابع $y^* = x\hat{\beta} + u^*$ ، والذي بدوره سيتم استخدامه مع بيانات X الأصلية لنحصل على المقدر $\hat{\beta}^* = (x'x)^{-1} x'y^*$ وبالتكرار عدد R من المرات ثم أخذ المتوسط يتم الحصول على مقدر بوتسترابي.

في إعادة معاينة الحالات، فإن مصفوفة التصميم المعاد معاينتها لا تساوي المصفوفة الأصلية، ولهذا تم اعتماد استخدام طريقة بوتستراب البواقي، لأنها تحتفظ بنفس هيكل مصفوفة المتغيرات المفسرة.



8- منهجية البحث

يسعى البحث إلى تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي في ظل وجود درجات مختلفة من الازدواج الخطي بمقارنة طريقتين للتقدير، وهما طريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة بوتستراب البواقي، ومعرفة حالات أفضلية طريقة بوتستراب البواقي، والظروف التي تكون بها ملائمة، ولتحديد ذلك سيتم عمل دراسة محاكاة والتطبيق على مجموعتي بيانات فعلية.

ويتم تنفيذ المحاكاة بالاعتماد على عاملين وهما:

1. درجة الارتباط r بين المتغيرات المفسّرة: وهي درجة الارتباط المعبرة عن الازدواج الخطي، حيث تأخذ المستويات (0.1، 0.2، 0.3، 0.4، 0.5، 0.6، 0.7، 0.8، 0.9، 0.99).
2. حجم العينة n : حيث تم تحديدها بالمستويات (5، 10، 20، 30).

ولأغراض توليد متغيرات مفسّرة بدرجات مختلفة من الارتباط المفترض مسبقاً تم إنشاء برنامج بلغة R اعتماداً على الخوارزم الخاص بدراسة كل من (Halawa and Azzam, 1995)، والذي أضيفت فيه فترات ثقة بوتسترابية المستخدمة في الانحدار، حيث تم إضافة الدالة Boot Function في الحزمة (Fox and Sanford, 2012) Car Package، وتم توليد الخطأ العشوائي u وفقاً لتوزيع معتدل بمتوسط يساوي الصفر وقيمة ثابتة مفترضة للتباين ولتكن 0.1156، ولتوليد قيم المتغير التابع Y المناظرة لنموذج انحدار به متغيرين مفسّرين، يتم افتراض قيم المعلمات $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ بالقيم 0.5, 1.0, 1.5 على التوالي.

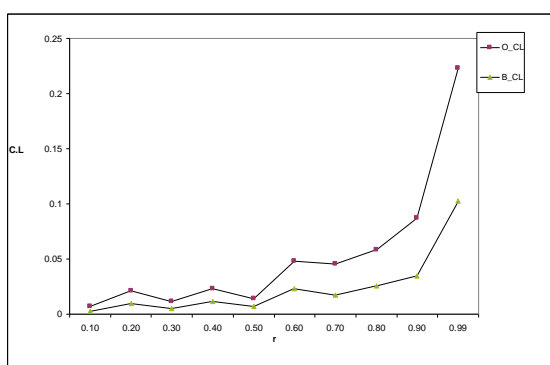
بعد توليد البيانات -والمدرجة بالملاحق- تأتي الخطوة التالية، وهي تقدير تلك النماذج باستخدام طريقة OLS وحساب فترة الثقة، ثم باستخدام طريقة Bootstrap وحساب الانحراف المعياري لعدد مقدرات بوتستراب البواقي (ولتكن 1999 مقدر)، ليتم الحصول على فترة الثقة المعتمدة على الخطأ المعياري البوتسترابي. وتتم مقارنة الأخطاء المعيارية الخاصة بالطريقتين، ويكون معيار الأفضلية هو فترة الثقة الأقل طولاً، حيث يتم حساب طول فترة الثقة Confidence Interval Length الخاصة بمقدرات كل من المربعات الصغرى العادية (والتي من المتوقع أن تكون أطول في حالة وجود ازدواج خطي) وبوتستراب البواقي (والتي من المتوقع أن تكون أقل طولاً). وتكون الأفضلية لفترة الثقة ذات الطول الأقل.

ويمكن تلخيص خطوات الخوارزم باستخدام لغة R فيما يلي:

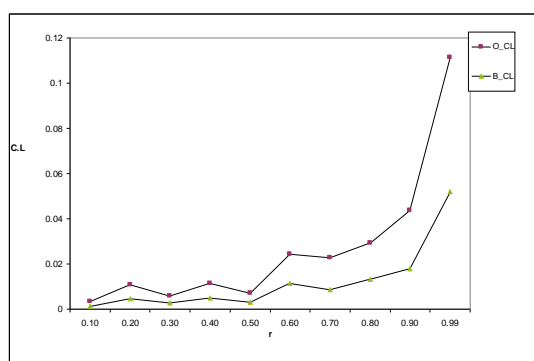
1. توليد مصفوفة المتغيرات المفسرة بدرجات ارتباط محددة مسبقاً.
2. تكوين نماذج انحدار خطية متعددة.
3. تقدير معلمات نماذج الانحدار الخطي المتعدد بطريقة المربعات الصغرى العادية وحساب الفرق بين حدي فترة الثقة (طول فترة الثقة CIL).
4. تقدير معلمات نماذج الانحدار الخطي المتعدد بطريقة المربعات الصغرى العادية بوتستريباً عدد 1999 مرة، ليتكون 1999 مقدرًا، ثم حساب الخطأ المعياري لتلك المقدرات، ومن خلاله يتم حساب طول فترة الثقة البوتستريبية.
5. يتم رسم خطوط بيانية لأطوال فترة الثقة طريقتي المربعات الصغرى العادية والبوتستريبية.
6. التطبيق على البيانات الثانوية، لمقارنة نتائج الأخطاء المعيارية لكل من طريقتي المربعات الصغرى العادية وبوتستراب البواقي.

9- نتائج المحاكاة

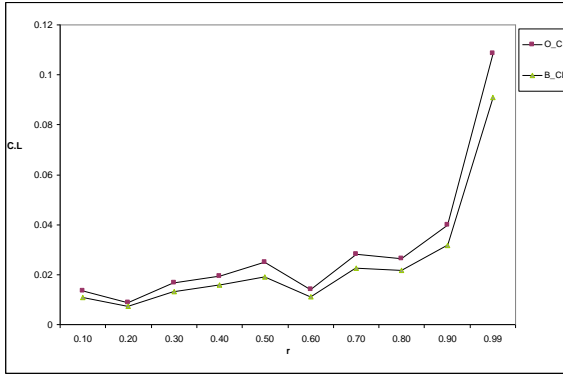
بالوصول على نتائج دراسة المحاكاة والمدرجة في الملحق، تم رسم طول فترة الثقة لطريقتي المربعات الصغرى العادية وبوتستراب البواقي، ويتضح من أشكال الخطوط البيانية لجميع الحالات أن الخط البياني الخاص بطول فترة الثقة البوتستريبية يقع أسفل الخط البياني الخاص بطول فترة ثقة طريقة المربعات الصغرى العادية، مما يعكس أفضلية فترة الثقة البوتستريبية لكافة أحجام العينات محل البحث، وجميع مستويات الازدواج الخطي المختلفة.



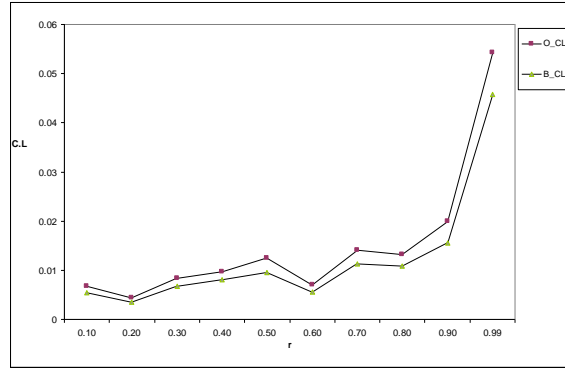
شكل (2) أطوال فترتي الثقة العادية والبوتستريبية للمقدر b_2 لعينة حجمها 5



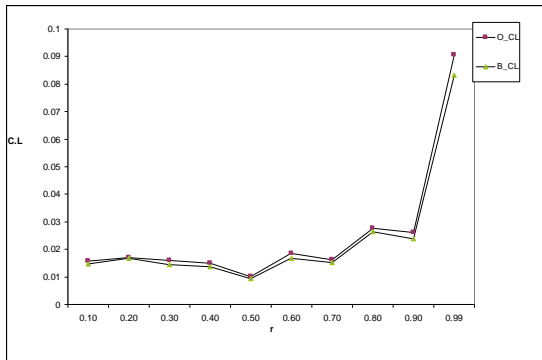
شكل (1) أطوال فترتي الثقة العادية والبوتستريبية للمقدر b_1 لعينة حجمها 5



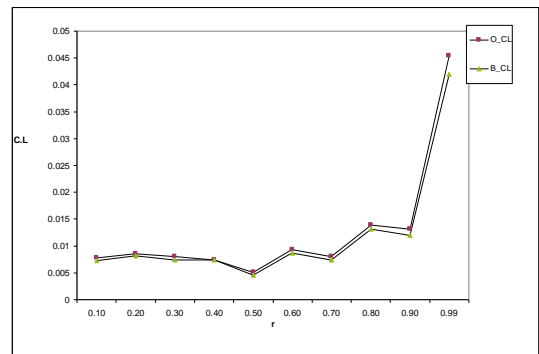
شكل (4) أطوال فترتي الثقة العادية والبوسترابية للمقدر b_2 لعينة حجمها 10



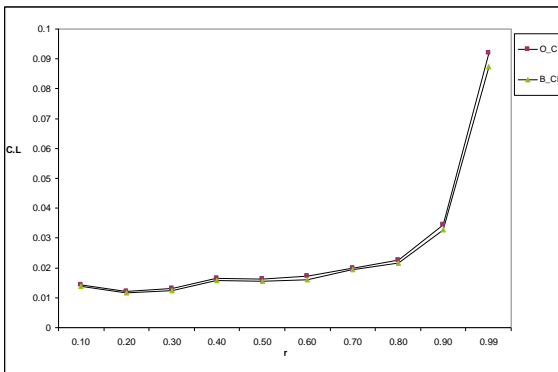
شكل (3) أطوال فترتي الثقة العادية والبوسترابية للمقدر b_1 لعينة حجمها 10



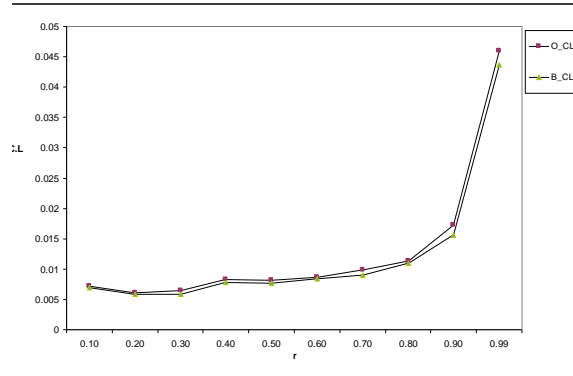
شكل (6) أطوال فترتي الثقة العادية والبوسترابية للمقدر b_2 لعينة حجمها 20



شكل (5) أطوال فترتي الثقة العادية والبوسترابية للمقدر b_1 لعينة حجمها 20



شكل (8) أطوال فترتي الثقة العادية والبوسترابية للمقدر b_2 لعينة حجمها 30



شكل (7) أطوال فترتي الثقة العادية والبوسترابية للمقدر b_1 لعينة حجمها 30



10- تطبيق طريقة بوتستراب البواقي

تم تطبيق طريقة بوتستراب البواقي باستخدام لغة R، على بيانات هنري ثيل Henri Theil عن استهلاك المنسوجات (Theil, 1971)، والموضحة في ملحق (6)، وبيانات ثيل هي سلسلة زمنية خلال الفترة (1923-1939)، تمثل 17 مشاهدة لاستهلاك المنسوجات في هولندا، حيث يمثل حجم استهلاك الفرد من المنسوجات المتغير التابع، بينما يمثل المتغيران المفسران كلاً من الدخل الحقيقي للفرد والسعر النسبي للمنسوجات (الأساس سنة 1925 = 100).

كما تم أيضاً تطبيق طريقة بوتستراب البواقي على مجموعة البيانات المستخدمة من قبل كلين وجولدبرجر Klein and Goldberger (Klein, 1964) الموضحة في ملحق (6)، حيث توضح تحليل الاستهلاك ودخل الأجور في الولايات المتحدة خلال الفترة 1936-1952، علماً بأن البيانات خلال الفترة 1942-1944 غير متوفرة بسبب الحرب العالمية الثانية. ويمثل الاستهلاك المتغير التابع، بينما يمثل المتغيران المفسران كلاً من دخل الأجور والدخول الزراعية.

وبتطبيق دالة بوتستراب البواقي ومقارنة النتائج مع طريقة المربعات الصغرى العادية باستخدام لغة R (ملحق 7)، يتبين لنا النتائج التالية:

جدول (3) مقارنة الأخطاء المعيارية لطريقتي OLS وبوتستراب البواقي

	Independent Variables			
	Theil's Data		Klein's Data	
	Income	Relprice	Wage_Income	Farm_income
S.E of OLS	0.26667	0.08381	0.1708	1.5566
S.E of Bootstrap	0.259318	0.083188	0.16074	1.49744

يتبين من النتائج في الجدول التالي أن قيم الأخطاء المعيارية عند استخدام طريقة بوتستراب البواقي أقل منها عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، لجميع المتغيرات لكل من مجموعتي البيانات.



11- الاستنتاجات والتوصيات

بناء على نتائج الدراسة يمكن استنتاج أفضلية طريقة بوتستراب البواقي عن طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معلمات نماذج الانحدار الخطي المتعدد في ظل زيادة درجة الازدواج الخطي، كما تزداد أفضلية طريقة بوتستراب البواقي أيضاً كلما اتجهت أحجام العينات للصغر.

ويوصي البحث بتقدير معلمات نماذج الانحدار الخطي المتعدد باستخدام طريقة بوتستراب البواقي بدلاً من طريقة المربعات الصغرى العادية كلما اتجهت أحجام العينات للصغر، حيث تعطي طريقة بوتستراب البواقي نتائج أفضل في التعامل مع زيادة حدة الازدواج الخطي في العينات الصغيرة والمتناهية الصغر.

المراجع

1. Davison, A. C. & Kuonen, Diego. (2001), "An Introduction to the Bootstrap with Applications in R", Statistical computing & Statistical Graphics Newsletter, Vol. 13, No. 1, 6-11.
2. Efron, B. (1979), "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife", Annals of Statistics, 7, 1-26.
3. Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1993), an Introduction to the Bootstrap. Chapman and Hall, New York.
4. Fox, John & Weisberg, Sanford. (2012), "Bootstrapping Regression Models in R", An Appendix to R companion to Applied Regression, Second Edition
5. Freedman, D.A., (2005), Statistical Models-Theory and Practice, Cambridge University Press, USA.
6. Gujarati D.N. (2004), Basic Econometric, Fourth Edition, the McGraw-Hill.
7. Halawa, A.M., and Azzam, A.H. (1995), "A New Method of Generating the Design Matrix of Linear Regression Models", The Egyptian Statistical Journal, ISSR, Cairo University, 39, 106-119.
8. Kalina, J. (2019). Regression quantiles under heteroscedasticity and multicollinearity.
9. Klein, L., Goldberger, A. (1964). An economic model of the United States, 1929-1952. North Holland Publishing Company, Amsterdam.
10. Maxwell, O., Osuji, G. A., Onyedikachi, I. P., Obi-Okpala, C. I., Chinedu, I. U., & Frank, O. I. (2019). Handling critical multicollinearity using parametric approach. Academic Journal of Applied Mathematical Sciences, 5(11), 150-163.
11. Salmerón-Gómez, R., García-García, C., & García-Pérez, J. (2020). A guide to using the r package "multicoll" for detecting multicollinearity. Computational Economics, 1-8.
12. Simar, L. (2020). Computer Intensive Methods in Statistics.



13. Theil, H. (1971). Principles of Econometrics. John Wiley & Sons, New York.
14. WEI Zhen (2009), “Bootstrap Methods with application in Econometrics and Finance”, Department of Statistics and Probability-School of Mathematical Sciences-Peking University, People’s Republic of China.
15. Zwanzig, Silvelyn & Mahjani, Behrang. (2019). Computer Intensive Methods in Statistics. 10.1201/9780429202322.

الملاحق

محلقة (1) بيانات دراسة المحاكاة لعدد مفردات = 5

r = 0.1	Y	X1	X2	r = 0.2	Y	X1	X2
1	38.84423	109.1906	-47.0866	1	-78.5238	-94.9614	10.51908
2	148.4961	74.52596	48.92204	2	-199.437	-81.9706	-78.5211
3	86.64711	17.27354	45.84321	3	74.89844	-0.59885	49.97574
4	-153.73	-68.6643	-56.6361	4	71.94933	23.55735	32.07543
5	-118.865	-132.326	8.957474	5	133.5465	153.9735	-14.0491

r = 0.3	Y	X1	X2	r = 0.4	Y	X1	X2
1	83.87394	83.92558	-0.28188	1	-220.17	-98.1774	-81.5475
2	-41.2202	-45.134	2.441201	2	137.7396	142.8171	-3.82133
3	16.77365	-70.4755	57.6582	3	-50.0817	-85.6146	23.13322
4	-215.947	-96.9646	-79.3073	4	128.7764	50.44708	51.89787
5	158.4739	128.6486	19.48975	5	6.473581	-9.47224	10.33773

r = 0.5	Y	X1	X2	r = 0.6	Y	X1	X2
1	150.1322	151.3664	-1.25686	1	130.8409	68.84598	41.20299
2	-79.3886	-51.3453	-19.0968	2	-55.1378	18.7629	-49.7755
3	115.8903	34.45492	53.7694	3	-216.65	-128.26	-58.9085
4	37.54703	-21.288	38.89912	4	-31.9927	-73.5663	27.50947
5	-221.053	-113.188	-72.3149	5	174.0408	114.2173	39.97158

r = 0.7	Y	X1	X2	r = 0.8	Y	X1	X2
1	82.96467	23.51112	39.5709	1	174.5526	69.78216	69.24075
2	-176.544	-129.565	-31.5732	2	-157.417	-117.536	-26.6921
3	173.5124	134.7555	25.64096	3	134.6764	93.29619	27.27549
4	90.06593	30.86643	38.9213	4	-189.194	-98.8449	-60.5206
5	-168.524	-59.5678	-72.56	5	39.15705	53.30281	-9.30358

r = 0.9	Y	X1	X2	r = 0.99	Y	X1	X2
1	-68.5833	-11.3154	-38.419	1	124.2544	74.5937	32.51747
2	161.1469	103.6828	38.0694	2	205.9624	118.2581	58.12447
3	-175.585	-113.791	-41.3598	3	-195.897	-115.83	-53.9602
4	-117.355	-78.5748	-26.549	4	26.51842	6.589234	13.12087
5	203.4419	99.99786	68.25845	5	-157.852	-83.6112	-49.8026

محلقة (2) بيانات دراسة المحاكاة لعدد مفردات = 10

r = 0.1	Y	X1	X2	r = 0.2	Y	X1	X2
1	24.91095	34.06022	-6.16078	1	-42.6591	-43.1733	0.146385
2	-72.3446	-24.4478	-32.2842	2	7.947404	1.164539	4.060678
3	-61.2527	0.413561	-41.2815	3	-102.655	-18.395	-56.4252
4	-6.36637	-72.8622	44.08204	4	-5.44305	49.47217	-36.9437
5	-99.1201	-30.5656	-46.1987	5	169.4165	128.4199	27.08069
6	105.856	95.46117	6.308674	6	-157.867	-114.93	-28.9595
7	-64.4311	-68.363	2.452644	7	80.1314	46.1975	22.26169
8	124.2212	105.0165	12.50728	8	44.30851	-22.4842	44.05287



9	118.123	37.36551	53.75197	9	4.727954	-49.6283	36.03684
10	-65.2825	-76.0783	6.822541	10	7.076891	23.35668	-11.3107

r = 0.3	Y	X1	X2	r = 0.4	Y	X1	X2
1	-125.679	-96.9566	-19.5888	1	134.8914	93.28587	27.61593
2	-98.8056	-27.6806	-48.0711	2	16.69948	6.685114	6.413199
3	186.9938	103.6753	55.38112	3	4.494232	34.45226	-20.3275
4	78.51214	85.02792	-4.44367	4	123.4622	31.33405	60.82688
5	-56.4352	-56.5323	-0.65426	5	-184.379	-114.893	-46.7527
6	-13.6855	-24.6309	7.273037	6	66.22227	71.01577	-4.02252
7	-50.3961	-2.80102	-31.9584	7	-111.356	-50.702	-40.8968
8	-30.4517	-32.6387	0.983747	8	-12.3962	-46.4021	22.31425
9	55.55587	-26.6424	54.44555	9	-41.9584	-66.2858	16.08649
10	58.96069	79.17932	-13.3672	10	9.885506	41.50956	-21.2572

r = 0.5	Y	X1	X2	r = 0.6	Y	X1	X2
1	-162.881	-64.841	-65.8643	1	-43.9952	0.792435	-30.2214
2	63.67266	24.45539	26.16422	2	129.8521	93.73623	24.013
3	-53.198	-64.7567	7.592375	3	14.14807	25.6304	-7.65346
4	139.3625	92.59981	31.01536	4	111.8606	74.88382	24.24987
5	-95.3409	-15.8994	-53.3954	5	-85.3672	-19.6689	-44.31
6	50.69714	24.0423	17.0705	6	102.449	43.01007	39.43572
7	96.20024	89.86745	4.423815	7	-130.438	-116.77	-9.65315
8	86.05831	43.75588	27.8091	8	-82.9683	-67.346	-10.756
9	-103.753	-104.976	0.482451	9	-117.197	-61.5968	-37.4135
10	-17.3422	-24.2481	4.701903	10	105.91	27.32844	52.30886

r = 0.7	Y	X1	X2	r = 0.8	Y	X1	X2
1	-168.338	-81.0243	-58.3939	1	31.32995	-9.49964	26.86948
2	5.726007	-13.572	12.30076	2	-77.3005	-48.3339	-19.6209
3	66.42945	36.31356	19.60867	3	-146.567	-53.0848	-62.4802
4	-32.9054	-25.5369	-5.11319	4	-34.3166	-10.4351	-16.638
5	-5.82852	8.015236	-9.90396	5	-172.398	-115.598	-38.6083
6	-155.071	-129.592	-17.1764	6	138.4529	91.81469	30.83353
7	28.09132	15.01409	8.528734	7	146.7996	93.80963	35.37262
8	-30.9836	27.1945	-38.8772	8	28.41114	24.97189	1.843071
9	166.4114	90.00389	51.14869	9	95.78436	52.43827	28.84423
10	130.1821	73.18436	37.87773	10	-4.92876	-26.0835	13.58446

r = 0.9	Y	X1	X2	r = 0.99	Y	X1	X2
1	96.77622	61.71719	22.87942	1	-118.556	-64.6493	-36.4174
2	-70.2222	-37.9351	-22.1478	2	-90.4782	-48.9543	-27.867
3	118.8166	70.46165	31.25401	3	137.8052	83.60497	35.31412
4	75.01308	44.93983	19.78943	4	51.89842	28.42816	15.25355
5	9.218719	18.42616	-6.37515	5	-15.4027	-11.8132	-2.48213
6	122.5912	68.76964	35.42505	6	-52.4153	-28.3546	-16.5325
7	-166.328	-92.0074	-49.8363	7	13.56401	1.86717	7.5738
8	-66.5261	-70.4186	2.585605	8	241.7572	138.1903	68.59191
9	-177.258	-92.0996	-57.2102	9	-123.242	-68.5128	-36.4222
10	64.30136	28.14629	23.63585	10	-39.7567	-29.8064	-7.01214

ملحق (3) بيانات دراسة المحاكاة لعدد مفردات = 20

r = 0.1	Y	X1	X2	r = 0.2	Y	X1	X2
1	-108.373	-87.6795	-14.144	1	-103.602	-72.7533	-21.2875
2	52.01197	-16.4095	45.36756	2	71.41136	52.37681	12.8079
3	-1.76736	9.502194	-7.43552	3	18.70607	-32.5953	33.87418
4	-57.3495	-3.78362	-35.789	4	15.59006	5.854291	6.225699
5	55.38042	26.46208	18.79031	5	-12.4281	10.10413	-15.4296
6	-23.9173	-18.0355	-4.3029	6	114.3286	88.75619	17.16807
7	-21.1113	15.92782	-25.1729	7	-105.286	-71.0711	-23.2081
8	-66.3588	-21.0626	-30.1504	8	81.7672	74.2269	4.663539
9	39.42396	4.148686	23.01932	9	0.301737	-16.0631	10.85971
10	96.67475	57.29509	25.84006	10	-36.9504	10.71968	-32.1805
11	100.3999	60.35311	26.29716	11	-42.5438	-10.0012	-22.1357
12	6.152598	34.14315	-18.6131	12	-58.8049	-6.19951	-35.0728
13	-21.5038	20.01786	-28.1261	13	-17.4841	-14.9546	-1.70551
14	25.20542	3.835992	14.05561	14	40.21099	22.10681	11.92437
15	-12.7411	21.09282	-22.7246	15	-7.85274	26.58525	-22.9861
16	-95.8546	-117.033	13.39918	16	121.5085	61.07276	39.58678
17	1.268326	14.25483	-9.08901	17	-37.0784	-1.78549	-23.6518
18	22.41138	-5.34567	18.08429	18	2.944707	-44.9558	31.93619
19	-60.659	-59.3236	-1.87375	19	-45.1175	-66.4694	13.76489
20	80.37745	61.63897	12.56776	20	8.29405	-14.9541	14.84634

r = 0.3	Y	X1	X2	r = 0.4	Y	X1	X2
1	-45.8669	-58.5103	8.172181	1	-85.6501	-24.783	-41.2617
2	-0.56578	25.78115	-17.7074	2	40.83731	29.7593	6.728728
3	83.86371	56.25885	17.92157	3	33.18943	4.661902	18.64281
4	29.80283	-4.41715	22.3092	4	88.1208	85.22718	1.480309
5	60.97939	71.31878	-6.87168	5	51.53854	40.98772	6.55099
6	50.50052	26.06579	16.01618	6	25.51079	37.6091	-8.51339
7	-19.8435	-43.8994	15.79938	7	-98.6946	-42.7044	-37.2633
8	-65.8128	-12.2281	-36.0932	8	-134.25	-107.915	-17.826
9	-115.488	-44.721	-47.2366	9	-1.44015	20.77437	-15.3139
10	90.11608	64.98368	16.76291	10	69.71732	16.4756	35.54331
11	41.83966	9.867332	20.81639	11	-0.72149	2.764368	-2.77705
12	-72.4988	-60.033	-7.94737	12	-23.3773	10.07005	-22.5061
13	-63.0882	-17.5557	-30.7471	13	-50.4229	-6.70311	-29.6569
14	97.00672	72.20131	16.46474	14	-128.005	-99.0144	-19.9709
15	-1.82417	-31.126	19.27616	15	79.68864	43.55316	23.54598
16	-39.2403	-7.29936	-21.6105	16	65.0201	27.83701	24.35872
17	-85.1282	-36.0308	-33.2969	17	-7.08862	-31.5009	15.81084
18	-19.4078	-43.5543	16.05902	18	29.40207	-10.9205	26.71545
19	91.656	64.82769	17.54796	19	25.76812	-8.07637	22.39208
20	-9.79017	-31.9295	14.36516	20	32.20328	11.89812	13.32008

r = 0.5	Y	X1	X2	r = 0.6	Y	X1	X2
1	-44.6585	19.12897	-42.7375	1	-4.95087	20.91295	-17.4098
2	94.87716	78.70047	10.44499	2	28.54912	0.54972	18.32343
3	49.20061	12.11317	24.47041	3	71.19274	52.88173	12.12385



4	-25.5978	-25.2336	-0.3729	4	-38.773	-13.0553	-17.7294
5	38.45072	16.81397	14.29211	5	18.66028	28.38279	-6.99482
6	6.539034	-7.42745	8.988207	6	102.7963	22.25684	53.44739
7	37.03843	23.03077	8.906266	7	-15.4222	-29.1595	8.873992
8	36.06692	18.49512	11.23508	8	71.19719	18.89855	34.28792
9	18.37025	-9.89686	18.6386	9	32.68081	39.54214	-5.38517
10	-91.4195	-60.0738	-21.4789	10	-108.182	-78.3159	-20.0382
11	-50.2851	-51.9371	0.795755	11	0.940948	21.45305	-13.8177
12	124.3456	83.62665	26.79965	12	-53.11	-34.7552	-12.5645
13	-87.2749	-67.3665	-13.6737	13	96.77605	71.15378	16.88908
14	-74.8244	-46.9134	-19.1202	14	-119.971	-88.1363	-21.9247
15	21.86149	29.74744	-5.80934	15	103.3098	59.84218	28.71308
16	94.37655	36.08953	38.49984	16	-111.183	-56.0776	-36.7167
17	-73.011	-55.7683	-11.6894	17	-28.0555	-26.8497	-1.01795
18	-74.1036	0.216428	-49.9319	18	22.29874	30.2278	-5.64284
19	-78.6189	-51.3995	-18.4598	19	38.95261	17.14109	14.49494
20	88.62129	58.05402	20.20257	20	-98.3189	-56.8933	-27.9119

r = 0.7	Y	X1	X2	r = 0.8	Y	X1	X2
1	-24.5941	-23.9021	-0.52837	1	-79.4347	-66.4427	-9.0984
2	-50.7509	-24.8957	-17.637	2	-10.7521	-13.5846	1.323061
3	78.06556	27.39302	33.33509	3	93.72191	62.93129	20.32159
4	-76.0309	-26.3458	-33.633	4	-59.6227	-48.9679	-7.12656
5	-53.6172	-8.45501	-30.0741	5	92.61596	58.76103	22.30226
6	-22.4854	-16.3448	-4.35009	6	-85.9824	-41.4329	-29.9477
7	-86.3502	-74.2429	-8.68746	7	59.2281	12.21052	30.77755
8	17.39693	33.65019	-10.9485	8	-69.9376	-27.0012	-29.2972
9	-94.2383	-59.3629	-23.5573	9	-45.7665	-11.2284	-23.5477
10	114.8582	88.69399	17.20832	10	76.66686	41.01255	23.67896
11	108.4092	44.78495	42.22017	11	83.30962	55.07453	18.42605
12	-73.7382	-49.6367	-16.1986	12	59.90855	25.79584	22.47275
13	-63.7006	-25.5731	-25.6475	13	72.27536	48.65778	15.62269
14	-68.8489	-42.1879	-18.3263	14	-95.5957	-78.7958	-10.8998
15	32.16897	17.84709	8.985232	15	-27.8264	-8.73479	-13.4042
16	-46.224	-49.7409	1.995629	16	81.61537	43.30626	25.50508
17	102.8432	58.72972	28.89178	17	-109.794	-50.8237	-39.3525
18	78.11681	31.27529	30.6901	18	-91.327	-49.2241	-28.6474
19	48.94281	44.98518	2.367773	19	-14.5096	4.512598	-12.8638
20	89.8257	53.32825	23.89421	20	80.14896	43.97361	23.75533

r = 0.9	Y	X1	X2	r = 0.99	Y	X1	X2
1	-154.028	-91.9617	-41.7012	1	-97.5498	-55.8008	-27.9148
2	7.531995	-6.03741	8.375148	2	-116.907	-64.4525	-34.8888
3	-20.7571	-23.5943	1.437733	3	58.71806	29.39775	19.35982
4	25.41801	12.22984	8.439173	4	77.74541	43.00184	22.83917
5	39.85367	29.58904	6.693011	5	47.57525	27.55171	12.6281
6	100.4164	72.55271	18.29516	6	120.3989	67.00564	34.92448
7	30.8476	5.891985	16.40192	7	81.24989	48.82837	21.21958
8	83.20155	37.14774	30.59536	8	-119.092	-70.042	-32.8897
9	70.28598	29.95889	26.22779	9	87.56357	47.7504	26.16169

10	-50.7813	-16.2249	-23.1829	10	-82.6767	-52.3567	-20.7309
11	53.11068	24.91512	18.29859	11	-123.35	-66.6247	-38.0497
12	63.18053	40.30089	14.91871	12	-28.8979	-17.9586	-7.26978
13	89.01263	51.51308	24.8967	13	3.473442	4.027338	-0.3976
14	1.779149	13.57156	-7.78367	14	112.1618	64.359	31.37267
15	-98.9783	-53.7745	-30.4118	15	-43.8894	-26.3013	-12.2149
16	-37.4181	-12.8311	-16.8782	16	-16.3163	-5.5672	-7.21506
17	-122.747	-65.5056	-38.6274	17	-30.9322	-22.8157	-5.60284
18	-139.821	-91.1469	-32.9808	18	-21.4163	-12.1656	-6.20808
19	8.373349	7.460788	0.248823	19	64.8508	41.4597	15.27171
20	61.7783	35.94478	16.73799	20	35.66011	20.70326	9.605003

محل (4) بيانات دراسة المحاكاة لعدد مفردات = 30

r = 0.1	Y	X1	X2	R = 0.2	Y	X1	X2
1	-16.1293	-1.34269	-10.2485	1	-63.0466	-49.9116	-9.12823
2	-105.485	-69.8029	-24.6245	2	14.2335	-8.93384	14.95631
3	61.35138	0.142766	40.46709	3	-91.6796	-90.5379	-1.23541
4	-17.3107	-13.1067	-3.43721	4	-22.0774	28.3013	-33.7063
5	-53.9032	-62.5903	5.446259	5	-67.399	-37.9451	-19.7147
6	-13.865	21.37507	-24.2372	6	70.70502	64.92973	3.96269
7	-21.5281	-2.58982	-13.1978	7	-18.4171	-36.1881	11.43125
8	-23.0823	3.613389	-18.2827	8	38.83114	28.69036	6.158295
9	-19.651	-10.4203	-6.10431	9	51.96082	6.484676	29.94567
10	-53.5614	-18.3032	-24.1024	10	-33.6438	9.56026	-28.6942
11	30.64162	-16.1291	31.21286	11	-7.77346	-12.6758	2.990838
12	34.01604	50.21687	-11.2911	12	75.28465	34.50003	27.23791
13	40.99286	-1.87183	28.2579	13	16.16238	19.75636	-2.84649
14	-54.0003	-6.92133	-31.6725	14	64.35608	39.82625	16.26287
15	62.13948	53.01721	5.863241	15	-12.9645	-9.61056	-2.58578
16	-14.9282	15.2866	-20.2033	16	-22.5447	-29.3303	4.064488
17	5.998688	23.46637	-11.961	17	-72.9624	-75.9307	1.574419
18	61.38883	43.98708	11.00167	18	-19.6014	1.570602	-14.3585
19	20.34494	8.703304	7.014649	19	59.16594	22.24369	24.20559
20	20.40877	19.38501	0.4782	20	68.33412	24.09778	29.393
21	-82.1099	-40.7921	-27.9458	21	17.27001	11.35728	3.558761
22	1.687009	-12.5628	8.896716	22	42.51891	50.09182	-5.18693
23	-1.72424	-16.1088	9.00931	23	-12.9665	-13.0997	-0.46088
24	95.6474	89.69748	4.066319	24	-52.4624	-15.7338	-24.7896
25	66.20419	46.98587	12.45901	25	77.6186	28.43484	32.64346
26	-47.3904	-65.187	11.68675	26	49.25803	51.23994	-1.55088
27	-46.9144	-43.537	-2.56842	27	-21.1803	14.15867	-23.8397
28	2.390378	-23.5265	16.78323	28	-24.8454	11.66613	-24.742
29	14.75377	-15.9588	20.18664	29	-80.8736	-46.0035	-24.1052
30	70.67275	44.87407	17.04682	30	-7.97929	-21.0088	8.559296

r = 0.3	Y	X1	X2	R = 0.4	Y	X1	X2
1	-74.9429	-45.7772	-19.8362	1	-4.17867	26.71451	-20.8524
2	-36.2993	-42.7061	3.860991	2	0.291973	6.473613	-4.05871



3	34.91078	23.11635	7.120278	3	12.59403	32.91299	-14.0665
4	-38.7635	-17.7783	-14.732	4	84.21297	56.21364	18.75389
5	-6.33919	-28.6005	14.24402	5	82.28964	34.59841	31.1853
6	24.35396	-13.1469	24.27461	6	-65.7292	-61.4782	-3.27634
7	-50.345	-15.9916	-23.338	7	44.5617	41.89669	1.120153
8	-72.6974	-68.0204	-3.7196	8	-86.4402	-64.7195	-14.7381
9	-23.8872	-2.00329	-14.7708	9	23.585	-8.13637	21.12738
10	-12.9047	-30.3982	11.31887	10	85.90903	45.15251	26.76067
11	13.07671	6.111851	4.548514	11	-54.7793	-4.93782	-33.2575
12	44.90241	6.912216	25.02069	12	51.00988	25.04303	16.9384
13	107.0952	53.88397	35.33674	13	57.32568	35.29904	14.20375
14	86.68606	71.54202	9.844712	14	-8.44491	1.756265	-7.23398
15	15.24255	-4.06368	12.67848	15	16.65547	31.1917	-9.50896
16	5.905797	8.225103	-1.42419	16	53.89432	57.91357	-3.19727
17	107.6374	83.50491	15.93417	17	-48.304	-33.0769	-10.3643
18	-69.1521	-49.8687	-13.0398	18	-46.1518	-5.64946	-27.3833
19	51.06038	34.8833	10.32448	19	64.68086	27.29851	24.40782
20	-34.8367	13.66067	-32.7751	20	-90.405	-69.8726	-14.0596
21	-18.2552	7.315463	-17.45	21	-19.7855	-38.3669	12.00677
22	-5.18812	-4.27952	-0.90359	22	73.25089	31.36398	27.48058
23	-61.8376	-18.5505	-29.3302	23	14.66626	-5.50286	12.88307
24	-69.8357	-43.5691	-18.0427	24	-31.7457	5.910749	-25.3286
25	38.55517	53.18779	-10.0309	25	-19.209	-30.386	6.762864
26	-47.73	-51.4847	1.85087	26	-35.2047	-22.0023	-8.85892
27	6.455167	25.7932	-13.3308	27	29.76246	5.652917	16.02128
28	-10.3065	20.73318	-21.0312	28	-82.7548	-46.5963	-24.4247
29	47.71779	6.239112	27.16845	29	-73.3285	-43.4838	-20.5108
30	66.57655	21.12932	30.2292	30	-13.9254	-31.1833	11.46817

r = 0.5	Y	X1	X2	R = 0.6	Y	X1	X2
1	-58.3342	-46.5324	-8.2738	1	87.43378	47.52138	26.10074
2	20.37516	-10.0437	19.53272	2	-82.3635	-23.8644	-39.0836
3	-44.0933	-6.21034	-25.6466	3	-57.506	-23.2435	-23.4644
4	83.01159	64.97157	11.44949	4	-68.2359	-39.4436	-19.7347
5	54.97782	12.76352	28.11428	5	23.05202	-7.14969	19.86754
6	-29.8756	-13.2711	-11.1401	6	45.57188	3.316855	27.64412
7	-10.8513	-29.8377	12.34825	7	59.13709	54.66465	2.664981
8	72.65894	39.99159	21.08422	8	-30.6636	-39.3534	5.236156
9	-91.5376	-72.3392	-13.0717	9	4.86469	2.361362	1.816225
10	69.009	32.05168	24.37532	10	29.9213	22.99006	4.576918
11	-6.05803	19.00842	-17.2039	11	36.41958	26.88821	6.041801
12	-34.3398	6.755904	-27.4899	12	56.84493	35.17457	14.0802
13	-72.003	-15.9636	-37.8673	13	-18.8717	4.331638	-15.8454
14	86.86503	64.4293	14.89449	14	-85.8508	-53.7047	-21.6701
15	-46.5333	-28.3163	-12.0952	15	42.86705	28.59775	9.529297
16	25.27877	-7.5664	21.2251	16	-27.0596	-1.63099	-17.1668
17	12.66685	9.67281	1.875342	17	-34.2427	-4.30647	-20.0468
18	-16.0037	6.355948	-15.4476	18	45.42027	9.425202	23.80204
19	-18.4691	9.414908	-18.9998	19	77.94445	21.25255	37.78394
20	17.82395	19.23668	-1.33836	20	49.58066	36.3712	8.461369

21	-62.8854	-44.9753	-12.384	21	97.9702	78.73291	12.4955
22	-13.7464	-10.2144	-2.54461	22	-69.0831	-43.0565	-17.6092
23	55.94154	14.83108	26.84923	23	-19.8521	-17.5033	-2.00345
24	-45.1594	-35.3195	-6.89135	24	64.74093	33.88048	20.41974
25	100.1866	55.65355	29.34866	25	48.34416	28.17808	12.67655
26	-29.6271	-14.9546	-10.3983	26	-83.7371	-62.6822	-14.0846
27	23.64483	1.855313	14.30219	27	-25.015	-11.3047	-9.29876
28	102.9117	77.84641	15.90647	28	-75.6433	-69.9942	-4.43465
29	-71.7047	-59.9369	-8.04319	29	-82.3252	-53.2682	-19.8141
30	-57.3421	-39.3572	-12.4701	30	3.789538	16.81891	-8.94051

r = 0.7	Y	X1	X2	R = 0.8	Y	X1	X2
1	-51.4423	-26.8319	-16.4778	1	-77.5502	-47.2379	-20.4813
2	-11.1358	-0.69632	-7.47396	2	95.52406	40.85606	35.95453
3	54.85237	37.49217	11.38683	3	72.86853	60.68608	7.894582
4	29.24154	11.83569	11.49973	4	-5.05221	-19.4552	9.501713
5	80.38906	55.1084	16.38401	5	107.5252	60.49914	31.55564
6	-46.4654	-28.9619	-12.3264	6	-72.3406	-49.7981	-15.7681
7	-75.7355	-51.5324	-16.2867	7	62.77684	47.653	9.431189
8	-54.1745	-21.9931	-21.6013	8	-63.1371	-34.7921	-19.4095
9	81.47562	67.16221	8.943739	9	-64.2658	-23.4885	-27.3786
10	-71.4337	-53.3595	-12.9333	10	-76.7373	-63.3835	-8.886
11	59.61297	25.40201	22.39342	11	-52.4049	-18.8741	-22.7177
12	24.07773	14.44289	6.098525	12	8.723143	2.872642	3.810885
13	7.345951	12.52789	-4.26476	13	-8.78039	3.567846	-8.59323
14	37.45845	22.21885	9.588809	14	60.78284	20.15619	26.6614
15	-74.3121	-37.1207	-25.1564	15	-73.6983	-50.3789	-15.9229
16	-71.6275	-54.5283	-11.5524	16	32.05847	13.59351	12.11008
17	21.43814	-9.55584	20.45769	17	-21.0037	-8.4977	-8.90778
18	-57.8398	-44.0339	-9.86339	18	-49.7	-35.9835	-9.73572
19	91.34464	60.53633	19.84843	19	-77.3692	-32.477	-30.4665
20	-31.3678	-38.5155	4.39181	20	-45.0775	-24.0533	-14.5454
21	-68.9785	-52.8274	-11.3415	21	-12.031	-2.22161	-7.29281
22	-49.0903	-10.3452	-26.2987	22	49.47005	26.46382	14.80161
23	64.2034	18.63937	29.83908	23	27.28701	22.96021	2.445987
24	57.88257	44.41161	8.339374	24	-34.127	-8.44593	-17.4458
25	-32.7406	0.753865	-22.5306	25	108.6499	73.58428	23.1146
26	50.18901	28.24621	14.09078	26	31.08015	14.91634	10.56363
27	-74.5204	-20.159	-36.6368	27	84.84157	42.35377	28.10324
28	81.30256	41.20176	26.59404	28	61.60312	28.15374	22.09343
29	88.09584	38.04147	32.7111	29	-1.84844	3.233548	-3.55087
30	-38.7399	-27.56	-7.82334	30	-52.6688	-42.4627	-6.94039

r = 0.9	Y	X1	X2	R = 0.99	Y	X1	X2
1	-28.0354	-26.5047	-1.38672	1	34.70176	21.2028	8.813447
2	-73.8695	-41.0243	-22.0283	2	-42.9328	-22.257	-14.5319
3	-67.7408	-36.1159	-21.6166	3	-65.3827	-37.3316	-19.1137
4	-107.006	-53.9668	-35.7787	4	84.84354	47.83205	24.13523
5	-23.4951	-26.4488	1.712664	5	-7.64884	-7.33951	-0.49236



6	48.43798	27.46282	13.85516	6	-49.8118	-30.7642	-12.548
7	71.04882	33.18489	24.80637	7	68.82535	42.16807	17.42505
8	-109.157	-61.7891	-31.8194	8	-63.9258	-38.098	-17.5497
9	-59.4566	-40.0225	-13.7075	9	51.11285	29.54146	13.93954
10	9.960516	16.46659	-4.30894	10	-35.071	-17.8151	-11.8891
11	-101.301	-58.8851	-28.7473	11	25.44707	15.23605	6.41902
12	-100.539	-55.8388	-30.3547	12	44.12093	21.13079	14.84261
13	70.09238	41.32719	19.09447	13	67.88477	41.17627	17.22635
14	14.48132	9.82261	2.752383	14	86.23236	45.05796	26.91922
15	66.25233	29.12251	24.41682	15	-88.635	-48.8739	-27.1998
16	75.99359	43.89434	21.13735	16	-106.464	-61.7641	-30.2556
17	27.04951	18.2023	5.728839	17	-82.879	-52.0096	-20.9967
18	46.81892	21.02064	16.56393	18	-58.4259	-33.1521	-17.0911
19	42.64717	37.4427	3.033866	19	55.17165	28.0106	17.78576
20	24.41961	25.10368	-0.78785	20	26.42355	15.54469	6.959651
21	54.42438	22.05325	21.17126	21	87.12261	49.61339	24.25332
22	-49.1397	-35.6117	-9.87613	22	-1.31995	-0.8952	-0.96934
23	-5.32284	-14.6457	5.819805	23	60.36593	32.27967	18.11092
24	85.60026	50.87057	23.23202	24	32.51842	21.56217	7.186603
25	75.76672	40.83934	23.27493	25	-101.921	-58.2659	-29.1429
26	-40.8943	-26.7048	-9.59625	26	93.98277	55.33302	25.4803
27	-59.8617	-33.519	-17.6439	27	-42.8367	-27.4963	-10.7696
28	38.33512	22.08445	10.30285	28	-96.8618	-53.185	-29.5855
29	53.93496	39.8248	9.109073	29	1.787683	1.116745	-0.15944
30	36.12721	32.35428	1.64033	30	42.4049	22.44176	12.79767

ملحق (5) مخرجات دراسة المحاكاة – أطوال فترات الثقة والأخطاء المعيارية

r \ n	0.1				0.2			
	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE
5	0.303979	0.125039	0.035325	0.030598	0.932424	0.444611	0.108355	0.113248
	0.003416	0.001352	0.000397	0.000356	0.01064	0.004686	0.001236	0.001323
	0.006831	0.002656	0.000794	0.000682	0.02128	0.009747	0.002473	0.002557
10	0.429197	0.352671	0.090754	0.088469	0.269677	0.22424	0.057023	0.056743
	0.00682	0.005444	0.001442	0.001421	0.004352	0.003471	0.00092	0.0009
	0.013641	0.01081	0.002884	0.002736	0.008704	0.007226	0.00184	0.001814
20	0.348774	0.338886	0.082655	0.085166	0.375325	0.355356	0.088947	0.090218
	0.007838	0.007242	0.001858	0.001852	0.008566	0.008142	0.00203	0.00207
	0.015676	0.014636	0.003715	0.003797	0.017131	0.016796	0.00406	0.004204
30	0.2606	0.249337	0.063504	0.063708	0.218613	0.205724	0.053273	0.052229
	0.007173	0.006977	0.001748	0.001795	0.00611	0.005835	0.001489	0.001507
	0.014346	0.013839	0.003496	0.003562	0.012221	0.01165	0.002978	0.003028

r \ n	0.3				0.4			
	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE
5	0.489678	0.231258	0.056904	0.058943	0.933404	0.445244	0.108468	0.116506
	0.005739	0.002764	0.000667	0.000707	0.011386	0.004824	0.001323	0.001443
	0.011478	0.005134	0.001334	0.00137	0.022773	0.01161	0.002646	0.00291

10	0.505624	0.403211	0.106914	0.104117	0.557652	0.476366	0.117916	0.119462
	0.008381	0.006715	0.001772	0.001728	0.00962	0.008049	0.002034	0.002058
	0.016761	0.013279	0.003544	0.003479	0.019241	0.015844	0.004068	0.004155
20	0.34044	0.313169	0.08068	0.080292	0.305005	0.300384	0.072282	0.075573
	0.00798	0.007429	0.001891	0.001874	0.007441	0.007372	0.001764	0.001836
	0.01596	0.014342	0.003782	0.003745	0.014883	0.01362	0.003527	0.003529
30	0.226639	0.211686	0.055228	0.05422	0.276451	0.26315	0.067367	0.066565
	0.006506	0.005797	0.001586	0.001486	0.008261	0.007827	0.002013	0.002024
	0.013013	0.012289	0.003171	0.003138	0.016521	0.015762	0.004026	0.004009

r n	0.5				0.6			
	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE
5	0.537928	0.265961	0.062511	0.066418	1.730401	0.865521	0.201085	0.217221
	0.006945	0.003037	0.000807	0.000852	0.024183	0.011475	0.00281	0.002953
	0.013889	0.006845	0.001614	0.001735	0.048366	0.023166	0.005621	0.006242
10	0.683179	0.522298	0.144458	0.132963	0.359701	0.287311	0.076059	0.073894
	0.012473	0.009524	0.002637	0.002419	0.007109	0.005607	0.001503	0.001436
	0.024946	0.019138	0.005275	0.004814	0.014218	0.011168	0.003006	0.00286
20	0.19674	0.177491	0.046625	0.046191	0.33223	0.317761	0.078734	0.080308
	0.00508	0.004585	0.001204	0.001181	0.009286	0.008729	0.002201	0.002244
	0.01016	0.009282	0.002408	0.002385	0.018572	0.016854	0.004401	0.004355
30	0.25683	0.248139	0.062586	0.061848	0.251999	0.241141	0.061408	0.061577
	0.008122	0.007651	0.001979	0.001956	0.008627	0.008335	0.002102	0.002094
	0.016243	0.015535	0.003958	0.003949	0.017253	0.016093	0.004204	0.004171

r n	0.7				0.8			
	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE
5	1.453982	0.529968	0.168963	0.138405	1.565185	0.692884	0.181886	0.182146
	0.022763	0.008636	0.002645	0.002212	0.029165	0.013186	0.003389	0.003373
	0.045526	0.017111	0.00529	0.004414	0.058331	0.025718	0.006778	0.006805
10	0.636745	0.51846	0.13464	0.134208	0.499659	0.446856	0.105653	0.110877
	0.014098	0.011249	0.002981	0.002979	0.013167	0.010831	0.002784	0.002828
	0.028196	0.022691	0.005962	0.00593	0.026334	0.021668	0.005568	0.005642
20	0.25819	0.243462	0.061188	0.062488	0.371776	0.363874	0.088106	0.091484
	0.008084	0.007394	0.001916	0.001925	0.013855	0.013179	0.003284	0.003394
	0.016168	0.015241	0.003832	0.003815	0.027711	0.026379	0.006567	0.006727
30	0.258077	0.240016	0.062889	0.063108	0.247654	0.234242	0.06035	0.060639
	0.009897	0.008987	0.002412	0.002351	0.011304	0.010895	0.002755	0.002727
	0.019794	0.019339	0.004823	0.00482	0.022608	0.021553	0.005509	0.005501

r n	0.9				0.99			
	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE	OLS_CL	B_CL	OLS_SE	B_SE
5	1.699739	0.728009	0.197522	0.185942	1.407125	0.65147	0.163518	0.168578
	0.043597	0.017729	0.005066	0.004644	0.111522	0.051926	0.01296	0.013401
	0.087195	0.034586	0.010133	0.009309	0.223044	0.102268	0.025919	0.026877



10	0.551888	0.445555	0.116697	0.115163	0.484287	0.414898	0.102403	0.1065
	0.020019	0.015598	0.004233	0.004031	0.054281	0.045729	0.011478	0.011743
	0.040038	0.031751	0.008466	0.00809	0.108562	0.090879	0.022955	0.023585
20	0.255052	0.242661	0.060444	0.060286	0.286185	0.266151	0.067822	0.066728
	0.013084	0.011962	0.003101	0.0031	0.045363	0.041974	0.010751	0.010451
	0.026168	0.023796	0.006201	0.006177	0.090727	0.083209	0.021501	0.021015
30	0.274125	0.271619	0.0668	0.068366	0.23671	0.225867	0.057683	0.057322
	0.017223	0.015614	0.004197	0.004082	0.045954	0.043711	0.011198	0.01107
	0.034446	0.032734	0.008394	0.008237	0.091907	0.08744	0.022396	0.022135

معلق (6) البيانات التطبيقية

بيانات ثيل لاستهلاك المنسوجات خلال الفترة (1923-1939)

Year	Consumption	Income	Relprice
1923	99.2	96.7	101.0
1924	99.0	98.1	100.1
1925	100.0	100.0	100.0
1926	111.6	104.9	90.6
1927	122.2	104.9	86.5
1928	117.6	109.5	89.7
1929	121.1	110.8	90.6
1930	136.0	112.3	82.8
1931	154.2	109.3	70.1
1932	153.6	105.3	65.4
1933	158.5	101.7	61.3
1934	140.6	95.4	62.5
1935	136.2	96.4	63.6
1936	168.0	97.6	52.6
1937	154.3	102.4	59.7
1938	149.0	101.6	59.5
1939	165.5	103.8	61.3

بيانات مجموعة بيانات كلين وجولديجر للاستهلاك والدخل في الولايات المتحدة

Year	Consumption	Wage_Income	Farm_income
1936	62.8	43.41	3.96
1937	65	46.44	5.48
1938	63.9	44.35	4.37
1939	67.5	47.82	4.51
1940	71.3	51.02	4.88
1941	76.6	58.71	6.37
1945	86.3	87.69	8.96
1946	95.7	76.73	9.76
1947	98.3	75.91	9.31
1948	100.3	77.62	9.85
1949	103.2	78.01	7.21
1950	108.9	83.57	7.39
1951	108.5	90.59	7.98
1952	111.4	95.47	7.42