عن فلسفة الرياضيات

About Philosophy of Mathematics

أ.د محمد أمين المفتى
أستاذ تعليم الرياضيات
كلية التربية ـ جامعة عين شمس
elmofti44@hotmail.com

فلسفة الرياضيات فرع من فروع الفلسفة التي تدرس فرضيات، وأسس، وتضمينات الرياضيات. وتهدف إلى فهم طبيعة الرياضيات والأساليب الرياضية، وتوضح قيمة الرياضيات في حياة الناس. إن منطقية وبنية طبيعة الرياضيات في حد ذاتها تجعل هذه الدراسة واسعة وفريدة بين الفروع الأخرى للفلسفة.

وإذا تتبعنا أصل الرياضيات نجد أنها مجال للنقاش وعدم الإتفاق حول إذا ما كان مولد الرياضيات قد حدث بطريقة عشوائية، أم متضمن بالضرورة في تطور الفروع المعرفية الأخرى مثل الفيزياء، وهذا لا يزال مجال خصب للنقاش والجدل. وكثير من المفكرين لهم إسهامات فيما يتعلق بطبيعة الرياضيات. وحاليا يعطى بعض فلاسفة الرياضيات الأهمية لهذا الجدل ونتيجته الاختلاف بينهم وذلك حسب ما يعتقد كل منهم . يعتقد فلاسفة الرياضيات في الغرب حيث ينكصون للماضي البعيد وما ذكره فيثاغورث بأن "الرياضيات هي كل شيء"، و تفسير افلاطون لتلك العبارة بدراسته الحالة الوجودية للكائنات الرياضية، وكذلك دراسة أرسطو للمنطق والقضايا المرتبطة باللانهاية (الفعلي مقابل المحتمل).

ونجد أن الفلاسفة الإغريق قد تأثروا كثيراً فيما يتعلق بالرياضيات من خلال دراستهم للهندسة، فعلى سبيل المثال اكدوا على أن الرقم واحد ليس عدداً ، ولكنه وحدة من وحدات الطول. وعرفوا العدد على أنه تعدد ، وعلى ذلك فإن ٣ تمثل تعدد من الوحدات. كما وضحوا أن ٢ ليست عددا ، ولكنها تمثل المفهوم أو الفكرة الأساسية للاقتران أو للزوج. وهذه الآراء جاءت نتيجة فكرة الحرف أو الحافة المستقيمة ورسمها . هذه الآراء مهدت الطريق لتمثيل الأعداد على خط مستقيم .

كان سيمون ستيفن أول من تحدى أفكار الإغريق في أوروبا في القرن السادس عشر وبدءًا من ليبنتز أصبحت البؤرة تركز على العلاقة بين المنطق والرياضيات، وهذا المنظور سيطر على فلسفة الرياضيات في عصر فريجيه ورسل، ولكن المناقشة أخذت الصدارة بالتطورات التي حدثت في أواخر القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين.

أما في الفلسفة المعاصرة أصبحت القضية الدائمة في فلسفة الرياضيات تركز على العلاقة بين المنطق والرياضيات وجذورهما المشتركة، بينما استمر فلاسفة القرن العشرين في تناول القضايا المشار إليها أعلاه. وقد هيمن على فلسفة الرياضيات في القرن العشرين الاهتمام بالمنطق الصوري ، ونظرية المجموعات، ونظرية المسلمات وقضايا أخرى تتعلق بأصول الرياضيات مثل الصدق في الرياضيات ومنبع المصداقية، أي هل الصدق يرتبط بمطابقة الكائنات الرياضية للواقع أم يرتبط بالاتساق وعدم التناقض في النظام الرياضي، وهذ ه القضية من القضايا المحورية في أصول الرياضيات.

بدأ فلاسفة الرياضيات في مستهل القرن العشرين في الانقسام إلى مدارس فكرية مختلفة من خلال تفكيرهم في كل الأسئلة والقضايا المطروحة والمشار إليها أعلاه ، وجاء هذا الاختلاف نتيجة اختلاف تصوراتهم عن الرياضيات من زاوية النظرية المعرفية، وهى فرع من الفلسفة معنى بالمعرفة ودراستها من حيث طبيعتها وأصولها والتحقق من المعرفة ومنطقية الاعتقادات وعقلانيتها، أو النظرية الوجودية وهى أيضا فرع من الفلسفة معنى بدراسة مفاهيم مثل الوجود، والكينونة، والمناسبية، والحقيقة ، وتبحث في الأسئلة عن كيفية تجمع الكائنات entitiesفي تصنيفات أساسية وأي من هذه الكائنات توجد في مستويات أساسية . وأحيانا يشار إلى الوجودية بأنها علم الوجود وتنتمى إلى الفرع الرئيسي من الفلسفة الذى يعرف بالميتافيزيقا.

وبالإضافة إلى هذه المدارس الفكرية ، هناك مدارس فكرية أكثرأهمية وشهره في فلسفة الرياضيات ركزت على العلاقة بين الرياضيات والمنطق ،وهي النظرية المنطقية لبرتراند رسل الرياضي الإنجليزي والنظرية الصورية لديفيد هلبرت، والنظرية الحدسية للويتزن جان بروور الرياضيين الألمانيين. كما أن هناك مدارس فكرية أخرى سوف يتم تناول لمحة عن كل منها فيما بعد.

النظرية المنطقية لرسل:

بدأت إرهاصات ربط الرياضيات بالمنطق في نهاية النصف الأول من القرن السابع عشر ، فقد بدأ المنطق عام ١٨٤٧ حيث ظهر كتاب جورج بول في هذا المجال، ثم أجريت عدة أبحاث بعد ذلك لماكول ،وفن،وجيفونز بإنجلترا وساندربيرس في أمريكا و شرودر في ألمانيا ونتيجة لهذا أصبح جبر المنطق حركة عالمية ترى أن المنطق هو جزء من الرياضيات ونظرية من نظرياتها.

ثم كانت حركة تحسيب الرياضيات أي محاولة بيان أن كل فرع من فروع الرياضيات لا يستخدم إلا القواعد المنطقية التي يستخدمها الحساب ، وفى هذه الحركة كانت محاولة رد البناء الرياضي إلى فكرة الأعداد وهذه بدورها ترد – كأبسط صورة لها- إلى فكرة الأعداد الطبيعية . أي أنه كان هناك بحث عن القضايا الأولية التي يمكن رد البناء الرياضي إليها ، وقد كانت هذه الحركة تمهيدا لمحاولة فريجه لاشتقاق الرياضيات من المنطق حيث بحث في أسس الرياضيات كما إنتهت إليها حركة تحسيب الرياضيات عند الأعداد الصحيحة ،ورأى إستنادا إلى تعريف العدد لديدكند ،وكانتور أنه يمكن رد هذا التعريف إلى ثوابت المنطق الصوري وإستنباط الأعداد والرياضيات بدورها - كما عرفتها حركة تحسيب الرياضيات – من مبادئ المنطق الصوري .

نرى في ضوء ما سبق أن محاولة إيجاد الصلة بين الرياضيات والمنطق هي علاقة الكل بالجزء كما يرى علماء جبر المنطق أو إشتقاق الجزء من الكل كما لدي فريجه.

هذه الإرهاصات وإلتقاء أبحاث بيانو في جبر المنطق – حيث وضع فيها ثوابت منطقية جديدة - ، وأبحاث فريجه – التي أوضح فيها كيفية إشتقاق الرياضيات من المنطق - وجهت رسل إلى وضع النظرية المنطقية في بداية القرن العشرين . وبدراسة النظرية المنطقية لرسل نجد أنه حاول رد الرياضيات برمتها إلى المنطق الصورى بحيث تصبح إمتدادا لقضاياه ، والمقصود برد الرياضيات للمنطق هو إمكانية تحويلها إلى بناء منطقى كأى جزء من أجزاء المنطق ، وذلك عن طريق الإستغناء عن المصطلحات الرياضية وحلها إلى مدركات منطقية .

بناءً على ذلك فإن الرياضيات تبدأ بفئة من ا لحدود غير المعرفة ثم بفئة من القضايا الإبتدائية وهى التي تنص على وجود علاقة معينة بين عناصر الفئة الأولى وتحدد كيفية إستخدامها ، ومن هاتين الفئتين يمكن إشتقاق كل القضايا المطلوبة عن طريق الاستنباط المنطقى وحده ، ويقول رسل أنه إذا كانت الحدود غير المعرفة يمكن أن تحل بواسطة التعاريف إلى ثوابت أو حدود منطقية صرفة ، وإذا كانت القضايا الابتدائية يمكن ردها بواسطة الاشتقاق الاستنباطى المنطقى إلى مسلمات وقضايا المنطق وحده فإنه يمكن إعتبار الرياضيات هي إمتداد للمنطق ومستغرقة فيه .

وتشمل النظرية المنطقية لرسل قسمين : الأول هو المنطق الصورى في صورته الرياضية ، والثانى يتعلق بإشتقاق الرياضيات كما رتبتها حركة تحسيب الرياضيات من المنطق، ويؤلف هذان القسمان بنية واحدة لا نعرف من خلالها أين ينتهى المنطق وأين تبدأ الرياضيات .

نظرية المسلمات لهلبرت:

ظهرت هذه النظرية كرد فعل للنظرية المنطقية، ويرى هلبرت أن المنطق ليس فرعاً من فروع الرياضيات مثلما ذهب علماء جبر المنطق ، ولا أنه يمكن رد الرياضيات إلى المنطق كما ذهب رسل، إنما يرى أن الرياضيات والمنطق ينبعان من أصل واحد هو الصورية الصرفة التي تعتبر الأساس الأول لكل من الرياضيات والمنطق ،ولكى يكون كل منهما صادق يجب البدء من نقطة أبعد من الحدود الإبتدائية والمسلمات الأولية لكل منهما والتي توصلت إليها أبحاث فريجه وبيانو ورسل. ويرى هلبرت ان نقطة البداية هي الذهاب أبعد من الحدود الابتدائية والمسلمات الأولية سواء في الرياضيات أو في المنطق ، ونقبل حدودا ومسلمات أخرى لاتنتمى إلى الرياضيات أو على المنطق إنما هى مجردة من كل معنى رياضى أو منطقى لأنها مجرد رموز إسمية لاترتبط بمعنى معين ، ومن ثم فهى صورية صرفة . تلك الحدود والمسلمات الأولية المجردة هي التي تشتق منها الرياضيات والمنطق آنياً. وقد وضع هلبرت ثلاثة شروط لنظام المسلمات هي:

١- الاستقلال ، ويعنى أن أي مسلمة تعتبر مستقلة عن المسلمات الأخرى للنظام إذا كان نفيها يؤلف مع المسلمات الأخرى فئة غير متناقضة .
٢- التشبع ، ويعنى أن فئة المسلمات تصل إلى درجة التشبع إذا كانت إضافة أي مسلمة جديدة تؤدى إلى حدوث تناقض بين تلك الفئة من المسلمات .
٣- عدم التناقض، ويعنى أنه لا توجد قضية مستنبطة من فئة من المسلمات تكون نفيا لإحداها.

ولما كانت نظرية المسلمات وما تثيره من موضوعات وقضايا لا تدرس في الرياضيات ولا في المنطق ، فقد أطلق هلبرت عليها ما وراء الرياضيات Metamathematics أو ما وراء المنطق Metalogic

ويمكن القول بأن نظرية المسلمات لهلبرت أكثر صورية من النظرية المنطقية لرسل إذ أنها تبدأ من حدود ومسلمات إسمية أي مجردة من كل معنى خاص بالرياضيات أو بالمنطق ، ولكن إذا درسنا نظرية المسلمات بعمق نجد أن أحد الشروط التي ترتكز عليها هو عدم التناقض وهذا يعتبر من أهم قواعد المنطق ، وعلى ذلك فإن أصل هذه النظرية يرتكز على أحد القواعد المنطقية ،لذا يمكن النظر إليها على أنها تكمل النظرية المنطقية لرسل أو إمتداد لها حيث أوضح هلبرت كيفية الاستمرار في تكوين الحدود والمسلمات إلى ما وراء المنطق وهذه هي النقطة التي توقف عندها رسل في نظريته.

النظرية الحدسية لبروور:

عارض بروور في نظريته كل ما توصلت إليه النظرية المنطقية لرسل ، ونظرية المسلمات لهلبرت ، ونجد أن الحدسين الأوائل مثل بوانكريه ،و لوبيج ،وبير في فرنسا يعارضون النظرية المنطقية ، والحدسيون الجدد مثل بروور وفابل في ألمانيا يعارضون النظرية المنطقية ونظرية المسلمات .

ويرجع الحدسيون في نظريتهم بالرياضيات إلى أصول حدسية ويعنون بها التجربة الحسية ، والرياضيات وفقا لهذا لها مادة معينة ، وبالتالي فهى غير صورية ولا يمكن إشتقاقها من المنطق الصورى . هذه المادة تحتاج إلى تجربة من نوع خاص يطلقون عليها الحدس الرياضى ، ويعتبرونها الطريق الوحيد للإكتشاف في الرياضيات وقيامها كنسق أصيل مستقل عن المنطق ونظرية المسلمات معا .

بناء على هذا ينظر الحدسيون الأوئل إلى النظرية المنطقية ، ونظرية المسلمات كوسيلة لشرح أو إستعراض الكشوف الرياضية -التي نتجت عن الحدس الرياضى – بطريقة واضحة بحيث تكون مفهومة لمن لم يكتشفها .

هذا يوضح الفرق بين منبع الرياضيات وأسلوب عرضها ، فالمنبع حدسي ، وأسلوب العرض منطقى بإسلوب المسلمات .

والملاحظ أن النظرية الحدسية قد أخرجت من الرياضيات كل مالم يكتشف عن طريق الحدس ، وبناء عليه فالرياضيات هي الجزء المضبوط من الفكر الناتج عن الحدس ، ولا يفترض لها أي منبع آخر غير الحدس كأساس تشتق منه حتى لو كان هذا الأساس هو المنطق كما ذهب رسل في نظريته ، وبالتالي فالرياضيات أولية لا تتقيد في نشأتها بأى علم آخر وليس لها منبع آخر غير الحدس التي يعطى لنا التصورات الرياضية كأشياء مباشرة أصيلة واضحة في ذاتها.

من خلال عرض النظريات الثلاث يمكن تلخيص العلاقة بين الرياضيات والمنطق في النقاط التالية:

١. كانت علاقة الرياضيات بالمنطق علاقة الكل بالجزء عند علماء جبر المنطق.
٢. أصبحت علاقة الرياضيات بالمنطق علاقة إندماج وإستغراق ، وكان ذلك نتيجة محاولة فريجة لاشتقاق الرياضيات من المنطق ، والنظرية المنطقية لرسل والتي رأى فيها أن المنطق والرياضيات يمثل كل منهما مرحلة تطور الآخر إذ إعتبر أن المنطق يمثل مرحلة الطفولة للرياضيات ، والرياضيات هي مرحلة النضج للمنطق وذلك على حد تعبير رسل.
٣. عارض هلبرت آراء علماء المنطق ، النظرية المنطقية ورأى أن المنطق لم يعد جزءا من الرياضيات ،ولا أن الرياضيات يمكن إشتقاقها من المنطق ، ولكن كلا من الرياضيات والمنطق ينبعان آنيا من أصل واحد أبعد من كل منهما وأطلق عليه الصورية الصرفة.
٤. نفت النظرية الحدسية لبروور العلاقة بين الرياضيات والمنطق ،حيث إعتبر أن الرياضيات لها مادة معينة ، وبالتالي فهى ليست صورية وتنبع من أصل وحيد هو التجربة الحدسية مستقلة بذلك عن المنطق والصورية الصرفة.

وتتطور فلسفة الرياضيات من خلال أبحاث متنوعة يجريها علماء فلسفة الرياضيات ، والمناطقة ، والرياضيون ، وهناك مدارس فكرية متعددة في هذا المجال ، سوف يتم تناول لمحة عن كل منها مستقلة عن الأخرى مع توضيح فرضياتها فيما يلى :

الواقعية الرياضاتية : Mathematical Realism

الواقعية الرياضاتية مثل الواقعية بصفة عامة وتتضمن الوجود للكائنات الرياضية مستقلةعن العقل البشرى ، وبالتالي فالبشر لم يخترعوا الرياضيات ولكن إكتشفوها . وبناء على ذلك هناك في الحقيقة نوع واحد من الرياضيات يمكن إكتشافه فمثلا المثلثات هي كائنات رياضية واقعية وليست من إبتكار العقل البشرى .

كثير من الرياضيين الواقعيين مثل بول إيردوس ، وكيرت جودل إعتبروا أنفسهم من مكتشفى الأشياء الموجودة في الطبيعة . أعتقد جودل في أن الواقعية والموضوعية للرياضيات يمكن إدراكها بشكل مناظر للطريقة التي تستوعب بها الحواس . وبعض

المبادئ مثل " هناك تجمع لأى شيئين من الأشياء يتكون من هذين الشيئين بالتحديد" يمكن أن تكون صادقة لأول وهلة ، ولكن فرضية الإستمرارية Continuum Hypothesis يمكن أن تبرهن على عدم التأكد بصدق المبدأ المشار إليه .

وهناك فى الواقعية تمييز أساسه التساؤلات التالية :ما نوع الوجود الذى تأخذه الكائنات الرياضية ؟، وكيف نعرفه؟ ، ومن نماذج أو أشكال الواقعية ، الأفلاطونية ، الأرسطوطالية .

اللاواقعية الرياضاتية: Mathematical anti-realism

وترى أن القضايا والعبارات الرياضية لها قيم صدق ، ولكن الصدق لا يرتبط بمطابقة القضايا الرياضية للعالم الواقعى أو الفيزيقى ، ومن الأشكال الرئيسية للاواقعية الصورية ، والوظيفية .

الفنية: Artisticهي رؤية تتدعى أن الرياضيات هي تجمع فنى من الفرضيات ، وبالتالي فالرياضيات فن .

ومن علماء هذا الادعاء الرياضى الفرنسي هنرى بوانكاريه، و الرياضى البريطاني هاردى الذى عرف الرياضيات في كتابه "إعتذار الرياضيين" بأنها تجمع جمالى من المفاهيم .

الواقعية الرياضية أوالأفلاطونية: Platonism

الأفلاطونية أحد أشكال الواقعية وترى أن الكائنات الرياضية مجردة ، وليس لها خصائص مكانية أو زمانية وهى دائمة وغير قابلة للتغير . وهذه وجهة النظر لدى الغالبية عن الأعداد.

وقد دعم هذا التوجه الفيثاغورثيون في اليونان القديمة بإعتقادهم بأن العالم مجازا قد تولد من الأعداد. ومن الأسئلة الرئيسية الذى تثار في الأفلاطونية ، أين وكيف توجد الكائنات الرياضية ، وماذا نعرف عنها ؟ هل يوجد عالم منفصل تماما عن عالمنا وتحتله الكائنات الرياضية؟ وكيف نحصل على تصريح دخول لهذا العالم المنفصل ، ونكتشف صدق هذه الكائنات ؟ أحد الإجابات المقترحة توجد في نظرية التماثل المطلق والتي تسلم بأن جميع البنى أو التركيبات التي توجد في عالم الرياضيات توجد أيضا ماديا في عالمها الخاص . وتتمشى الرؤية الأفلاطونية لدى كيرت جودل والتي تسلم بنوع خاص من البداهة تمكننا من إدراك الأشياء الرياضية مباشرة. هذه الرؤية تماثل مقولات كثيرة عند إدموند هيسرل الفيلسوف والرياضى الألماني الذى أسس علم الظواهر وتدعم فكرة كانت عن أن الرياضيت تركيب بدهى .

الرياضاتية : Mathematicism

ذهب ماكس تجمارك الرياضى وعالم الكونيات والباحث في ماكينات التعلم والذكاء الإصطناعى أبعد من الأفلاطونية في التأكيد على وجود جميع الكائنات الرياضية دون

وجود أي كائنات أخرى ، وتنص بديهيته على أن جميع التركيبات أو البنى التي توجد فى عالم الرياضيات توجد أيضا في العالم الفيزيقى .

الإصطلاحية : Conventionalism

وهى توجه فلسفى مفاده أن صدق المبادئ الأساسية لشئ معين مدعم بموافقة صريحة أو ضمنية من الجموع ، وليس لمطابقتها للواقع أو للعالم الفيزيقى الخارجي. كان الرياضى الفرنسي هنرى بوانكارية بين أوئل من تحدثوا بوضوح عن وجهة النظر الإصطلاحية، وقد إقنعته دراسته للهندسات اللاإقليدية في أعماله في المعادلات التفاضلية أن الهندسة الإقليدية ليست لها صدق أولى أو بدهى، وقد تمسك بأن المسلمات في الهندسة يجب أن تختار في ضوء ما تعطيه من نتائج ، وليس لترابطها الظاهرى مع الحدس البشرى عن العالم المادى أو الفيزيقى.

البنائية : Constructivism

وهى حركة في مجال الرياضيات تعتبر أن البراهين البنائية ، والكائنات الرياضية المسلم بها والتي توجد فى البراهين وتوضحها هي الصادقة فقط ، وهذا يستلزم أن الأخيرة ليس لها وجود مستقل . وتتضمن البنائية المبادئ المنظمة التي مفادها أن الكائنات الرياضية التي يمكن بناؤها بأسلوب مفهوم هي التي يسلم أو يعترف بها في الحوار الرياضى ، وبناء على ذلك فإن الرياضيات هي تدريب للحدس البشرى، وليس مباراة للعب برموز ليس لها معنى . وبديلا عن ذلك فإن الكائنات الرياضيات يمكن أن تبتكر مباشرة بواسطة النشاط العقلى . بالإضافة إلى ذلك يرفض بعض أتباع المدارس الفكرية البراهين غير البنائية مثل البرهان بالتناقض.

النهائية أو المحدودية : Finitism

وهى فلسفة للرياضيات تقبل فقط الكائنات الرياضية المحدودة أو التي لها نهاية، ويمكن فهم النهائية أفضل إذا ما قورنت بتيار فلسفة الرياضيات الذى يقبل الكائنات الرياضية من الناحية المنطقية . وهى على النقيض من البنائية من زاوية أن الكائنات الرياضية ليس لها وجود مالم يتم بناؤها فى عدد محدود من الخطوات.

التركيبية : Structuralism

التركيبية هي نظرية في فلسفة الرياضيات تعتبر أن النظريات الرياضية تصف تركيبات للكائنات الرياضية ، وهذه الكائنات تعرف تعريفا كاملا من خلال موقعها في تلك التركيبات ، وبالتالي ترى أن الكائنات الرياضية لا تحمل أي خصائص أو معنى إلا من خلال علاقتها بالنظام . فعلى سبيل المثال ترى التركيبية أن العدد ١ يعرف بأنه التالى للصفر في بنية نظرية الأعداد الطبيعية وبتعميم هذا المثال فإن أي عدد طبيعى يعرف بدلالة مكانه في بنية خط الأعداد . وهذا ينسحب على الخطوط والمستويات في الهندسة ، وعلى العناصر والعمليات في الجبر المجرد.

نظريات إعمال العقل:

هذه النظريات تعتبر الفكر الرياضى ثمرة طبيعية للجهاز المعرفى البشرى الموجود في عالمنا الفيزيقى .فعلى سبيل المثال المفهوم المجرد لعدد ما ينبع من خبرة عد أشياء منفصلة . هذه النظريات تعتبر أن الرياضيات ليست شاملة ولا توجد بأى شكل حقيقي ولكنها توجد فقط فى العقل البشرى فالبشر يبنون الرياضيات ولا يكتشفونها . وبناء على هذا التوجه يمكن رؤية العالم الفيزيقى كأساس نهائي للرياضيات وهى تطور العقل وتوجهه ثم تقرر أي أسئلة سوف يجدها العقل ذات قيمة كى يبحثها ، وعلى أية الأحوال فالعقل البشرى لايطالب بالحقيقة أو المداخل إليها والتي تبنى خارج مجال الرياضيات ، فإذا كانت البنية الإقليدية صادقة ذلك لكونها مخطط واضح في العقل البشرى وفى المعرفة.

وعلى ذلك فنظريات إعمال العقل توضح فاعلية الرياضيات ، وأنها قد بنيت بواسطة العقل من أجل أن تكون ذات فاعلية في هذا العالم .

الواقعية الأرسطية: Aristotelian Realism

تعتبر الواقعية الأرسطية أن الرياضيات تدرس الخواص مثل التماثل ، والإستمرارية، والترتيب التي يمكن أن توجد مجازا في العالم الفيزيقى ، وهى تتناقض مع الأفلاطونية التى تعتبر الكائنات الرياضية – مثل الأعداد – توجد في عالم مجرد ، بينما الواقعية الأرسطية تشير أن الكائنات الرياضية يمكن أن تدرك فيزيقيا .

التوجه النفسى أوالتيار النفسي : Psycologism

التوجه النفسي أو المدرسة النفسية في فلسفة الرياضيات هو توجه فلسفى يلعب علم النفس فيه دورا محوريا في تأسيس وشرح المفاهيم الرياضية ، والصدق ، وأنهما قد أسسا وإشتقا من حقائق أو قوانين نفسية .

ولكن قوبل هذا التوجه بنقد ورفض من المناطقة والرياضيون .

التجريبية : Empiricism

التجريبية الرياضاتية هي شكل من الواقعية ، وتنكر أن الرياضيات أولية أو بدهية بالمرة . وترى أن الرياضيات تكتشف بالبحث التجريبى مثلها مثل أي علم آخر. وتنص التجريبية الرياضاتية الحديثة أن الرياضيات لاغنى عنها لكل العلوم التجريبية. والنقد الذى يوجه للتجريبية هو أنه إذا كانت الرياضيات تجريبية مثلها مثل بقية العلوم، فإن نتائجها مشروطة وعرضة للخطأ مثل نتائج العلوم التجريبية.

الخيالية : Fictionalism

الخيالية رؤية فلسفية ترى أن العبارات التي تعتبر وصفا للعالم لاينبغى تفسيرها كما هي ، ولكن يجب أن تفهم على أنها حالة من حالات " صنع الإعتقاد" أي التظاهر بالتعامل معا على أنها صادقة مجازا .

وقد أصبحت الخيالية ذات شهرة عام ١٩٨٠ عندما نشر هارترى فيلد كتابه " علم بدون أعداد" ، والذى فيه رفض مقولة أن الرياضيات لاغنى عنها لنظريات العلم ، وبالتالي يجب قبولها كنسق صادق يتناول الكائنات الرياضية المستقلة في وجودها . وجادل بأن الرياضيات يمكن الإستغناء عنها وبالتالي يجب إعتبارها كنسق من الخيال لايتناول أي شيء واقعى أو حقيقى ، فعلى سبيل المثال أن ما سلم به نيوتن في الميكانيكا لم يشر فيه عن الأعداد والدوال على الإطلاق .كما أن البينية في مسلمات هلبرت تصف وتميز الفراغ بدون إستخدام الإحداثيات .

وقد إنتشرت رؤية فيلد على نطاق واسع ، ولكنها رفضت على نطاق واسع.

البنائية الاجتماعية : Social Constructivism

ترى البنائية الإجتماعية أن الرياضيات بناء إجتماعى بالدرجة الأولى وكنتاج للثقافة ، وأنها عرضة للتصحيح والتغير. والرياضيات كأي علم من العلوم يمكن النظر إليها كجهد تجريبى نتائجها لها قيمة ، ومن الممكن أن تهمل أيضا.

وإذا كانت التجريبية ترى أن قيمة الرياضيات تقدر بواقعيتها ، فإن البنائية الاجتماعية تؤكد على أن توجيه البحث في الرياضيات تمليه ما يسود في المجتمع من ممارسات أو بحاجة المجتمع لتمويله.

ومعنى الطبيعة الاجتماعية للرياضيات يوضحه مفهوم الثقافات الفرعية ، فكل فرع من الرياضيات له طبيعته وخواصه التي تميزه عن الفروع الأخرى ولكن بين هذه الفروع تأثير وتأثر ، فمثلا الكشوف في فرع يمكن أن تكون ذات صلة بفرع آخر وتؤثر فيه .

والبنائيون الإجتماعيون أحيانا يرفضون البحث عن أصول الرياضيات لأنه محاط بالفشل وبلا هدف وحتى بلا معنى.

وحديثا صاغ بول إيرنست بوضوح فلسفة بنائية للرياضيات معتبرا أن الرياضيات نشاط إجتماعى .

من العرض السابق للتوجهات ، والنظريات ، والمدارس الفكرية التي تناولت فلسفة الرياضيات، كان من الطبيعى أن تظهر تناقضات أو توافقات بينها فمثلا هناك تناقض بين النهائية والبنائية حول وجود الكائنات الرياضية فالأولى تقبل وجود الكائنات الرياضية المحدودة أو التي لها نهاية ، بينما البنائية لا تقبلها إلا إذا تم بناؤها . وهناك تناقض بين نظريات بناء العقل وبين الواقعية حول وجود الرياضيات أو إكتشافها فترى نظريات بناء العقل أن الرياضيات ثمرة طبيعية للجهاز المعرفى البشرى الموجود فى عالمنا الفيزيقى وأن الرياضيات لاتوجد إلا في العقل البشرى فالبشر يبنون الرياضيات ولا يكتشفونها (متفقة مع البنائية) ولكن ترى الواقعية أن البشر لم

يخترعوا الرياضيات ولكن يكتشفونها . ويوجد تناقض أيضا بين الواقعية الأرسطية ، والأفلاطونية حول الكائنات الرياضية فالأولى ترى وجودها في العالم الفيزيقى وتدرس خواصها في هذا العالم ، بينما ترى الأفلاطونية أن الكائنات الرياضية توجد في عالم مجرد . وكذلك تتناقض البنائية الاجتماعية مع التوجهات أو النظريات أو الجهود التي تبحث في أصول الرياضيات بإعتبار أن ذلك لا طائل منه ، وترى البنائية الاجتماعية أن الرياضيات بناء إجتماعى ونتاج للثقافة أو نشاط إجتماعى أو جهد تجريبى متفقة مع التجريبية التي ترى أن الرياضيات تكتشف الباحث التجريبى .

وخلاصة القول أن هناك إختلافا حول قضايا رئيسية بين فلاسفة الرياضيات مثل هل الرياضيات أولية و بدهية أم من نتيجة جهد الإنسان بالبحث التجريبى وبالتالي يكتشفها ؟، وهل الرياضيات توجد فى العالم الفيزيقى أم توجد فى عالم مجرد؟ ،وهل الرياضيات صادقة لمطابقتها للعالم الفيزيقى أم صادقة لأنها متسقة ولا يوجد تناقض بين مسلماتها ونظرياتها ؟ ، وهل البحث في أصول الرياضيات ضرورى أم أنه لا طائل منه؟ وغيرها من القضايا ..وهكذا لا ينتهى الجدل الفكرى بين هؤلاء الفلاسفة ،وليس هناك من بين هذه التوجهات أوالنظريات ما يمكن النظر إليها على أنها صادقة دون غيرها ؛ لأن كل وجهة أو نظرية تستند إلى رؤية فلسفية وأسانيد منطقية تدعمها.

ظهرت حركة فكرية ما بين الستينيات والتسعينيات مفادها أنه بدلا من التركيز على قضايا ضيقة مثل المذكورة أعلاه تحد من إنطلاق الفكر الرياضى الفلسفى ، ينبغي أن نركز الجهد على الإجابة عن السؤال الرئيسى " كيف ولماذا تعمل الرياضيات بفاعلية؟"

وعلى هامش فلسفة الرياضيات هناك عدة قضايا جوهرية لعل من أهمها ما نسوقه فيما يلى :

جدلية اللغة:

جدد التطور الذى حدث خلال القرن العشرين في فلسفة اللغة الاهتمام بما إذا كانت الرياضيات هي لغة العلم . وبالرغم من أن بعض الرياضيين والفلاسفة يقبلون مقولة أن الرياضيات لغة، إلا أن اللغويون يعتقدون أنه يجب التمعن في هذه المقولة على أساس أن أدوات اللغويات لا تطبق بصفة عامة في النظم الرمزية في الرياضيات، بمعنى أن دراسة الرياضيات تختلف بشكل ملحوظ عن دراسة اللغات، وإذا كانت الرياضيات لغة فإنها نوع آخر يختلف عن بقية اللغات يتميز بالوضوح والدقة ، وهذا يفرض عليها قيودا قد لا توجد فى اللغات التي يدرسها اللغويون . لكن بعض علماء اللغة مثل ريتشارد منتاجيو وآخرون ممن يدرسون علم الدلالات المجرد لايرون أن الفرق بين لغة الرياضيات وبقية اللغات الأخرى كبير كما يبدو.

جدلية الحتمية لبتنام في الواقعية:

هي جدلية في فلسفة الرياضيات تناولها بعض فلاسفة الرياضيات وعلى رأسهم ويلارد كوين، وهيلارى بتنام وهى جدلية عن وجود الكائنات الرياضية المجردة مثل الأعداد ، والمجموعات ، وأن الكائنات الرياضية لا غنى عنها في النظريات العلمية، ويمكن توضيح هذه الجدلية في النقاط التالية:

١- ينبغى أن يكون لدى الفرد إلتزام بأن جميع الكائنات الرياضية موجودة ، وهى فقط التي لا غنى عنها للنظريات العلمية .
٢- لاغنى عن الكائنات الرياضية لأفضل النظريات العلمية .
٣- بناء على ماتقدم ينبغي أن يكون لدى الفرد إلتزام وجودى – أي بوجود - للكائنات الرياضية .

وبالتمعن في هذه النقاط نجد أن شرحها وتبريرها مثير للجدل ، ومن الصعب أن يقبلها العقل دون أدلة مقنعة .

جدلية المعرفية في مقابل الواقعية:

ترجع هذه الجدلية إلى كل من بول بناكراف ، وهارتى فيلد ، حيث اشارا إلى أن الواقعية الأفلاطونية ترى أن الكائنات الرياضية مجردة ، وإذا سلمنا بهذا فإنه لايمكن تعليل تفاعلها مع الكائنات الفيزيائية المادية ؛ لأنهما يوجدا في عالمين مختلفين أحدهما مجرد والآخر مادى أو فيزيقى .

هناك دليل على وجود الكائنات الفيزيقية ، وهو إدراكنا لها بالحواس ، ولكن مقولة أن الكائنات الرياضية مجردة هو إفتراض فحسب ولا يوجد دليل عليها ، وبالتالي لايمكن أن تتفاعل الكائنات الرياضية مع الكائنات الفزيقية .

لكن في مقابل هذا توجد مقولة أخرى مفادها أنه بالرغم من أن الكائنات الرياضية مجردة ـ أي لاوجود لها في العالم الفيزيقى-إلا أن هذا لم يمنع الرياضيون من بناء البراهين التي تعتمد بالدرجة الأولى على العمليات الفيزيقية في عقولهم . أي أنه يوجد تفاعل بين العالم الأفلاطونى المجرد وبين العالم الفيزيقى .

بالإشارة لكل ما سبق طرحه عن فلسفة الرياضيات نجد أن هناك إما جدالا أوبعض التناقض بين رؤى،وتوجهات ،ونظريات فلاسفة الرياضيات وأحيانا نجد مساحة محدودة من الاتفاق .بعض هذه الآراء نجدها واضحة ومنطقية ويقبلها العقل دون عناء ، والبعض الآخر يشوبه الغموض ويحتاج إلى تمعن ، وفحص،ودراسة قبل أن يقبلها العقل أو يرفضها .

وبإعتبار أن فلسفة الرياضيات فرع من فروع الفلسفة ، والفلسفة نسق معرفى فالجدل، والتناقض ، أو حتى التضاد ظواهر صحية تطورفروع المعرفة وتضيف إليها الجديد.

المراجع العربية.

١- ابيسون ، د. أوكونر، مقدمة في المنطق الرمزى ، ترجمة عبد الفتاح الديدى ، القاهرة ، دار المعارف ، ١٩٧١

٢- برتراند رسل ، أصول الرياضيات جزء أول ، ترجمة محمد مرسى أحمد وأحمد فؤاد الأهوانى ، القاهرة ، دار المعارف ،١٩٦٥

٣- ـــــــــــ، أصول الرياضيات الجزء الثانى ، ترجمة محمد مرسى أحمد وأحمد فؤاد الأهوانى، القاهرة ، دار المعارف ، ١٩٥٩

٤- ـــــــــــ ، أصول الرياضيات الجزء الثالث ط٢ ، ترجمة محمد مرسى أحمد وأحمد فؤاد الأهوانى ، القاهرة ، دار المعارف ، بدون تاريخ

٥- ـــــــــــ ، أصول الرياضيات الجزء الرابع ، ترجمة محمد مرسى أحمد وأحمد فؤاد الأهوانى ، القاهرة ، دار المعارف ،١٩٦٤

٦- زكى نجيب محمود ، برتراند رسل ، القاهرة ، دار المعارف ، ط٢ ، بدون تاريخ

٧- محمد أمين المفتى ، قراءات في تعليم الرياضيات ، القاهرة ، الأنجلو ،١٩٩٥

٨- محمد ثابت الفندى ، فلسفة الرياضيات ط١ ، القاهرة ،دار النهضة العربية ، ١٩٦٩

٩- ـــــــــــــ، أصول المنطق الرياضى ط١ ، القاهرة ، دار النهضة العربية،١٩٧٢

١٠-وليم عبيد ، ومحمد المفتى، وسمير إيليا ، تربويات الرياضيات (طبعة مطورة) ، القاهرة ، الأنجلو ، ٢٠٠٠

المراجع الأجنبية.

11-A. Whitehead & B. Russel, Principia Mathematica , Vol1 sco.ed., Cambridge , Universal Press ,1963

12----------, Principia Mathematica,vol2sec.ed,Cambridge, ,Universal Press,1963

13- ----------, Principia Mathematica , vol 3 sec.ed.,Cambridge, Universal Press,1963