تسوية معدلات الوفاة الخام باستخدام طريقة (Whittaker - Henderson)

د. جيهان مسعد المعداوى
مدرس بقسم الاحصاء التطبيقى والتامين
كلية التجارة - جامعة المنصورة

ملخص البحث:

يهدف هذا البحث إلى استخدام طريقة (Whittaker - Henderson) وهى من الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة الخام للحصول على معدلات وفاة ممهدة ومسواة، لأنها تعد واحدة من أكثر الطرق شيوعاً لتسوية وتوفيق معدلات الوفاة الخام، حيث تحقق هذه الطريقة التوازن بين عملية التسوية وعملية التوفيق للمنحنى الممهد (المسوى) من المعدلات الخام من خلال معالمها عن طريق تقليل معادلة الفرق. وتعتمد الطرق اللامعلمية على طبيعة البيانات المشاهدة فقط. وقد تم تسوية معدلات الوفاة المركزية الخام للأعمار المفردة بطريقة (Whittaker – Henderson) بأربعة فروض وذلك من خلال برنامج (R) وكان الفرض الثالث هو أفضل فرض للتسوية لكلاً من الذكور والإناث. وقد أوصت الدراسة بأهمية عملية تسوية معدلات الوفاة الخام وتدريجها لتخليصها من عدم الانتظام الناتج من العشوائية فى المقادير المعرضة لخطر الوفاة وعدد الوفيات حتي يسهل التعامل مع هذه المعدلات لإتمام عملية إنشاء جداول الوفاة.

الكلمات المفتاحية: جدول الحياة الكامل- (Whittaker – Henderson graduation)- معدل الوفاة المركزى - عملية التسوية.

Abstract:

This research aims to use the (Whittaker - Henderson) method, which is an (Non-parametric Method) for graduate, the crude death rates to obtain the smoothness and fitness death rates, because it is one of the most common methods for smoothing the crude death rates, for crude mortality rates. It has the capacity to explicitly balance the smoothness as well as the fitness of the smoothed curve relative to the crude rates through its parameters by minimizing a difference equation. Non-parametric methods depend only on the nature of the observed data. The crude central death rates for the single ages were smoothed and fitted using Whittaker-Henderson graduation technique by four assumptions through the program (R) and the third hypothesis was the best assumption of graduated for both males and females. The study recommended the important of graduation for the crude death rates and their smoothing to rid them of the irregularities resulting from the randomness in the

exposure and the number of deaths in order to facilitate dealing with these rates to complete the process of establishing death tables.

مقدمة:

يعد وصف نمط الوفيات الفعلى وغير المعروف للسكان أحد أهم المهام في العلوم الاكتوارية. ومن أجل تحقيق ذلك يحسب الخبير الاكتواري من البيانات الأولية معدلات الوفيات الخام والتى عادة ما تشكل سلسلة غير منتظمة، لهذا السبب يلجأ إلى تصحيح التقديرات الأولية بهدف الحصول على تقديرات أكثر تمهيداً و سلاسة ، وهذا الإجراء يطلق عليه عملية التسوية (Graduation)، وتتسم عملية التسوية بخاصيتان أساسيتان وهما التمهيد وجودة التوفيق للبيانات المشاهدة. (Takis Papaioannou and Athanasios Sachlas. 2004)، (London, D. 1985). ويقصد بالتمهيد أو التسوية مدى تدرج القراءات من قراءة إلى أخرى أو مدى تناسب كل قراءة من القراءات مع القراءات السابقة عليها و القراءات اللاحقة. أما التوفيق يقصد به مدى اقتراب القراءات المسواة من البيانات المشاهدة (Miller M.D., 1946). لذلك نالت عملية التسوية اهتمام الإكتواريين نظراً للدور الذى تقوم به من تسوية معدلات الوفاة الخام وتدريجها لتخليصها من عدم الانتظام الناتج من العشوائية فى المقادير المعرضة لخطر الوفاة. وتعتبر عملية التسوية أهم عملية لإنشاء جداول الحياة الممهدة، حيث تستخدم هذه الجداول بصفة أساسية لقياس الوفيات، إلا أن لها العديد من الاستخدامات المختلفة بواسطة العديد من المتخصصين فى المجالات المختلفة، فقد استحوذت جداول الحياة على اهتمامات متزايدة من المعنيين بالدراسات السكانية والاجتماعية ومن القائمين على برامج الصحة العامة والإكتواريين. (محمد توفيق البلقينى، وآخرون، ٢٠١٣)

وتنقسم طرق تسوية معدلات الوفاة الخام إلى نوعين من الطرق: النوع الأول: يتمثل فى الطرق المعلمية (Parametric Method)، حيث تتطلب هذه الطرق وضع فرض مسبق لشكل دالة معدلات الوفاة الخام وضرورة حساب معالم هذه الدالة، وهذه الطرق هى: الطريقة البيانية (The Graphic Method)، طريقة المتوسطات المعدلة (Adjusted Average Method)، طريقة الجداول النمطية (Standard

(Tables)، طريقة التسوية بالتوليد البينى (The Graduation by Interpolation) طريقة تسوية معدلات الوفاة باستخدام أسلوب بييز (Bayesian Graduation)، طريقة التسوية بالقوانين الرياضية (Graduation by Mathematical Formula)، طريقة التحول ليدستون (Lidstone Transformation) ، طريقة (Heligman and Pollard) ولكن أحياناً قد لا يصلح لتسوية البيانات الطرق المعلمية المتعارف عليها بسبب مثلاً: عدم وجود دالة البقاء أو معالم النموذج غير معلومة أو غير متاحة. ولذلك تظهر الحاجة إلى النوع الثانى: ويتمثل فى الطرق اللامعلمية (Non-parametric Method) فى تسوية معدلات الوفاة الخام ، وهذه الطرق تؤكد عدم الحاجة إلى وضع فرض مسبق على شكل توزيع معدلات الوفاة الخام، ولا يسعى إلى تقدير شكل التوزيع ولا حساب معالمه، ولكنها تعتمد فقط على طبيعة البيانات المشاهدة. و هذه الطرق هى: طريقة كارنل (Kernel Smoothing)، طريقة المتوسطات المتحركة (Moving Weighted Average) ، تسوية الشرائح (Splines Smoothing)، طريقة الانحدار الموضعى المرجح (Locally-weighted Regression)، النماذج المضافة المعممة (Generalised Additive Models)، وطريقة (Whittaker – Henderson). (Debon A, Montes F, and Sala R., 2006).

وتهدف عملية تسوية البيانات باستخدام الطرق اللامعلمية إلى الحصول على قيم جديدة للبيانات من القيم الأصلية، حيث أنها تقوم بتقليل أى تأثيرات على المتغير المتنبأ به، على عكس الطرق المعلمية تكون التأثيرات تمثل الدالة التى تعبر عن العلاقة بين معدلات الوفاة والعمر غير متاحة. ويمكن تطبيق الطرق اللامعلمية على احتمالات الوفاة (q_x) وعلى معدلات الوفاة اللحظية (معدل وطأة الوفاة) (μ_x) ومعدلات الوفاة المركزية (m_x) عند العمر (x). ومن الممكن أن تكمل الطرق المعلمية واللامعلمية بعضها البعض فى حالات معينة، بمعنى أن نتيجة التسوية بالطرق اللامعلمية يمكن أن تصف بشكل أكثر ملاءمة نوع المعادلة التى يمكن استخدامها. علاوة على ذلك، يمكن استخدام الطرق اللامعلمية لتحديد النماذج المعلمية أو فحص البيانات. (Debon A, Montes F, and Sala R., 2006) ، وفى هذا البحث سوف يتم تسوية معدلات

الوفاة المركزية الخام باستخدام أحد الطرق اللامعلمية وهى طريقة – (Whittaker Henderson) للوصول إلى معدلات الوفاة المسواة.

وتتمثل مشكلة البحث فى أننا نجد فى الدول التى تتوافر فيها تعدادات سكانية دقيقة ومستمرة فإنها تستطيع إعداد جداول حياة أو وفاة كاملة لسكانها معتمدة أساساً على ما تجمع لديها من بيانات وإحصاءات متعلقة بالسكان. ومن هنا تنشأ المشكلة فى الحاجة إلى استخدام إحدى طرق التسوية لإجراء تسوية على معدلات الوفاة الخام التى تم التوصل إليها من التعدادات للحصول على معدلات الوفاة الممهدة أو المسواة.

وبالتالى يهدف هذا البحث إلى استخدام طريقة (Whittaker – Henderson graduation) لتسوية معدلات الوفاة الخام من البيانات الديموجرافية المتاحة للوصول إلى معدلات الوفاة المسواة عن طريق إجراء تمهيد للمعدلات الخام التي تم الحصول عليها مباشرة من البيانات الأصلية.
وترجع أهمية البحث إلى أن عملية التسوية تعد أهم إجراء فى إنشاء جداول الوفاة التى يحتاج إليها كل من القائمين على برامج الصحة العامة، الديموجرافيين، الإكتواريين، والقائمين على تقدير الأقساط بشركات التأمين على الحياة.

وقد تناولت الدراسات السابقة الآتى:

دراسة (إبراهيم محمد مرجان،١٩٩٥):قدمت هذه الدراسة طريقة سبراجو للتسوية باستخدام التوليد البينى المتذبذب للوصول إلى معدلات وفاة ممهدة منتظمة ومستمرة وقد تناولت هذه الدراسة ذلك من خلال توضيح طرق تسوية معدلات الوفاة، تسوية سبراجو بالتوليد البينى المتذبذب وتطبيقها على بيانات فعلية مصرية.

دراسة (إبراهيم محمد مرجان،١٩٩٦):قدمت هذه الدراسة تسوية معدلات الوفاة باستخدام طريقة جنكنز بالتوليد البيني المتذبذب المعدل، وأوضحت الدراسة أن طريقة جنكنز فى التوليد البيني المتذبذب المعدل أفضل طرق التوليد البيني حيث يتم معالجة عدم استمرارية أوعدم تمهيد منحنى المعدلات المسواة ويتم معالجة عدم خضوع المعدلات المسواة لقانون الوفاة الطبيعى (الذى يقضى بضرورة تزايد معدلات الوفاة

مع تزايد الأعمار فيما عدا السنوات القليلة الأولى من العمر) بالإضافة إلى تحقيق قدر مناسب من التوفيق مع المعدلات الخام ، وبالتالى أوصت الدراسة باستخدام طريقة جنكنز بالتوليد البيني المتذبذب المعدل إذا ما أردنا الحصول على معدلات وفاة مسواة مولدة ذات منحنى أكثر تمهيداً وأقرب إلى قانون الوفاة الطبيعى.

دراسة (محمد توفيق البلقينى، وآخرون ،٢٠١٣): قدمت هذه الدراسة بعض الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة الخام وصولاً إلى معدلات الوفاة الممهدة أو المسواة. وهذه الطرق تؤكد عدم الحاجة إلى وضع فرض مسبق لشكل توزيع معدلات الوفاة الخام. بل تعتمد على طبيعة البيانات المشاهدة فقط. فى هذه الدراسة تمت مقارنة بين الطرق اللامعلمية المختلفة لتسوية معدلات الوفاة (تسوية كارنل، تسوية الشرائح، تسوية الإنحدار المرجح المحلى، النماذج المضافة المعممة). وقد توصلت الدراسة إلى أن أسلوب النماذج المضافة المعممة هو أفضل نموذج لتسوية معدلات الوفاة الخام للوصول إلى معدلات الوفاة الممهدة للإعتماد عليها عند إنشاء جدول الحياة.

دراسة (Siu-Hang Li and Wai-Sum Chan, 2004): قدمت هذه الدراسة تسوية معدلات الوفاة الخام بإستخدام طريقة (Whittaker - Henderson).

دراسة (Marielynn E. Chanco. 2016): هدفت هذه الدراسة إلى إيجاد تقدير جيد لمعدلات الوفاة لأعضاء نظام الضمان الاجتماعي الفلبيني المعرضين للخطر لمدة عشر سنوات. وتم تقدير معدلات الوفاة الأولية من خلال الحصول على احتمال الوفاة (q_x) والعدد المعرض للخطر (E_x). ثم تطبيق طريقة تسوية Whittaker-Henderson للحصول على معدلات وفاة مسواة وممهدة وأقرب ما تكون إلى البيانات الأصلية.

طريقة (Whittaker – Henderson graduation):

يتم استخدام طريقة تسوية (Whittaker-Henderson) لإزالة التقلبات بسبب الأخطاء العشوائية (Frank E. Knorr. 1984). وقد تم تطبيق طريقة (Whittaker-Henderson)على احتمالات الوفاة (Marielynn E. Chanco.

2016)، وأيضاً على معدلات الوفاة المركزية (Siu-Hang Li and Wai-Sum Chan, 2004)، حيث انه يتم تقدير احتمالات أو معدلات الوفاة من البيانات الخام ، وبعد ذلك يتم تسوية احتمالات أو معدلات الوفاة باستخدام طريقة (Whittaker-Henderson) بهذه الصيغة التالية:

$$M = F + \lambda S = \sum_{x=0}^{n} W_x \left(m_x^g - m_x \right)^2 + \lambda \sum_{x=0}^{n-d} \left(\Delta^d m_x^g \right)^2$$

حيث أن:

$F = \sum_{x=0}^{n} W_x \left(m_x^g - m_x \right)^2 \Rightarrow$ measure of fitness.

$S = \sum_{x=0}^{n-z} \left(\Delta^z m_x^g \right)^2 \Rightarrow$ measure of smoothness.

$\Delta \Rightarrow$ forward difference operator.

d: عدد مرات الفروق التى سوف يتم تطبيقها.

m_x^g : قيم معدلات الوفاة المركزية المسواه عند العمر (x).

m_x : قيم معدلات الوفاة المركزية الخام عند العمر (x).

n : أعلى عمر.

W_x: وزن موجب يفترض عند العمر x.

λ : عدد غير سالب يمثل ثابت التسوية (حيث يعكس الأهمية النسبية للتسوية على التوفيق).

بتصغير (F)، يجعل قيم (m_x^g) ستكون قريبة إلى قيم (m_x)، وينتج عن ذلك أفضل جودة توفيق. و بتصغير (S) سوف نحصل على أعلى درجة من التمهيد والسلاسة ، وبالتالى يتم تصغير (M) مما يؤدى للحصول على القيم المثلى لمعدلات الوفاة المسواة، وفيما يتعلق بقيم (λ و d) يتم تحديدها بصورة افتراضية.

و تعد طريقة (Whittaker – Henderson graduation) (London, D. 1985) هى الطريقة المثلى التى تقلل من:

(weighted sum of squared deviations) + λ (sum of squared zth differences)

لأنها تعد واحدة من أكثر الطرق شيوعاً لتسوية وتوفيق معدلات الوفاة الخام، حيث تحقق هذه الطريقة التوازن بين عملية التسوية وعملية التوفيق للمنحنى الممهد (المسوى) من المعدلات الخام من خلال معالمها عن طريق تقليل معادلة الفرق. (Marielynn E. Chanco. 2016)

وسوف يتم تطبيق طريقة (Whittaker – Henderson graduation) بإستخدام برنامج (R) وذلك من خلال حزمة (Package Mortality Tables) للحصول على معدلات الوفاة المسواة (Reinhold Kainhofer ,2018)، ويفترض البرنامج أن:

λ = معلمة التسوية (Smoothing parameter)

تشير المعلمة (λ) إلى أهمية التسوية. حيث أن انخفاض قيمة (λ) سوف يؤكد أكثر على توليد سلسلة من مشاهدات بأعلى جودة ممكنة وبأقل تمهيد. على عكس ارتفاع قيمة (λ) سوف تؤكد على توليد سلسلة من المشاهدات ذات تمهيد أدق و جودة أقل. (Walter B. Lowrie., 1982)

d : درجة الفروق (order of differences)

الدراسة التطبيقية:

اعتمدت الدراسة التطبيقية على ما يلى:

١) قيم معدلات الوفاة المركزية (m_x) (موضحة فى جداول التسوية)، وقيم احتمالات الوفاة (q_x) للأعمار المفردة لكل من الذكور والإناث فى المجتمع المصرى طبقاً للتعداد العام للسكان والإسكان والمنشآت لجمهورية مصر العربية لعام٢٠١٧ موضحة فى ملحق (١)، والتى تم التوصل إليها فى بحث (جيهان المعداوى، ٢٠١٩).

٢) بمعلومية قيم (q_x) يتم حساب أعداد الوفيات (d_x) لكل من الذكور والإناث فى المجتمع المصرى (بإفتراض: عدد الأحياء عند العمر صفر (l_0)= 100000).

٣) يتم حساب العدد المعرض للخطر (E_x) لكل من الذكور والإناث فى المجتمع المصرى بإستخدام العلاقة التالية:

$$m_x = \frac{d_x}{E_x}$$

(Johnny Siu-Hang Li, Mary R. Hardy, and Ken Seng Tan. 2008)

والجداول أرقام (١ ، ٢) توضح قيم كلاً من أعداد الوفيات والأعداد المعرضة للخطر لكلاً من الذكور والإناث فى المجتمع المصرى.

جدول (١): يوضح أعداد الوفيات والأعداد المعرضة للخطر للذكور.

Age	d_x	E_x	Age	d_x	E_x	Age	d_x	E_x	Age	d_x	E_x
0	1552	99224	29	126	95999	58	1501	81327	87	2862	9195
1	113	98392	30	132	95869	59	1609	79772	88	2392	6568
2	113	98279	31	137	95735	60	1709	78113	89	1854	4445
3	100	98173	32	143	95595	61	1802	76358	90	1339	2848
4	87	98080	33	150	95448	62	1886	74513	91	903	1727
5	74	98000	34	158	95294	63	2051	72545	92	570	990
6	61	97932	35	166	95132	64	2200	70419	93	337	536
7	49	97877	36	173	94962	65	2331	68153	94	187	274
8	49	97828	37	181	94785	66	2444	65765	95	97	132
9	49	97779	38	199	94595	67	2539	63273	96	47	60
10	50	97730	39	218	94387	68	2659	60674	97	21	26
11	50	97680	40	236	94160	69	2755	57967	98	9	10
12	51	97629	41	254	93915	70	2827	55176	99	4	4
13	58	97575	42	272	93652	71	2874	52326	100+	2	2
14	66	97513	43	308	93361	72	2898	49439			
15	74	97443	44	344	93035	73	2900	46540			
16	81	97365	45	380	92673	74	2882	43649			
17	89	97280	46	415	92275	75	2844	40786			
18	92	97189	47	449	91843	76	2788	37971			
19	96	97095	48	540	91349	77	2716	35219			
20	99	96998	49	629	90764	78	2630	32546			
21	102	96897	50	717	90091	79	2532	29965			
22	106	96793	51	802	89331	80	2425	27486			
23	108	96687	52	885	88488	81	2309	25120			
24	110	96578	53	993	87549	82	2187	22872			
25	112	96467	54	1098	86504	83	2060	20749			
26	114	96355	55	1198	85356	84	2790	18323			
27	115	96240	56	1294	84109	85	3151	15352			
28	121	96122	57	1385	82770	86	3151	12201			

جدول (٢): يوضح أعداد الوفيات والأعداد المعرضة للخطر للإناث.

Age	d_x	E_x	Age	d_x	E_x	Age	d_x	E_x	Age	d_x	E_x
0	1393	99304	29	66	97160	58	1086	87737	87	2663	8078
1	100	98557	30	71	97092	59	1213	86588	88	2160	5666
2	100	98458	31	77	97018	60	1334	85314	89	1632	3770
3	87	98364	32	82	96938	61	1449	83922	90	1152	2379
4	74	98284	33	88	96853	62	1558	82419	91	762	1422
5	62	98216	34	93	96763	63	1821	80730	92	473	804
6	49	98160	35	99	96666	64	2065	78787	93	275	431
7	36	98118	36	105	96564	65	2288	76610	94	150	218
8	35	98082	37	110	96457	66	2488	74222	95	77	104
9	34	98047	38	123	96340	67	2664	71646	96	37	47
10	33	98014	39	136	96210	68	2931	68849	97	17	20
11	31	97982	40	149	96068	69	3156	65806	98	7	8
12	30	97951	41	162	95912	70	3337	62560	99	3	3
13	33	97920	42	175	95743	71	3474	59155	100+	2	2
14	36	97885	43	197	95557	72	3567	55634			
15	39	97848	44	219	95349	73	3617	52042			
16	42	97807	45	240	95119	74	3626	48420			
17	45	97764	46	262	94868	75	3597	44809			
18	45	97719	47	283	94596	76	3533	41244			
19	46	97674	48	336	94286	77	3438	37758			
20	46	97628	49	389	93924	78	3316	34381			
21	46	97582	50	442	93508	79	3171	31138			
22	47	97535	51	493	93041	80	3007	28049			
23	48	97488	52	544	92522	81	2830	25130			
24	50	97438	53	630	91935	82	2642	22394			
25	52	97387	54	714	91263	83	2449	19849			
26	53	97335	55	796	90508	84	2996	17126			
27	55	97281	56	876	89672	85	3180	14038			
28	60	97223	57	954	88757	86	3039	10929			

٤) تسوية معدلات الوفاة المركزية الخام للأعمار المفردة باستخدام طريقة (Whittaker – Henderson graduation) ويتم إجراء عملية التسوية من خلال برنامج (R)- (R. whittaker mortality Table) للحصول على معدلات الوفاة المسواة، بمعلومية معدلات الوفاة المركزية الخام والعدد المعرض للخطر للأعمار من (0 : 100+) لكلاً من الذكور والإناث فى المجتمع المصرى وذلك من خلال أربعة فروض وهم:

الفرض الأول: (λ =1 , d= 2)

الفرض الثانى: $(d= 2 , \lambda =1/10)$

الفرض الثالث: $(d= 3 , \lambda =1)$

الفرض الرابع: $(d= 3 , \lambda =1/10)$

وموضح ذلك فى الجداول أرقام (٣ ، ٤):

جدول (٣): معدلات الوفاة المركزية المسواة للذكور.

age(x)	m_x (male)	m_x^g $(d= 2 , \lambda =1)$	m_x^g $(d= 2 , \lambda =1/10)$	m_x^g $(d= 3 , \lambda =1)$	m_x^g $(d= 3 , \lambda =1/10)$
0	0.015638754	0.005740183	0.003371994	0.008719792	0.006567921
1	0.001144879	0.002829522	0.002376304	0.002718617	0.002990081
2	0.001144879	0.001609803	0.001711787	0.001293493	0.001618705
3	0.001015061	0.001073077	0.001275156	0.000863891	0.001029182
4	0.000885242	0.000810663	0.000988101	0.000712577	0.000750585
5	0.000755424	0.000666096	0.000798581	0.000646356	0.000610133
6	0.000625606	0.000578444	0.000673902	0.000600824	0.000537812
7	0.000495787	0.000525143	0.000593984	0.000559838	0.000502734
8	0.000500218	0.000498488	0.000546433	0.000526685	0.000490393
9	0.00050465	0.000490837	0.000522949	0.000506159	0.000493636
10	0.000509081	0.000497602	0.000518294	0.000501126	0.000509123
11	0.000513512	0.000517541	0.000529303	0.000513601	0.000535646
12	0.000517943	0.000552048	0.000554053	0.000545554	0.000573017
13	0.000597672	0.000603048	0.00059107	0.000597795	0.00062103
14	0.0006774	0.000667645	0.000638376	0.000667182	0.000678482
15	0.000757129	0.000740433	0.000693492	0.000746644	0.00074279
16	0.000836858	0.000814678	0.000753485	0.000826652	0.000810107
17	0.000916587	0.000883529	0.000815174	0.00089805	0.000875948
18	0.000951287	0.000941894	0.000875558	0.000955436	0.0009362
19	0.000985987	0.000989419	0.000932411	0.000999107	0.00098814
20	0.001020687	0.001028035	0.000984358	0.001032794	0.001030831
21	0.001055387	0.001060054	0.001030851	0.001060503	0.001064978

تابع جدول (٣):

age(x)	m_x (male)	m_x^g (d= 2 , λ =1)	m_x^g (d= 2 , λ =1/10)	m_x^g (d= 3 , λ =1)	m_x^g (d= 3 , λ =1/10)
22	0.001090086	0.001087295	0.001072086	0.001084846	0.001092477
23	0.001112054	0.00111123	0.001108899	0.001107254	0.001115906
24	0.001134022	0.001133948	0.00114267	0.001129172	0.001138106
25	0.00115599	0.001157852	0.001175089	0.001152686	0.001161809
26	0.001177958	0.001185572	0.001207958	0.001180557	0.00118936
27	0.001199926	0.001219727	0.001243007	0.001215586	0.001222523
28	0.001258607	0.001262162	0.001281725	0.001259421	0.00126234
29	0.001317288	0.001312067	0.001325139	0.001311476	0.001309106
30	0.001375969	0.001368	0.001374073	0.001369923	0.001362658
31	0.00143465	0.001429044	0.001429357	0.001433022	0.001422749
32	0.001493331	0.001495282	0.001491979	0.001499967	0.001489404
33	0.001576123	0.001567622	0.001563175	0.001571042	0.001563173
34	0.001658915	0.001646819	0.001644414	0.001647561	0.001645285
35	0.001741708	0.001735021	0.001737639	0.001732821	0.001737786
36	0.0018245	0.001836636	0.001845403	0.001832567	0.001843523
37	0.001907292	0.001958101	0.00197087	0.001953852	0.0019659
38	0.002107121	0.002105623	0.002117602	0.002102068	0.002108455
39	0.00230695	0.002278973	0.002288969	0.002277819	0.002274545
40	0.002506779	0.002477606	0.002488889	0.002480054	0.002467841
41	0.002706608	0.002704599	0.002722372	0.002710214	0.002693082
42	0.002906437	0.002968136	0.002995813	0.002973889	0.002956665
43	0.003303812	0.003279078	0.003316821	0.003278595	0.003266831
44	0.003701188	0.00364126	0.003693232	0.003630407	0.003633586
45	0.004098564	0.004062257	0.004134113	0.004040643	0.004069305
46	0.00449594	0.004560728	0.004650249	0.004532836	0.004588878
47	0.004893316	0.005167772	0.00525369	0.005141287	0.00520834
48	0.005913929	0.005915611	0.005955646	0.005895721	0.005941387
49	0.006934542	0.006798442	0.006761488	0.006796792	0.006794673

تابع جدول (٣):

age(x)	m_x (male)	m_x^g (d= 2 , λ =1)	m_x^g (d= 2 , λ =1/10)	m_x^g (d= 3 , λ =1)	m_x^g (d= 3 , λ =1/10)
50	0.007955156	0.007794758	0.007672509	0.007820708	0.007766528
51	0.008975769	0.008883335	0.008687415	0.00893659	0.008848001
52	0.009996382	0.010052527	0.009803523	0.010122448	0.010025248
53	0.011344099	0.011298609	0.011017301	0.011368052	0.011282232
54	0.012691816	0.012607807	0.012323691	0.012665461	0.012603361
55	0.014039534	0.013968625	0.01371861	0.014009908	0.013977407
56	0.015387251	0.01538019	0.01520106	0.015404063	0.015401112
57	0.016734968	0.016854995	0.016774376	0.016859333	0.016881181
58	0.01845089	0.018413811	0.01844616	0.018391693	0.018434182
59	0.020166812	0.020068994	0.020226415	0.020016963	0.020084968
60	0.021882734	0.021842164	0.022128536	0.021762895	0.02186566
61	0.023598656	0.023774858	0.024169076	0.023679255	0.02381357
62	0.025314578	0.025926704	0.026365692	0.025830392	0.025966758
63	0.02827844	0.028351952	0.028732537	0.028264887	0.028356975
64	0.031242302	0.031039112	0.031272211	0.030978438	0.031002101
65	0.034206164	0.033954138	0.033979324	0.033930553	0.033904576
66	0.037170027	0.037066998	0.036843423	0.037076834	0.037052039
67	0.040133889	0.040361114	0.03985109	0.040390307	0.040417528
68	0.043831892	0.043823187	0.042987056	0.043858806	0.043958231
69	0.047529895	0.047410031	0.046234139	0.04746556	0.047614169
70	0.051227898	0.051065771	0.049579213	0.051187213	0.051311429
71	0.054925901	0.054732151	0.053019159	0.054994195	0.054969878
72	0.058623904	0.058354881	0.056566585	0.058845057	0.058515488
73	0.062321907	0.061889757	0.060255178	0.062674956	0.061897002
74	0.066019909	0.065312239	0.064144584	0.066387243	0.065105645
75	0.069717912	0.068633256	0.068324906	0.069863628	0.068195462
76	0.073415915	0.071922286	0.072920983	0.073008343	0.071301314
77	0.077113918	0.075336644	0.078096745	0.075830642	0.074652414

تابع جدول (٣):

age(x)	m_x (male)	m_x^g (d= 2 , λ =1)	m_x^g (d= 2 , λ =1/10)	m_x^g (d= 3 , λ =1)	m_x^g (d= 3 , λ =1/10)
78	0.080811921	0.079154705	0.084059906	0.078549207	0.078581528
79	0.084509924	0.08381136	0.091067016	0.081685326	0.08353265
80	0.088207927	0.089936295	0.09942828	0.086118516	0.090071476
81	0.09190593	0.098396367	0.109510438	0.093108375	0.098901766
82	0.095603933	0.110333434	0.121734019	0.104302876	0.110886076
83	0.099301936	0.127150446	0.136558163	0.121705457	0.12706268
84	0.152284175	0.150299576	0.154441846	0.14745853	0.148647317
85	0.205266414	0.180534973	0.175764981	0.183292828	0.177023811
86	0.258248653	0.218380455	0.200900981	0.230176112	0.213794374
87	0.311230892	0.26438347	0.230263735	0.287969269	0.260857887
88	0.364213131	0.319317943	0.264341964	0.355230015	0.32051335
89	0.41719537	0.384344352	0.303724999	0.429258428	0.395591914
90	0.470177609	0.461112127	0.349122161	0.506340849	0.489620214
91	0.523159849	0.551811092	0.401378117	0.582089256	0.607017491
92	0.576142088	0.659197954	0.461486919	0.651809617	0.753331584
93	0.629124327	0.786627023	0.530607295	0.710888697	0.935523426
94	0.682106566	0.938106224	0.610081141	0.75520376	1.162314795
95	0.735088805	1.118389003	0.701456439	0.781533687	1.444618881
96	0.788071044	1.333105034	0.806515301	0.787916754	1.796077773
97	0.841053283	1.588929637	0.927307507	0.773887221	2.23373598
98	0.894035522	1.893791824	1.066189931	0.740537184	2.778885287
99	0.947017761	2.257122779	1.225872294	0.690383668	3.458124375
100 +	1.011584064	2.690152532	1.409470015	0.627060132	4.304687481

جدول (٤): معدلات الوفاة المركزية المسواة للإناث.

age(x)	m_x (Female)	m_x^g (d= 2 , λ =1)	m_x^g (d= 2 , λ =1/10)	m_x^g (d= 3 , λ =1)	m_x^g (d= 3 , λ =1/10)
0	0.014024	0.005146864	0.003109398	0.00773815	0.005852257
1	0.001013	0.00252298	0.002142056	0.002424962	0.002669056
2	0.001013	0.001421276	0.001506822	0.001147019	0.001433954
3	0.000884	0.00093212	0.001093829	0.000754077	0.000896583
4	0.000756	0.000687884	0.000823535	0.000606982	0.000637589
5	0.000627	0.000547769	0.000644394	0.000532977	0.000501563
6	0.000499	0.000457564	0.000524528	0.00047616	0.000425169
7	0.00037	0.000397329	0.000444438	0.0004241	0.000380406
8	0.000358	0.000359789	0.000391985	0.0003802	0.000354088
9	0.000346	0.000337485	0.00035896	0.000347698	0.000339616
10	0.000333	0.000325775	0.000340043	0.000327573	0.00033371
11	0.000321	0.00032311	0.000331876	0.000319956	0.000334848
12	0.000309	0.000329331	0.000332228	0.000324676	0.000342283
13	0.000338	0.000344561	0.000339441	0.000340906	0.000355346
14	0.000368	0.000366574	0.000351881	0.000365968	0.000372925
15	0.000398	0.000392134	0.00036794	0.000395519	0.000393346
16	0.000427	0.000417594	0.000386058	0.000424333	0.00041452
17	0.000457	0.00043951	0.000404822	0.00044774	0.000434341
18	0.000462	0.000455685	0.000423147	0.000463378	0.000451219
19	0.000466	0.000466802	0.000440528	0.000472173	0.000464537
20	0.000471	0.000474483	0.000456924	0.000476908	0.000474709
21	0.000476	0.000481042	0.000472738	0.000480762	0.000482978
22	0.00048	0.000488325	0.00048864	0.000486146	0.000491046
23	0.000497	0.000498153	0.000505503	0.000494624	0.000500744
24	0.000514	0.000511315	0.000524197	0.000507	0.000513776
25	0.00053	0.000528993	0.000545642	0.000524264	0.000531629

تابع جدول (٤):

age(x)	m_x (Female)	m_x^g (d= 2 , λ =1)	m_x^g (d= 2 , λ =1/10)	m_x^g (d= 3 , λ =1)	m_x^g (d= 3 , λ =1/10)
26	0.000547	0.000552406	0.000570696	0.000547897	0.000555504
27	0.000564	0.000583228	0.000600145	0.000579817	0.000586231
28	0.00062	0.000623241	0.000634621	0.000621423	0.000624121
29	0.000677	0.000671084	0.000674255	0.000671786	0.000668774
30	0.000734	0.00072437	0.000718937	0.000728215	0.000719217
31	0.000791	0.000781167	0.000768547	0.000787504	0.000774227
32	0.000848	0.000839694	0.000823019	0.00084676	0.000832705
33	0.000907	0.000898975	0.000882505	0.000904464	0.000894106
34	0.000966	0.000959392	0.000947524	0.000961419	0.000958782
35	0.001025	0.001023191	0.001019079	0.001021227	0.001028127
36	0.001084	0.001094874	0.001098717	0.001089856	0.001104425
37	0.001142	0.0011797	0.001188353	0.001173667	0.001190393
38	0.00128	0.001282121	0.001290053	0.001276881	0.001288633
39	0.001418	0.001401469	0.001405562	0.001399243	0.001401189
40	0.001555	0.001535975	0.001536753	0.001538112	0.001529774
41	0.001693	0.001685577	0.001686015	0.001691675	0.001676281
42	0.00183	0.001853523	0.001856527	0.001860919	0.00184331
43	0.002062	0.002044594	0.002052183	0.002048837	0.002034476
44	0.002294	0.002261038	0.002277273	0.002259009	0.002254605
45	0.002526	0.002507653	0.002537053	0.00249862	0.002510208
46	0.002758	0.002795055	0.002838067	0.002781414	0.002809681
47	0.00299	0.003141177	0.003188173	0.003126796	0.0031628
48	0.003568	0.003565031	0.003595622	0.003551756	0.003579176
49	0.004145	0.004065938	0.004066656	0.004059011	0.004066213
50	0.004723	0.004637908	0.004606907	0.004642303	0.004628982
51	0.0053	0.005280214	0.005222555	0.005297439	0.005270993
52	0.005878	0.006001346	0.005920918	0.006028653	0.005994958

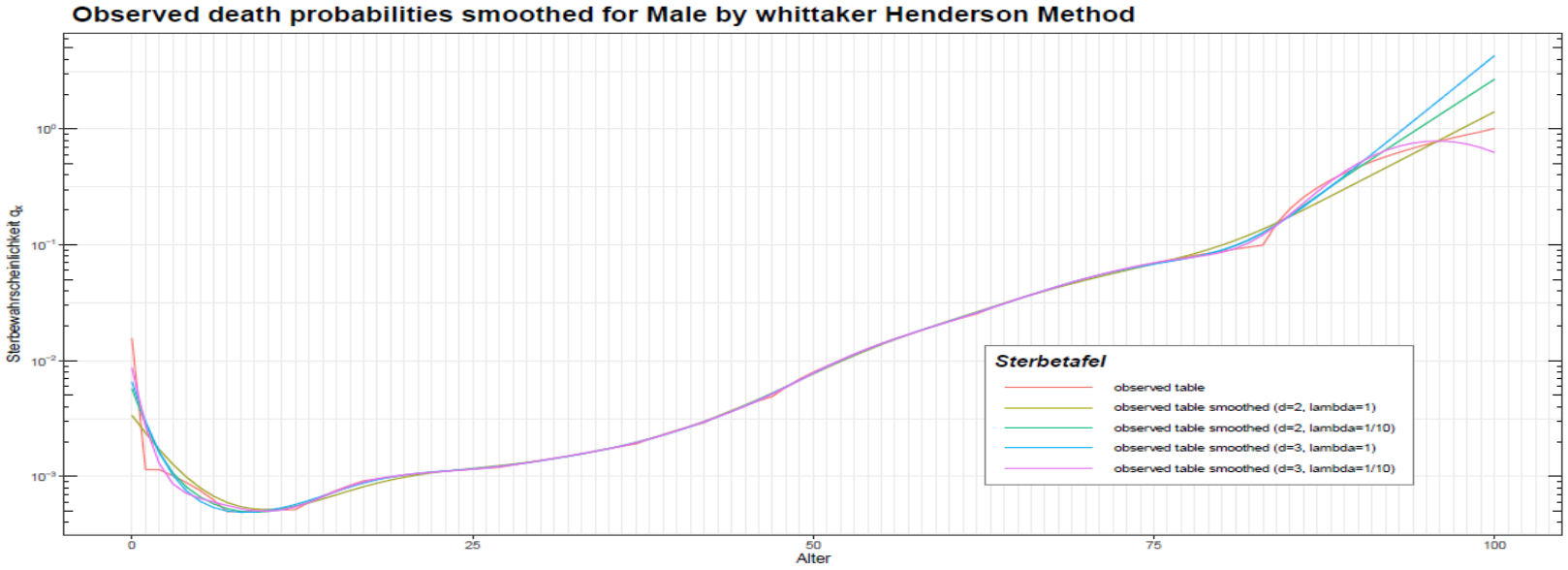
تابع جدول (٤):

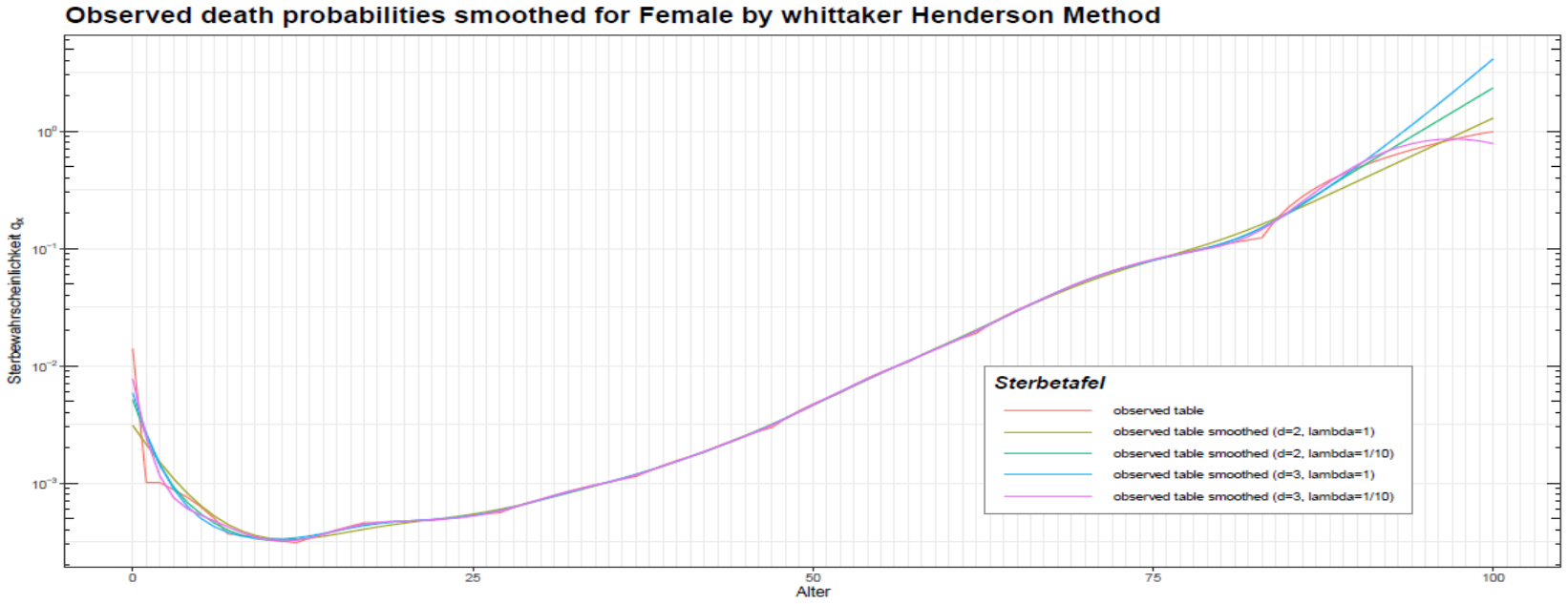
age(x)	m_x (Female)	m_x^g (d= 2 , λ =1)	m_x^g (d= 2 , λ =1/10)	m_x^g (d= 3 , λ =1)	m_x^g (d= 3 , λ =1/10)
53	0.006851	0.006814349	0.006710287	0.006844079	0.006803068
54	0.007825	0.007715116	0.007598261	0.007743801	0.007697135
55	0.008799	0.008698773	0.008594056	0.008725663	0.008681025
56	0.009772	0.009773378	0.00971067	0.00979689	0.009763915
57	0.010746	0.010965077	0.010966135	0.010978767	0.010962714
58	0.012377	0.012309755	0.012383142	0.012298667	0.012302716
59	0.014007	0.013822328	0.013985989	0.013778195	0.013817034
60	0.015638	0.015528636	0.015803434	0.015452612	0.015548171
61	0.017268	0.017488026	0.017870043	0.01739258	0.017548537
62	0.018899	0.01979742	0.020224682	0.019700967	0.01987694
63	0.022554	0.022558114	0.022904026	0.022469281	0.022589392
64	0.02621	0.025767303	0.025928016	0.02571162	0.025726597
65	0.029866	0.029385639	0.029304278	0.02938496	0.029310012
66	0.033522	0.033384418	0.033031303	0.033441503	0.033341369
67	0.037178	0.037765708	0.037099743	0.037864532	0.037801285
68	0.042565	0.042538462	0.04149066	0.042653588	0.042644457
69	0.047953	0.04763233	0.046169712	0.047771138	0.047793744
70	0.05334	0.052941264	0.051096575	0.053142191	0.053143848
71	0.058728	0.058352733	0.056234879	0.058674178	0.058573004
72	0.064115	0.063766034	0.061562148	0.064273059	0.063960975
73	0.069503	0.069103039	0.067078961	0.069844735	0.069211323
74	0.07489	0.074317242	0.072816775	0.075286964	0.074275557
75	0.080278	0.079405903	0.078844079	0.080489524	0.079176406
76	0.085666	0.084430319	0.085271074	0.085364507	0.084027548
77	0.091053	0.089543879	0.092253093	0.089917917	0.089047807
78	0.096441	0.095025345	0.099993077	0.094352165	0.0945695
79	0.101828	0.101313089	0.108743143	0.099167541	0.101042736

تابع جدول (٤):

age(x)	m_x (Female)	m_x^g (d= 2 , λ =1)	m_x^g (d= 2 , λ =1/10)	m_x^g (d= 3 , λ =1)	m_x^g (d= 3 , λ =1/10)
80	0.107216	0.109038289	0.118804925	0.105228552	0.109038842
81	0.112603	0.119053141	0.130527243	0.113781129	0.119255344
82	0.117991	0.132442012	0.144298202	0.12642406	0.132521756
83	0.123378	0.150472995	0.1605267	0.145010489	0.149801273
84	0.174944	0.174378798	0.179605748	0.171386204	0.172183241
85	0.22651	0.204735987	0.201847203	0.206907101	0.200876312
86	0.278076	0.241911523	0.227546619	0.252226401	0.237263636
87	0.329642	0.286311185	0.25702596	0.307137705	0.282989239
88	0.381208	0.338548725	0.290662748	0.370515379	0.340068701
89	0.432774	0.399556087	0.328909457	0.440381294	0.411025152
90	0.48434	0.470639878	0.372305982	0.514060224	0.4990543
91	0.535906	0.553499841	0.421487979	0.588367741	0.60822515
92	0.587472	0.650232867	0.47719374	0.659803966	0.743727415
93	0.639038	0.763343368	0.540271694	0.7247598	0.912182147
94	0.690604	0.895773045	0.611689937	0.779749907	1.122038246
95	0.74217	1.050954749	0.692548518	0.821671045	1.384084353
96	0.793736	1.232890606	0.784094719	0.848062906	1.71211408
97	0.845302	1.446252547	0.88774136	0.857335069	2.123793534
98	0.896868	1.696503673	1.00508817	0.848922968	2.641794911
99	0.948434	1.990041045	1.137946308	0.823345771	3.295280338
100+	0.987508	2.334362076	1.288366276	0.782154949	4.121847544

والشكلين التاليين يوضحين معدلات الوفاة الخام المسواة بالفروض الأربعة لكلاً من الذكور والإناث:


Observed death probabilities smoothed for Male by whittaker Henderson Method
Sterbewahrscheinlichkeit q_x
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
0
25
50
75
100
Alter
Sterbetafel
observed table
observed table smoothed (d=2, lambda=1)
observed table smoothed (d=2, lambda=1/10)
observed table smoothed (d=3, lambda=1)
observed table smoothed (d=3, lambda=1/10)


Observed death probabilities smoothed for Female by whittaker Henderson Method
Sterbewahrscheinlichkeit q_x
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
0
25
50
75
100
Alter
Sterbetafel
observed table
observed table smoothed (d=2, lambda=1)
observed table smoothed (d=2, lambda=1/10)
observed table smoothed (d=3, lambda=1)
observed table smoothed (d=3, lambda=1/10)

٥) بعد حساب معدلات الوفاة المركزية المسواة ، يتم إيجاد قيمة (M) التى تمثل مجموع أقل الفروق من المعادلة التالية لكلاً من الذكور والإناث:

$$M = F + \lambda S = \sum_{x=0}^{n} W_x \left(m_x^g - m_x \right)^2 + \lambda \sum_{x=0}^{n-d} \left(\Delta^d m_x^g \right)^2$$

وبفرض أن:

$W_x = 1$ **لكل الأعمار**

فإن قيمة (M) لكلاً من الذكور والإناث تكون كالتالى :

	Male		**Female**	
λ	d= 2	d= 3	d= 2	d= 3
1	6.659990626	0.269365103	4.266836943	0.096145367
1/10	0.368690543	24.53437927	0.226617794	6.678123182

وبالتالى تكون أفضل تسوية باستخدام (Whittaker – Henderson graduation) هى التى تحقق أصغر قيمة لـ (M)، ونلاحظ من الجدول السابق أن أصغر قيمة لـ (M)، تكون عند الفرض الثالث للتسوية ($d= 3 , \lambda_{=1}$) وهى تمثل القيم المثلى لمعدلات الوفاة المسواة لكلاً من الذكور والإناث (Frank E. Knorr. 1984) , (Marielynn E. Chanco. 2016) (Siu-Hang Li and Wai-Sum Chan, 2004)

نتائج الدراسة:

تتمثل أهم النتائج التى توصلت إليها الدراسة فيما يلى:

- أهمية مرحلة تسوية البيانات حيث أنها من أهم المراحل الأساسية عند إنشاء جداول الوفاة التى يحتاج إليها كل القائمين على برامج الصحة العامة الديموجرافيين، والاكتواريين، والقائمين على تقدير الأقساط بشركات التأمين على الحياة.
- أهمية تسوية معدلات الوفاة الخام وتدريجها لتخليصها من عدم الانتظام الناتج من العشوائية فى المقادير المعرضة لخطر الوفاة وعدد الوفيات.

- استخدام الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة الخام نظراً لأنها لا تشترط معرفة صيغة دالية مسبقة لدالة العمر(أو دالة البقاء) ولا تعتمد على فئة من المعالم يتعين تقديرها مقارنة بالطرق المعلمية الأخرى.
- بمعلومية قيم (q_x) تم حساب أعداد الوفيات (d_x) لكل من الذكور والإناث فى المجتمع المصرى (بافتراض: عدد الأحياء عند العمر صفر (l_0)= 100000).
- تم إيجاد أعداد الأفراد المعرضة للخطر (E_x) لكل من الذكور والإناث فى المجتمع المصرى.
- تم تسوية معدلات الوفاة المركزية الخام للأعمار المفردة باستخدام طريقة (Whittaker – Henderson graduation) وذلك من خلال برنامج (R) وذلك من خلال أربعة فروض وهم:

الفرض الأول: (λ =1 , d= 2)، الفرض الثانى: (λ =1/10 , d= 2)

الفرض الثالث: (λ =1 , d= 3)، الفرض الرابع: (λ =1/10 , d= 3)

- تم إيجاد قيمة (M)، وكانت أصغر قيمة لـ (M)، عند الفرض الثالث (λ =1, d= 3) لكلاً من الذكور والإناث.

التوصيات:

توصى هذه الدراسة:

- بضرورة إجراء عملية تسوية لمعدلات الوفاة الخام وتدريجها لتخليصها من عدم الانتظام الناتج من العشوائية فى المقادير المعرضة لخطر الوفاة وعدد الوفيات حتى يسهل التعامل مع هذه المعدلات لإتمام عملية إنشاء جداول الوفاة.
- استخدام برامج إحصائية متقدمة ومتخصصة مثل برنامج (R) لتطبيق طريقة (Whittaker-Henderson graduation) لتسوية معدلات الوفاة الخام للوصول إلى نتائج أكثر منطقية.

المراجع:

أولاً: المراجع العربية:

١) إبراهيم محمد مرجان (١٩٩٥)، " تسوية معدلات الوفاة باستخدام طريقة براجو بالتوليد البيني المتذبذب"، المجلة المصرية للدراسات التجارية، كلية التجارة، جامعة المنصورة، المجلد١٩، العدد٢، ص ٤١١- ٤٥٧.

٢) إبراهيم محمد مرجان (١٩٩٦)، " تسوية معدلات الوفاة باستخدام طريقة جنكنز بالتوليد البيني المتذبذب المعدل"، المجلة المصرية للدراسات التجارية، كلية التجارة، جامعة المنصورة، المجلد٢٠، العدد٣، ص ١٤٩- ١٨٩.
٣) محمد توفيق البلقينى، وآخرون (٢٠١٣)، "استخدام الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة الخام: دراسة مقارنة"، المجلة المصرية للدراسات التجارية، كلية التجارة، جامعة المنصورة، المجلد٣٧، العدد٣، ص ٥٩٩- ٦٢١.

ثانيًا: المراجع الأجنبية:

1) Siu-Hang Li and Wai-Sum Chan, (2004). Estimation of complete period life tables for Singaporeans, Journal of Actuarial practice, Vol. 11, 129-146
2) Marielynn E. Chanco, (2016). "Mortality Rates Estimation UsingWhittaker-Henderso GraduationTechnique". Social Security System, Quezon City, Philippines, Journal of the Mathematical Society of the Philippines, Vol. 39 Special Issue (2016) pp. 7-16
3) Debon A, Montes F, and Sala R. (2006). "A Comparison of Nonparametric Methods in the Graduation of Mortality: Application to Data from the Valencia Region (Spain)". International Statistical Review, Vol 74, 2, pp.215–233.
4) Frank E. Knorr. (1984). "Multidimensional Whittaker- Henderson graduation". Transactions of Society of actuaries International Statistical, Vol 36, pp.213–255.
5) Takis Papaioannou and Athanasios Sachlas. (2004). "Graduation of mortality rates revisited". University of Piraeus.
6) London, D. (1985). Graduation: The Revision of Estimates, ACTEX Publications,Winsted, Connecticut.
7) Walter B. Lowrie. (1982)" An Extension of the Whittaker-Henderson Method of Graduation", Transactions of Society of Actuaries, Vol. 34, pp. 329–372.
8) Johnny Siu-Hang Li, Mary R. Hardy, and Ken Seng Tan. (2008)" Threshold Life Tables and Their Applications ", North American Actuarial Journal, Vol. 12, Number 2, Published online: 28 Dec 2012, pp. 99–115.

9) Whittaker. mortality Table .R, Smooth a life table using the Whittaker-Henderson method
10) Miller M.D. (1946). Elements of Graduation. New York: Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries.
11) Reinhold Kainhofer (2018). R package A Framework for various Types of Mortality/ Life Tables (Mortality Tables).

ملحق (١)

جدول (١): جدول الحياة الكامل لجمهورية مصر العربية وفقاً لتعداد السكان لعام ٢٠١٧ (للذكور).

Age	q_x	Age	q_x	Age	q_x	Age	q_x
0	0.015517417	26	0.001177265	52	0.009946667	78	0.077673451
1	0.001144224	27	0.001199207	53	0.011280118	79	0.081083734
2	0.001144224	28	0.001257816	54	0.012611783	80	0.084481939
3	0.001014546	29	0.001316421	55	0.013941666	81	0.087868129
4	0.000884851	30	0.001375023	56	0.015269771	82	0.091242368
5	0.000755139	31	0.001433622	57	0.0165961	83	0.09460472
6	0.00062541	32	0.001492217	58	0.018282228	84	0.141509357
7	0.000495664	33	0.001574882	59	0.019965492	85	0.186160196
8	0.000500093	34	0.001657541	60	0.021645898	86	0.22871587
9	0.000504522	35	0.001740192	61	0.023323455	87	0.269320468
10	0.000508951	36	0.001822837	62	0.024998169	88	0.308105159
11	0.00051338	37	0.001905475	63	0.02788418	89	0.345189616
12	0.000517809	38	0.002104904	64	0.030761768	90	0.380683241
13	0.000597493	39	0.002304292	65	0.033630971	91	0.414686251
14	0.000677171	40	0.002503641	66	0.036491826	92	0.447290614
15	0.000756843	41	0.00270295	67	0.039344368	93	0.478580887
16	0.000836508	42	0.002902219	68	0.042891876	94	0.508634947
17	0.000916167	43	0.003298364	69	0.04642657	95	0.537524634
18	0.000950834	44	0.003694352	70	0.049948519	96	0.565316329
19	0.000985501	45	0.004090182	71	0.053457792	97	0.59207146
20	0.001020166	46	0.004485856	72	0.056954457	98	0.617846958
21	0.00105483	47	0.004881373	73	0.060438583	99	0.642695659
22	0.001089493	48	0.005896493	74	0.063910236	100	0.671795336
23	0.001111436	49	0.006910582	75	0.067369483		
24	0.00113338	50	0.007923639	76	0.07081639		
25	0.001155323	51	0.008935667	77	0.074251025		

جدول (٢): جدول الحياة الكامل لجمهورية مصر العربية وفقاً لتعداد السكان لعام ٢٠١٧ (للإناث).

Age	q_x	Age	q_x	Age	q_x	Age	q_x
0	0.01393	26	0.00055	52	0.00586	78	0.09200
1	0.00101	27	0.00056	53	0.00683	79	0.09689
2	0.00101	28	0.00062	54	0.00779	80	0.10176
3	0.00088	29	0.00068	55	0.00876	81	0.10660
4	0.00076	30	0.00073	56	0.00972	82	0.11142
5	0.00063	31	0.00079	57	0.01069	83	0.11620959
6	0.00050	32	0.00085	58	0.01230	84	0.160872563
7	0.00037	33	0.00091	59	0.01391	85	0.203466747
8	0.00036	34	0.00097	60	0.01552	86	0.244132628
9	0.00035	35	0.00102	61	0.01712	87	0.282998254
10	0.00033	36	0.00108	62	0.01872	88	0.32018058
11	0.00032	37	0.00114	63	0.02230	89	0.355786646
12	0.00031	38	0.00128	64	0.02587	90	0.389914603
13	0.00034	39	0.00142	65	0.02943	91	0.422654622
14	0.00037	40	0.00155	66	0.03297	92	0.454089684
15	0.00040	41	0.00169	67	0.03650	93	0.484296283
16	0.00043	42	0.00183	68	0.04168	94	0.513345051
17	0.00046	43	0.00206	69	0.04683	95	0.541301306
18	0.00046	44	0.00229	70	0.05195	96	0.568225544
19	0.00047	45	0.00252	71	0.05705	97	0.594173876
20	0.00047	46	0.00275	72	0.06212	98	0.619198416
21	0.00048	47	0.00299	73	0.06717	99	0.643347634
22	0.00048	48	0.00356	74	0.07219	100	0.661091241
23	0.00050	49	0.00414	75	0.07718		
24	0.00051	50	0.00471	76	0.08215		
25	0.00053	51	0.00529	77	0.08709		