أثر الرياضيات على التطورات المنطقية في القرن التاسع عشر مقال عن الجبر الرمزي عند "جورج بيكوك"

إعداد

د أحمد عصام الدين عبد الجواد

مدرس المنطق وفلسفة العلم - قسم الفلسفة

كلية الآداب جامعة السويس

الإستشهاد المرجعى:

أحمد عصام الدين عبد الجواد (٢٠٢٢). أثر الرياضيات على التطورات المنطقية في القرن التاسع عشر مقال عن الجبر الرمزي عند "جورج بيكوك". حولية كلية الآداب. جامعة بني سويف. مج ١١ ،ج١ ، ص ص ٩٩-١٤١

المستخلص:

بدأت جذور التطورات الحديثة للجبر مع رفض عديد من علماء الرياضيات استخدام الأعداد والكميات السالبة، نظراً لغرابتها، غموضها، ولعدم وجود تعريف جيد لها. وعلى العكس من ذلك، سعى "جورج بيكوك" إلى تطوير الجبر بحيث يتم قبول الأعداد والكميات السالبة؛ حيث أشار إلى إن علم الجبر ينقسم إلى جزءين؛ الجبر الحسابي والجبر الرمزي، وقد استخدم الجبر الحسابي لاقتراح مبادئ وقوانين

الجبر الرمزي، وذلك خلال مبدأ ثبات الصورة المتكافئة. ومن ثم، أصبحت العمليات التي كانت مستحيلة التحقق في الجبر الحسابي ممكنة وصحيحة منطقياً في الجبر الرمزي. وقد سعى "جورج بيكوك" إلى جعل الجبر الرمزي يتعامل مع الأعداد السالبة، وأن يكون امتداداً للجبر الحسابي، وهذا هو جوهر مبدأ ثبات الصورة المتكافئة. ورغم اختلاف علماء الرياضيات حول الجبر الرمزي لدي "جورج بيكوك" ما بين مؤيد ومعارض؛ إلا إن نظريته كان لها أثر كبير على كثير من علماء الرياضيات الذين أدوا دوراً هاماً في وضع أسس المنطق الحديث الذي شهد قمة تطوره في القرن العشرين.

الكلمات المفتاحية:

جورج بيكوك – الاعداد والكميات السالبة – الجبر الحسابي – الجبر الرمزي – مبدأ ثبات الصورة المتكافئة

أولاً: مقدمة

يشيد مؤرخو الرياضيات – لوقت طويل – بإسهامات عالم الرياضيات البريطاني "جورج بيكوك" Peacock, G. (١٧٩١ – ١٨٥٨)[١] لسببين؛ الأول هو اشتراكه – مع معاصريه – في تأسيس الجمعية التحليلية Analytical Society في بريطانيا عام ١٨١٢م[٢]، التي كانت غايتها نقل التّقدم العلمي الحاصل في القارة الأوروبية إلى بريطانيا،

---

(١) ولد في ٩ إبريل بمدينة دينتون Denton شمال بريطانيا، التحق بكلية ترنتي Trinity College جامعة كامبردج Cambridge University عام ١٨٠٩م وحصل على البكالوريوس عام ١٨١٣م، وفي عام ١٨١٦م حصل على درجة الماجستير، ثم حصل على درجة الدكتوراه عام ١٨٣٩م، وقد توفي عن عمر يناهز ٦٧.

(٢) الأعضاء المؤسسون للجمعية التحليلية سبعة هم: "جورج بيكوك"، "تشارلز باباج" Babbage, C. (١٧٩١ – ١٨٧١)، "جون هرشل" Herschel, J. (١٧٩٢ – ١٨٧١)، "ادوارد ريان" Ryan, E. (١٧٩٣ – ١٨٧٥)، "توماس روبنسون" Robinson, T. (١٧٩٠ – ١٨٧٣)، "فريدريك ماول" Maule, F. (١٧٩٠ – ١٨١٣)، و"الكسندر داربلاى" D`Arblay, A. (١٧٩٥ – ١٨٣٧).

وبدأت خلالها تطورات الجبر الحديث، وقام أعضاؤها بترجمة عديد من الدراسات إلى اللغة الإنجليزية؛ أبرزها دراسة عالم الرياضيات الفرنسي "سيلفستر لاكروس" .Silvestre, L (١٧٦٥ – ١٨٤٣)[1]– والتي ترجمها "جورج بيكوك"، "جون هرشل"، و"تشارلز باباج" – وظهرت بعنوان "دراسة مبدئية عن حساب التفاضل والتكامل"[2]. بالإضافة إلى نشر بعض الدراسات؛ لعل أبرزها دراسة "جورج بيكوك" المعنونة بـ"مجموعة من الأمثلة على حساب التفاضل والتكامل"[3]. فضلاً عن بعض الدراسات الأخرى.

والسبب الثاني – وربما يكون الأكثر أهمية نظراً لكونه متعلقاً بموضوع البحث الراهن – عن مساهمته فيما يتصل بتطوير الأفكار المتعلقة بطبيعة الجبر الحديث، خلال كتاباته: "دراسة عن الجبر" عام ١٨٣٠م[4] (والذي تم تنقيحه والتوسع فيه، ثم نُشر في مجلدين عام ١٨٤٢م[5] وعام ١٨٤٥م[6])، بالإضافة إلى "تقرير عن آخر التطورات والحالة الراهنة لبعض فروع التحليل" عام ١٨٣٣م[7].

---

(1) (1802): Traite du Calcul differential et du Calcul integral, 3 VoIs, 2nd, Paris: Chez Courcier.

(2) (1816): An Elementary Treatise of the Differential and Integral Calculus, Cambridge: J. Deighton & sons.

(3) Peacock, G. (1820): A Collection of Examples of the Applications of the Differential and Integral Calculus, Cambridge: J. Deighton & Sons.

(4) Peacock, G. (1830): A treatise on Algebra, Cambridge: J. & J. J. Deighton.

(5) Peacock, G. (1842): A treatise on Algebra, Vol. I, Arithmetical Algebra, Cambridge: J. & J. J. Deighton.

(6) Peacock, G. (1845): A treatise on Algebra, Vol. II, On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Positions, Cambridge: J. & J. J. Deighton.

(7) Peacock, G. (1833): Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis Held at Cambridge 1833. In (1834): Report of the Third

وقد جاء هذا البحث بعنوان "أثر الرياضيات على التطورات المنطقية في القرن التاسع عشر؛ مقال عن الجبر الرمزي عند جورج بيكوك"، ورغم أهمية هذا الموضوع، فإنه لم يحظ بعناية البحث من قبل الباحثين العرب – بقدر ما أتيح لنا من معارف – فلا نجد كتاباً أو أطروحة عالجت الجبر الرمزي عند "جورج بيكوك"، اللهم إلا مقالاً وحيداً في هذا الإطار للأستاذ الدكتور/ محمد مهران رشوان "رحمه الله" (١٩٣٩ – ٢٠١٢)[1]، تناول موضوعه – من بين ما تناوله – "جورج بيكوك" بصورة عامة وموجزة، تتفق وأهدافه.

حيث أشار الأستاذ الدكتور/ محمد مهران رشوان إلى إن فهم المنطق في القرن العشرين لا يمكن أن يتحقق دون معرفة حالة المنطق من حيث علاقته بالرياضيات في القرن التاسع عشر[2]. ولذا، قدم الأستاذ الدكتور/ محمد مهران رشوان – خلال هذ المقال – تصوراً عاماً لأثر الرياضيات في القرن التاسع عشر على التطورات المنطقية الكبري في هذا القرن وجهود وإسهامات بعض كبار علماء الرياضيات في هذا المجال، ومنهم "جورج بيكوك"، الذي يدور عنه موضوع البحث الحالي.

Meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: John Murray, Albemarle Street, pp. 185 –352.

– ورغم أن عنوان المقال يبدو متعلقا بالتحليل الرياضي Mathematical Analysis فقط، فإنه كان مخصصًا بشكل خاص لمجال بعينه كان في بداية نشأته وتطوره – على يد "جورج بيكوك" – وهو الجبر الرمزي Symbolic Algebra .

(١) رشوان، محمد مهران: المنطق في القرن العشرين، مقال منشور في كتاب: حصاد القرن؛ المنجزات العلمية والإنسانية في القرن العشرين، تحرير(٢٠٠٧): جدعان، فهمي & شاهين، محمد & غصيب، همام، الطبعة الأولى، بيروت: المؤسسة العربية للدراسات والنشر، ص ص. ٥٤٧ – ٥٩٠.

(٢) المرجع نفسه، ص ص. ٥٥٤ – ٥٥٥.

وتجدر الإشارة إلى إن البحث الحالي لن يكون مُراده الإحاطة بكل جهود وإسهامات "جورج بيكوك"؛ لأن ذلك يخرجه عن وسعه، لتعدد هذه الإسهامات وسعتها، ولكن أُتيح له الأخذ بجانب مهم من تلك الإسهامات – وهو نظرية الجبر الرمزي – والقيام بتأصيلها، تحليلها، وتقييمها.

ومن ثم، يناقش البحث الحالي فرضاً أساسياً يعني **بتحليل إسهامات "جورج بيكوك" في الجبر الحديث خلال انتقاداته لمعارضي الأعداد والكميات السالبة ومن ثم تطويره لنظرية الجبر الرمزي.**

وكان على الباحث عند التحقق من هذا الفرض أن يناقش مجموعة من الفروض الفرعية التي تندرج تحته وتأخذ شكل التساؤلات التالية:

- ما طبيعة الجدل الناشئ بين علماء الرياضيات بشأن قضية الأعداد والكميات السالبة Negative Numbers and Quantities وما موقف "جورج بيكوك"؟
- كيف استطاع "جورج بيكوك" تطوير الجبر الرمزى، وما دور مبدأ "ثبات الصورة المتكافئة" The Principle of the Permanence of Equivalent Forms فى ذلك؟
- ما موقف المعاصرين لـ"جورج بيكوك" واللاحقين عليه من نظريته عن الجبر الرمزي؟

وفي سبيل التحقق من الفرض الرئيس للبحث، والإجابة عما ارتبط به من تساؤلات، اعتمد الباحث كثيرًا وحسب ما يتطلب سياق البحث على مؤلفات "جورج بيكوك" بصفة أصلية، بوصفها المصادر الرئيسة للبحث، ولنا في ذلك القول ما يسوغه.

كما اعتمد الباحث على مؤلفات مجموعة من الكتاب البارعين الذين تناولوا الجبر الرمزي لدى "جورج بيكوك" بالتفسير والتأويل.

وفي السياق نفسه، انتهج الباحث منهجاً تحليلياً مقارناً بالدرجة الأولى اقتضته طبيعة البحث لبسط وتحليل القضايا، وتقديم تفسيرٍ لها، ومقارنتها بغيرها.

ثانياً: مشكلة الأعداد والكميات السالبة

ارتبط الجبر الرمزي بأعمال "جورج بيكوك"، وفي هذا السياق أشار مؤرخ الرياضيات المعاصر "إريك تمبل بيل" Bell, E. T. (١٨٨٣ – ١٩٦٠) إلى إن "جورج بيكوك" يعد أول من تعامل مع علم الجبر بوصفه علم استنباطي، وقد تطور برنامجه خلال المدرسة البريطانية على يد "دنكان جريجوري" Gregory, D. F. (١٨١٣ – ١٨٤٤) و "دي مورجان" De Morgan, A. (١٨٠٦ – ١٨٧١)[1].

ورغم إن بداية التطورات الحديثة للجبر كانت مع "جورج بيكوك" ومن تبعوه – من أمثال "وليم روان هاملتون" Hamilton, W. R. (١٨٠٥ – ١٨٦٥)، "دي مورجان"، "دنكان جريجوري"، و"جورج بول" Boole, G. (١٨١٥ – ١٨٦٤) – فإن جذور تلك التطورات بدأت مع رفض عديد من علماء الرياضيات استخدام الأعداد والكميات السالبة[2]، أبرزهم "روبرت

(1) Bell, E. T. (1940): The Development of Mathematics, New York: McGraw Hill Pub., pp. 180-181.

(٢) تعد الأعداد والكميات السالبة من الأشياء التي ثبت بالتجربة نجاحها اليوم بينما كانت في الماضي منبوذة نظرا لغرابتها وغموضها، ففي الماضي لو قام أحدهم بعملية طرح كمية بعينها من الكميات الملموسة القابلة للعد وليكن ٩٠ عملة. تم تقسيمهم إلى كميتين الأولى ٥٠ عملة والثانية ٤٠ عملة، فستكون عملية طرح الكمية الثانية من الأولى ٥٠ – ٤٠ بسيطة جداً حيث سيتبقى ١٠ عملات من ناتج الطرح. أما إذا أردنا طرح الكمية الأولى من الثانية ٤٠ – ٥٠ فسيكون الناتج لدينا هو (−10)!

كانت هذه القيمة لديهم حينئذ خيالية؛ فما الذي تعنية عملية طرح أربعون عملة من خمسين؟! ما الذي تعنية نتيجة أن يكون لدينا (−10) عملة؟! كيف يمكننا الحصول على قيمة شئ أقل من اللاشئ أو العدم؟!

سيمسون" Simson, R. (١٦٨٧ – ١٧٦)، "بارون ماسيرس" Maseres, B. F. (١٧٣١ – ١٨٢٤) و"وليم فريند" Frend, W. (١٧٥٧–١٨٤١).

عارض "روبرت سيمسون" وجود الكميات السالبة، حيث وصفها بإنها من الأشياء السخيفة التي جاءت إلى علم الجبر( )، نظراً لغرابتها وغموضها. [١]

ولعل آراءه يمكن رؤيتها في سيرة ذاتية كتبها تلميذه "وليم ترايل" Trail, W. (١٧٤٦ – ١٨٣١) قال فيها:-

> اضطر "سيمسون" للتعامل مع علم الجبر بعد اتجاه الكتاب له، وفي وجود تعريف واستخدام محدود لعلامة السالب. ولعل عديداً من الملاحظات المتفرقة بشأن هذا الموضوع ظلت موجودة بين كتاباته، بالإضافة إلى بعض المقالات القصيرة عن المعادلات التكعيبية والتي حاول خلالها تفسيرها دون الإقرار بالكميات السالبة( ).

ثم نشر "بارون ماسيرس" عام ١٧٥٨م أطروحته عن استخدام علامة السالب في الجبر، رفض خلالها الكميات السالبة في الجبر نظراً لكونها مبهمة، ومن ثم فقد طالب باستبعادها من الجبر وأن تقتصر فقط على الإشارة إلى عملية الطرح Subtraction والتي

ومن ثم كانت هذه التساؤلات هي الدافع الرئيس لرفض عدد من علماء الرياضيات في أوروبا لهذه الأعداد والكميات السالبة، حيث عدوها سخيفة وغير منطقية.

(1) Trail, W. (1812): Account of the Life and Writings of Robert Simson, Late professor of mathematics in the University of Glasgow, Bath: Richard Cruttwell, p. 123.

(2) Ibid, p. 67.

يكون خلالها المطروح منه أكبر من أو يساوي المطروح، فقد أشار إلى إن الهدف من أطروحته هو استبعاد جزء من الأجزاء المبهمة الموجودة في علم الجبر، وتفسير الصعوبات التي نشأت عن الاستخدام الواسع لعلامة السالب دون اعتبار لأي معنى لها سوى أنها لطرح كمية أقل من كمية أكبر (1).

ومن ثم، رفض "بارون ماسيرس" الأعداد السالبة نظراً لعدم وجود تعريف جيد لها، كما نتج عن استخدامها نتائج لا معنى لها. ومن ثم، كان وجودها كان سبباً في رفض علم الجبر وجعله غامضاً وصعباً بالنسبة لكل من يمارس الاستدلال الصحيح(2). قال في ذلك:-

> أضافت الأعداد السالبة الغموض على أسس المعادلات الرياضية، وأضافت عنصر التعقيد على أشياءٍ هي في طبيعتها في غاية البساطة والسهولة، ومن الأفضل عدم قبول هذه الأعداد السالبة في الجبر (3).

لقد كان "بارون ماسيرس" يخطط لإعادة الجبر دون الكميات السالبة، وبنائه على أساس منطقي مكافئ للأساس الذي أسس عليه عالم الرياضيات "إقليدس" Euclid (300 BC– 265 BC) كتابه "العناصر" Elements مقرراً أن عمله الحالى هو "محاولة لرفع الجبر

---

(1) Maseres, F. (1758): Dissertation of the Use of the Negative Sign in Algebra. London: Samuel Richardson, p. i.

(2) Maseres, F. (1800): Tracts on the resolution of affected alqebraick equations by Dr. Halley`s. Mr. Raphson`s, and Sir Isaac Newton`s, Methods of Approximation, London: J. Davis, Chancery-Lane, p. iv

(3) Maseres, F.: Dissertation of the Use of the Negative Sign in Algebra, p. ii.

إلى مستوى الهندسة"[1]. ونظراً لأنه يعد "العناصر" نموذجاً يوضح كيفية كتابة الرياضيات، لذلك سعى لجعل كتابه على غرار "العناصر"، حيث وضع كل خطوة في الاستدلال على غرار ما فعله إقليدس في كتابه "العناصر" وذلك لجعلها واضحة وسهلة[2].

وظل "بارون ماسيرس" يؤكد على إن الكتاب الخامس من "العناصر" يحتوي على أفضل برهان على مبادئ الجبر[3]. ولذا عبر "بارون ماسيرس" عن رغبته في نبذ الأعداد السالبة بحيث يكون علم الجبر في طبيعته لا يقل بساطة ووضوحاً وقابلية للبرهنة عن الهندسة[4].

ولقد تم تأييد عمل "بارون ماسيرس" بشكل قوى بواسطة "وليم فريند" الذي رفض فكرة الأعداد والكميات السالبة، وقام بنقد "إسحاق نيوتن" **Newton, I.** *(١٦٤٢ – ١٧٢٧)*[5]، ومن سار على نهجه ممن قاموا بتعريف الكمية السالبة بوصفها كمية أقل من الصفر؛ وهو

---

(1) Ibid, p. iii.

(2) Ibid, p. i.

(3) Ibid, p. 8.

(4) Ibid, p. 34.

(٥) ليس ثمة مشكلة لدي "إسحاق نيوتن" في قبول الأعداد والكميات السالبة، ففي كتابه "الحساب الكلي" قدم منهجاً لطرح عدد أكبر من عدد أقل قائلاً: "عليك أولاً أن تطرح الأقل من الأكبر ثم تضع علامة السالب إلى جانب الناتج للتذكرة". وقد ميز "إسحاق نيوتن" بين السالب والموجب قائلاً إن: "الكميات إما أن تكون موجبة أو أكبر من اللاشئ أو تكون سالبة أو أقل من اللاشئ". انظر في ذلك:–

- Newton, I. (1728): Universal Arithmetick; or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution, 2d ed. In: Derek T. Whiteside (Ed.) (1967): The Mathematical Works of Isaac Newton, New York, London: Johnson Reprint Corporation, Vol. 2, pp. 3-134.

تعريف – من منظور "وليم فريند" – يستحيل تكوين فكرة واضحة عنه، أو إنها كمية ناتجة عن طرح كمية أكبر من كمية أقل، وهي عملية يستحيل أيضاً – من منظوره – القيام بها( ).

إن اعتراض "وليم فريند" على فكرة الكميات السالبة كان قائماً على النظر إلى الرياضيات بوصفها العلم الذي يدرس الكميات الملموسة القابلة للعد، فقد كان معجباً بالبساطة، يكره التوصل إلى نتائج غامضة، علاوة على ابتعاده عن كل ما يصعب تفسيره. ومن ثم، قام برفض كل شئ لم يستوعبه العقل بشكل كامل( ). قال "وليم فريند" في رفضه للأعداد السالبة إن:-

> العدد قد يكون أكبر أو أصغر من عدد آخر، وقد يجمع أو يطرح أو يضرب أو يقسم على عدد آخر ... قد تضع علامة قبل العدد بحيث يخضع لها، وهذا يعني أن العدد يقبل الطرح من عدد آخر أكبر منه، ولكن محاولة أخذه من عدد أصغر منه تُعد ضرباً من اللغو، وهذا ما قام به علماء الجبر الذين تحدثوا عن أعداد أقل من اللاشئ، وعن عملية ضرب عدد سالب في عدد سالب ليكون الناتج عدد موجب، أي إنهم تحدثوا عن عدد تخيلي Imaginary لا وجود له( ).

---

(1) Frend, W. (1796): Principles of Algebra, Vol. I, London: GG & J Robinson, pp. 465 - 466.

(2) De Morgan, A. (1842): Obituary on William Frend, Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. xii, London, p. 462.

(3) Frend, W.: Op. Cit, pp. x - xi.

لقد شغلت مشكلة الأعداد والكميات السالبة علماء الرياضيات البريطانيين، حيث إن الرياضيات هي علم الكم، ولما كان تعريف الكميات السالبة بأنها "كميات أقل من اللاشئ"، أو هي "كميات يتم الحصول عليها نتيجة طرح كمية أكبر من كمية أقل"، وهي تعريفات غير كافية منطقياً، فإن الحل في نظرهم كان نبذ تلك الأعداد والكميات السالبة، ورفض وجودها في علم الجبر.

على العكس من ذلك، رفض عديد من علماء الرياضيات البريطانيين – في أواخر القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر – التخلي عن الأعداد والكميات السالبة؛ حيث أيدوا بقاءها رغم إقرارهم بعدم وجود تعريف جيد لها، أبرزهم "نيكولاس سوندرسون" Saunderson, N. (١٦٨٢–١٧٣٩)، "وليم جرينفيلد" Greenfield, W. (١٧٧٨–١٨٢٧)، "ترايل"، "روبرت وودهس" Woodhouse, R. (١٧٧٣–١٨٢٧)، "جون ووكر" Walker, J. (١٧٦٨– ١٨١٩).

لم يكن لدى "نيكولاس سوندرسون" صعوبة في الإقرار بأن الكمية السالبة هي كمية أقل من اللاشئ، بل وأقر بأن:

> إمكانية أن تكون الكمية (أي كمية) أقل من اللاشئ هي بمثابة مفارقة لدي البعض، إن لم تكن لغواً، ولعلها قد تكون كذلك إذا افترضنا أنه من الممكن لجسم ما أو مادة ما أن تكون أقل من اللاشئ[1].

(1) Saunderson, N. (1740): The Elements of Algebra. Cambridge: The University Press, p. 50.

لقد حاول "نيكولاس سوندرسون" تفسير تصور الكمية السالبة خلال مناقشة فكرة العبور من الموجب – وعبر اللاشئ – إلى السالب، وذلك باستخدام أمثلة عن المدين والدائن، درجات الحرارة المرتفعة والمنخفضة، وزعم أن العقول الضعيفة لديها صعوبة في فهم هذا التصور، وذلك لأن الكلمات تتغير عندما تصبح الكمية سالبة؛ فالسلع السالبة تسمى ديوناً، والحرارة السالبة تسمى برودة، والصعود السالب يسمى انحداراً، ولكل زوج تم ذكره يمثل التصور نفسه مع اختلاف الدرجة فقط، كما إن العلامات تعمل كصفات مثل سعيد وغير سعيد، صحة جيدة وصحة سيئة، وهكذا تحل المشكلة، والعمليات التي تتم باستخدام الكميات السالبة تُعرف بقاعدة التضاد[1].

في السياق نفسه، دافع "وليم جرينفيلد" عن الكميات السالبة، وقام بالرد على نقد "بارون ماسيرس" لها، حيث عبر عن حيرته تجاه رغبة "بارون ماسيرس" للابتعاد عن الكميات السالبة وبالتالى التخلي عن اتساق علم الجبر، ولعل "وليم جرينفيلد" كان يفضل أن يسعى "بارون ماسيرس" للإصلاح، وأن يعتمد على الكميات السالبة في الجبر بدلاً من نبذها[2].

ويوضح "وليم جرينفيلد" كيف إن علماء الرياضيات استخدموا الأعداد السالبة لوصف اتجاه ومقدار كل من الكميات المعلومة وغير المعلومة في المعادلة بقوله:

> إذا كانت إحدى الكميات غير المعلومة هي التي غيرت موقفها، فيتم اتخاذ جذر سالب، وإذا كانت إحدى الكميات المعلومة هي التي غيرت موقفها،

---

(1) Ibid, pp. 51 – 52.

(2) Greenfield, W. (1788): On the use of negative quantities in the solution of problems by algebraic equations, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 1, Edinburgh: J. Dickson, p. 136.

فإنه يتم تغيير علامتها في المعادلة [1].

ويشير "وليم جرينفيلد" إلى إن الكميات السالبة – في علم الجبر – لم تستخدم بشكل مطلق وذلك لعدم وجود تفسير جيد للأساس الذي بنيت عليه النتائج المشتقة من تلك الكميات، وأشار إلى إن ذلك المنهج يعتمد على الاستقراء Induction والتناظر Analogy وليس البرهان الرياضي Mathematical Demonstration. ولقد عبر أيضاً عن عدم قناعته باستخدام الكميات السالبة دون الإشارة إلى الكميات التي تطرح منها[2].

حيث تشير التفسيرات الغامضة والمبهمة للأمر والتي قدمها أبرز الكتاب إلى إنه رغم رضاهم عن يقين المنهج، إلا إنهم يدركون أن شيئاً ما لا يزال يحتاج لمزيد من التفسير، حيث لم يتم تقديم تفسير جيد له بعد[3].

وقد كان هدف "وليم جرينفيلد" هو تقديم تفسير جديد للكميات السالبة بدلًا من هدم الجبر بسببها، فقد كان يخطط لتفسير الكميات السالبة خلال دلالة علامة السالب على عملية الطرح فقط، دون اقتراح أي تبديل في نسق الجبر[4].

في السياق نفسه، لم يكن لدى "ترايل" مشكلة مع الكميات السالبة، فقد عرفها بأنها الكمية التي تسبقها العلامة(–). ويبدو إنه يميز بين معنيين للعلامة حيث قال:–

---

(1) Ibid, p. 131.

(2) Ibid, pp. 134 – 135.

(3) Ibid, p. 136.

(4) Ibid, p. 136.

إن الكمية السالبة في حد ذاتها تكون غير منطقية
عندما تشير العلامة (−) إلى عملية الطرح ...
ولكن في الهندسة والجبر، قد يكون هناك نقيض أو
مقابل في الكميات مشابه لعمليتي الجمع والطرح،
كما ان العلامتين (+) و (−) قد يتم استخدامهما
للتعبير عن ذلك التناقض( ).

ويضيف "ترايل" إن الكميات السالبة قد تعد كميات مطروحة من كميات موجبة لم يتم التعبير عنها، أو إنها كميات مقابلة للكميات الموجبة ( ). ٢

كما تبني "روبرت وودهس" مدخلاً براجماتياً للمشكلة، فرغم إقراره بأن الكمية السالبة تُعد غير معقولة وغير منطقية، فإنه جادل من أجل بقائها، وأضاف إنه إذا كانت العمليات التي تجرى بواسطة علامات الإيجاب والسلب تؤدي إلى نتائج صائبة، فإن صدقها يرجع لوجود قانون ما( ). وهو قانون العلامة Sign law وقام بتطبيقه على النحو التالي:

لما كان من الضروري وجود قانون لضرب
العلامات (+)، (−)، فقد تم إنشاء قانون عام، مفاده
إن ضرب العلامات المتشابهة ينتج عنه كمية

(1) Trail, W. (1796): Elements of Algebra for the Use of Students in Universities, 2d. ed. Edinburgh: William Creech, pp. 8 – 9.

(2) Ibid, p. 181.

(3) Woodhouse, R. (1801): On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary quantities, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 91, p. 90.

> موجبة (+)، وضرب العلامات غير المتشابهة ينتج عنه كمية سالبة (–)، وينتج باتباع ذلك القانون نتائج صادقة دائمًا[1].

وفي السياق نفسه، كان "جون ووكر" على استعداد لاستخدام الكميات السالبة طالما أنها لا يتم تعريفها بوصفها كميات أقل من اللاشئ، وإنما في ضوء عملية الطرح، حيث قال في ذلك:–

> إن علماء الرياضيات عند معالجتهم للكميات السالبة قد وقعوا في بعض الأشياء الغامضة؛ حيث قالوا إن (–٥) تعد كمية أقل من اللاشئ .. بينما في الحقيقة تشير (–٥) إلى الكمية نفسها مثل (+٥) مع الأخذ في الاعتبار إن الأولى يتم طرحها بينما الثانية يتم جمعها[2].

كما رحب "جون ووكر" بتعريف الكميات السالبة بوصفها ناتجه عن طرح الكمية الأكبر من الكمية الأقل، حيث قال:–

> على الطالب ملاحظة إنه في الجبر يمكن أن نتحدث عن طرح كمية كبيرة من كمية أقل؛ مثل

---

(1) Ibid, p. 95.

(2) Walker, J. (1812): The Philosophy of Arithmetic; Considered as a Branch of Mathematical Science and the Elements of Algebra, Dublin: R. Napper, pp. 76 – 77.

طرح (٧) من (٥) .. وفي العبارة (x – y) إذا
كانت (x) تشير إلى كمية أقل من (y)، فإن قيمة
العبارة (x – y) تكون سالبة(١).

وإلى جانب أنصار الكميات السالبة، كانت صياغة "جورج بيكوك" للجبر الرمزي بمثابة رد على معارضي الكميات السالبة؛ حيث عالج المشكلات الرئيسة التي أثاروها؛ مثل نبذ الأعداد السلبة، عملية الطرح المقيدة(٢)، فلم يؤيدهم في نبذهم للأعداد السالبة، بل سعى إلى تطوير الجبر بحيث يتم قبول الأعداد السالبة، ومن ثم عملية الطرح غير المقيدة(٣).

تتمثل الفكرة الرئيسة عند "جورج بيكوك" – التي قام بعرضها في كتابه "دراسة عن الجبر" – في التمييز بين نوعين من الجبر؛ الجبر الحسابي Mathematical Algebra والجبر الرمزي، فقد كان الجبر سابقا يعد حسابياً فقط، بحيث تحل الرموز محل الأعداد، ولكن بيكوك وجد أن هذا يعد تقييداً غير ضروري للجبر(٤).

وعليه، فقد أسس "جورج بيكوك" الجبر الرمزي الذي يضم هذه الأعداد بشكل له معنى، وكان رده على معارضي الأعداد والكميات السالبة هو أن علم الجبر ينقسم إلى جزءين؛ الجبر الحسابي والجبر الرمزي وإنهم أخطأوا في قصر علم الجبر على الجزء

(1) Ibid, p. 79.

(٢) أي مقيدة فقط بطرح كمية أقل من كمية أكبر.

(3) Peacock, G.: Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis, pp. 190 – 191.

(4) Peacock, G.: A treatise on Algebra, p. 1.

الحسابي[1]، الذي يتعامل مع الكميات الموجبة دون السالبة، وبالتالي يتم إنهاء ذلك الخلاف حول ما إذا كانت الأعداد السالبة صحيحة للاستخدام من عدمه.

ثالثاً: الجبر الرمزي عند "جورج بيكوك"

ما الجبر الرمزي؟ يُعرفه "جورج بيكوك" بأنه:

العلم الذي يتناول مجموعات العلامات والرموز العشوائية ويتعامل معها خلال قوانين بعينها ولكنها مُعرفة[2].

إذن كان تركيز "جورج بيكوك" منصباً على قوانين العمليات التي تستخدم الرموز المختلفة في الجبر.

استخدم "جورج بيكوك" – في الجبر الرمزي – عمليات الجبر الحسابي ولكن دون القيود الحسابية المفروض عليها[3]؛ فعلى سبيل المثال لم تعد عمليات الجمع والطرح تقتصر على كميات من النوع نفسه، كما لم يعد يلزم أن يتم طرح الأصغر من الأكبر.

---

(1) Macfarlane, A.: Lectures on Ten British Mathematician of the Nineteenth Century, in: Merriman, M. & Woodward, R. S. (Eds.) (1916): Mathematical Monographs, No. 17, 1st ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., p. 6.

(2) Peacock, G.: A treatise on Algebra, p. 71.

(٣) حيث أشار "جورج بيكوك" إلى إن العملية الحسابية مقيدة بالحالات التي يكون فيها المطروح منه أكبر من أو يساوي المطروح، بينما العملية الجبرية ليس عليها قيود. انظر في ذلك:-

- Peacock, G.: Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis, pp. 188 – 189.

وعليه، استخدم "جورج بيكوك" الجبر الحسابي كـ"علم مُقترح Science of Suggestion؛ بمعنى إنه استخدمه لاقتراح مبادئ وقوانين الجبر الرمزي[1]، وذلك خلال مبدأ ثبات الصورة المتكافئة؛ حيث قرر "جورج بيكوك" اختيار علم ما ثانوي (الجبر الحسابي) بوصفه دليلاً مرشداً Guide – وليس أساساً – تُبنى عليه الافتراضات Assumptions ويتم صياغتها بصورة ما بحيث يصبح الجبر الرمزي الصورة العامة لهذا العلم[2].

فقد كانت رؤية "جورج بيكوك" إن الجبر الرمزي يتضمن الجبر الحسابي الذي ينظر إليه بوصفه العلم الذي تكون عملياته والنتائج المترتبة عليها بمثابة قاعدة أساسية للافتراضات التي ستصبح بعد ذلك اساساً للجبر الرمزي[3].

ثم أشار إلى وجود علاقة ضرورية بين قوانين الجبر الحسابي وقوانين الجبر الرمزي؛ فالجبر الحسابي اقترح مبادئ الجبر الرمزي أو بالأحرى قوانين تركيبه[4]، فهو يعتقد بأنه لا توجد آراء فلسفية متعلقة بطبيعة الجبر الرمزي تجعل اختيار قواعد تركيبه مستقلة عن الجبر الحسابي[5].

---

(1) Peacock, G.: A treatise on Algebra, p. xvii.

(2) Ibid, p. 71.

(3) Ibid, p. xi.

(4) إلا إن الجبر الحسابي لم يكن علم الاقتراح الوحيد للجبر الرمزي؛ فقد أشار "جورج بيكوك" إلى الهندسة والميكانيكا والديناميكا، وقام بتوسيع مجال علوم الاقتراح لتتضمن كل فروع الفلسفة الطبيعية، التي تعتمد على مبادئ محددة وحتمية. انظر في ذلك:-

- Ibid, p. xxi.

(5) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. II, p. 453.

إن قوانين الجبر الحسابي – من منظور "جورج بيكوك" – سارية دائماً في الجبر الرمزي. ومن ثم، فقد بدأ بصياغة الجبر الحسابي حيث يُعرفه بأنه:

العلم الناتج عن استخدام الرموز والعلامات للإشارة
إلى الأعداد والعمليات التي قد تعرض لها (1).

هذه الأعداد التي تم تعيينها واقعياً وتقديمها هي الأعداد الحقيقية الموجبة وليست السالبة، ويتم التعبير عنها بواسطة التدوين الحسابي المعتاد(2).

فالجبر الحسابي – كما سبق وذكر الباحث – هو جبر الأعداد الحقيقية الموجبة غير السالبة؛ فالصفر حد أدنى مطلق Absolute Minimum، ولا وجود للكميات السالبة مثل (a–) في هذا النسق، كما تعد التعبيرات مثل (a – b) غير ممكنة إذا لم تكن (a) أكبر من (b) أو تساويها(3).

كما إن رموز الجبر الحسابي عامة في صورتها ومحددة في قيمتها(4). ويلخص "جورج بيكوك" شروط الجبر الحسابي في التقرير بقوله:–

تدل الرموز العامة للجبر الحسابي على أعداد فقط ...
يرفض الجبر الحسابي الاستخدام الحر للعلامات (+)
و(–) ... تكون عملية الطرح مستحيلة إذا كان

(1) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. I, p. 1.

(2) Ibid, p. 273.

(3) Peacock, G.: A treatise on Algebra, pp. 66 – 68.

(4) Peacock, G.: Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis, p. 200.

المطروح أكبر من المطروح منه، كما يرفض الجبر الحسابي النظر إلى القيم المتعددة للجذور البسيطة وكذلك الجذور السالبة والمستحيلة للمعادلات من الدرجة الثانية والدرجة الأعلى(١).

ويمكن صياغة مبدأ "جورج بيكوك" كالتالي: يدل الرمز في الجبر الحسابي على عدد موجب، ويجب رد كل مجموعة من الرموز إلى عدد موجب؛ فإذا كانت (a) و (b) أعداداً، فلابد أن يكون (a + b) عدد موجب، أما (a – b) فيكون عدد موجب – فقط – إذا كانت (a) أكبر من (b)(٢). ثم يقدم "جورج بيكوك" بعد ذلك معنى عام للعلامة (=) حيث يرى إن:

العمليات الأساسية في الجبر تعد رمزية بشكل كلي، وقد نستطيع خلالها استنباط نتائج رمزية وصور متكافئة دون النظر إلى مبادئ أي علم آخر، وسيتطلب الأمر فقط مجرد تقديم بعض العلامات مثل (=) لتحل محل عبارة "النتيجة الجبرية هي" أو "المكافئ جبريا لـ". وذلك لربط النتائج بالتمثيل الرمزي للعمليات التي أنتجتها(٣).

---

(1) Ibid, p. 189.

(2) Mcfarlane, A.: Op. Cit, p. 6.

(3) Peacock, G.: A treatise on Algebra, p. xi.

ومن ثم، ينطوي الجبر الحسابي على استبدال الأعداد بالرموز؛ أي استخدام المتغيرات (a) و(b) كبديل لـ(١) و(٢)، وبالتالى لا تختلف نتيجة (a + b) عن نتيجة (١ + ٢). ولكي تكون (a) و(b) ذات معنى في الجبر الحسابي، فينبغي تعريفهما بشكل واضح في ضوء إشارتهما المباشرة إلى الأعداد (مثال: $a = 1$ ، $b = 2$). فقد يُستبدل العدد (٢) بالرمز (a)، والعدد (٣) بالرمز (b) وبالتالى تكون ($a + b = 5$)، ولكن هذه الرموز لا تحمل أي معنى بعيداً عن معنى الأعداد التي تدل عليها[1].

وباختصار يُعد الجبر الحسابي العلم الذي ينتج عن استخدام الرموز للإشارة إلى الأعداد والعمليات التي تعرض لها هذه الرموز. فهذه الأعداد وما يمثلها والعمليات التي تجرى عليها تُستخدم بالمعنى نفسه وبالقيود نفسها الموجودة في علم الحساب[2]. وتعد قوانين وعمليات الجبر الحسابي النموذج المقترح الذي تتبعه عمليات الجبر الرمزي، ويؤكد "جورج بيكوك" على إن القوانين يتم اقتراحها – وليس استنباطها – بشكل ما، بحيث إذا تقاطع المجالان في أي من النواحي فإن القوانين والعمليات تكون متطابقة[3]. ومن ثم، فلا يُعد الجبر الرمزي مُستنبطاً من الجبر الحسابي وإنما مقترح بواسطته، قال في ذلك:–

إن قواعد التركيب الرمزي قد تم اقتراحها فقط
بواسطة القواعد الموافقة لها في الجبر الحسابي،
ولكن لا يمكن القول بإنها مبنية عليها وذلك لأنها

---

(1) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. 1, p. iv.

(2) Ibid, p. 1.

(3) Peacock, G.: A treatise on Algebra, p. 74.

ليست مستنبطة منها(١).

ونظرا لأن الجبر الرمزي يتضمن الجبر الحسابي، فلابد من تطابق قوانينهم وعملياتهم طالما أنهما يسيران معاً. قال في ذلك:-

إنه في ضوء هذه الرؤية لمبادئ الجبر الرمزي، فإن عملياته تتحدد خلال تعريفات الجبر الحسابي، طالما أنهما يسيران معا بشكل مشترك( ).

إن هدف "جورج بيكوك" الرئيس هو وضع الجبر على أساس منطقي قوي يقبله، وبالتالى تُعد محاولته فصل الجبر الرمزي عن الحسابي محاولة منه لإعادة بناء علاقة جوهرية بينهما، ونظراً لأنه يرى إن علم العلامات والرموز وقوانين التركيب التي أنشاها لن يكون لها معنى ما لم يصاحبها تفسير ملائم، فقد أقر بأن الجبر الحسابي هو:

العلم الذي ينبغي لعملياته والنتائج العامة المترتبة عليها أن تكون دليلاً مرشداً للافتراضات التي ستصبح بعد ذلك أسس الجبر الرمزي( ).

ثم قام "جورج بيكوك" بعملية التعميم أو الانتقال من الجبر الحسابي إلى الجبر الرمزي خلال مبدأ ثبات الصورة المتكافئة، وهو مبدأ أصبح ذا تأثير قوي في أواخر القرن التاسع

---

(1) Peacock, G.: Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis, pp. 197 – 198.

(2) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. II, p. vii.

(3) Peacock, G.: A treatise on algebra, p. xi

عشر وبداية القرن العشرين( ). وهو يُعد العنصر الرئيس في عرض "جورج بيكوك"، وقد قدم أول صياغة لهذا المبدأ عام ١٨٣٠– وأطلق عليه مبدأ "ثبات الصورة الجبرية"( ) – ثم قدمها مرة أخرى عام ١٨٤٥، وهو ينص على ما يلي:

> إذا تكافأت الصور الجبرية عندما تكون الرموز عامة في صورتها ومحددة في قيمتها، فإنها ستكون أيضا متكافئة عندما تكون الرموز عامة في صورتها وقيمتها( ).

أي إن الصور الجبرية إذا تكافأت – في الجبر الحسابي – عندما تكون الرموز عامة في صورتها ومحددة في قيمتها، فإنها ينبغي أن تظل متكافئة – في الجبر الرمزي – عندما تكون الرموز عامة في صورتها وكذلك في قيمتها.

ينبغي الإشارة إلى ملاحظة تتعلق بالتمييز الذي قدمه "جورج بيكوك" بين عمومية صورة الرمز وعمومية القيمة؛ فبالإشارة إلى صورة الرمز بأنها عامة، كان "جورج بيكوك" يقصد أنه متغير وليس ثابت، وبالنسبة لوصف القيمة بأنها عامة، فإنه يقصد إنها يمكن أن تكون متغيرة وممتدة ليس فقط على نوع بعينه من الكميات، وإنما على كل أنواع الكميات، وعلى ذلك فالرمز الذي يكون عاماً في صورته وطبيعته، يكون متغيراً ممتداً على كل أنواع الكميات( ).

٤

(1) Detlefsen, M.: Formalism, in: Shapiro, S. (Ed.) (2005): The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic, Oxford University Press, Inc., pp. 236 – 317, p. 274.

(2) Peacock, G.: A treatise on Algebra, p. 133.

(3) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. II, p. 59.

(4) Detlefsen, M.: Op. Cit, p. 274.

فإذا كانت الرموز n و m أرقاماً صحيحة، إذًا فإن $ma + na = (m + n)a$ وبطريقة مماثلة يترتب أن $am \times an = am + n$ في ظل الظروف نفسها، وهكذا يُظهر مبدأ ثبات الصور المتكافئة أن $ma + na = (m + n)a$، عندما تكون n و m رموزاً عامة، ويُظهر المبدأ نفسه إن $am\times an = am + n$ ويوجد تفسير معنى القيم الجزئية للأس Index سواء كسرية أو سالبة متضمناً في هذه النتيجة والتي سيصبح بعد ذلك مبدأ الأسس، أي المبدأ العام الذي يحدد تفسير الأسس عند افتراضها ويوجهنا أيضاً في الاتجاه المعاكس لتحديد الأسس التي يجب افتراضها لتتناسب مع تفسير محدد[1].

يتضح مما سبق مبدأ ثبات الصور المتكافئة بشكل كبير، والذي كان المنهج الذي استخدمه "جورج بيكوك" كي يتمكن من استخدام نتائج الجبر الحسابي في مجال الجبر الرمزي.

ويترتب على مبدأ ثبات الصور المتكافئة إن نتائج الجبر الحسابي ستكون أيضاً نتائج للجبر الرمزي، كما إن اكتشاف صور متكافئة في الجبر الحسابي تمتلك الشروط المطلوبة لتحققها سيتم اكتشافها أيضاً في الجبر الرمزي، بل وستكون هذه الشروط السبب الوحيد لتحققها، ذلك لأنه لا يوجد تعريفات للعمليات في الجبر الرمزي يمكن خلالها تحديد هذه الصور المتكافئة[2].

ويبدو تأثير مبدأ ثبات الصورة المتكافئة واضحاً من حيث محاولة التمييز بين نوعين أو مستويين من الجبر؛ الجبر الحسابي والجبر الرمزي، مع العلم إنه كي يكون الجبر الرمزي مثمرًا لابد له أن يحافظ على قوانين الجبر الحسابي. وبالتالي، يستلزم مبدأ ثبات الصورة

(1) Peacock, G.: A treatise on Algebra, pp. vxi – vxii.

(2) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. II, p. 59.

المتكافئة أن تكون قوانين الجبر الرمزي متسقة ليس فقط مع بعضها البعض وإنما مع قوانين الجبر الحسابي أيضًا، ويؤكد "جورج بيكوك" على إن تحقيق ذلك الشرط لا يمثل في حد ذاته مسوغاً أو أساساً للجبر الرمزي(1).

ومن ثم، يُعد الجبر الرمزي امتداد للجبر الحسابي، حيث اصبحت العمليات التي كانت مستحيلة التحقق في الجبر الحسابي ممكنة وصحيحة منطقياً في الجبر الرمزي، فالجبر الرمزي يستخدم قوانين الجبر الحسابي ولكن مع إزالة كافة القيود(2).

تتمثل تلك القيود في أن الجبر الحسابي يتعامل فقط مع الأعداد الموجبة وليس السالبة، ولهذا تتم عمليات الطرح بالشكل الصحيح. فعلى سبيل المثال قال "جورج بيكوك":-

> يُفترض في التعبير $(a - b)$ أن العدد الذي يُعبر عنه الرمز a أكبر من العدد الذي يُعبر عنه الرمز b، فإذا لم يتحقق ذلك الشرط فلا يمكن إجراء عملية طرح b من a، وبالتالي تُعد نتيجة هذه العملية مستحيلة(3).

وقد سعى "جورج بيكوك" – خلال إزالة هذه القيود – إلى جعل الجبر الرمزي يتعامل مع الأعداد السالبة، وأن يكون امتداد للجبر الحسابي، وهذا هو جوهر مبدأ ثبات الصورة المتكافئة. قال "جورج بيكوك" إنه:

---

(1) Detlefsen, M.: Op. Cit, p. 275.

(2) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. 11, p. vi.

(3) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. 1, p. 7.

> تم اقتراح قواعد التركيب في الجبر الرمزي خلال القواعد الموافقة لها في الجبر الحسابي. ولكن لا يمكن القول إنها مبنية عليها حيث أنها لا يتم استنباطها من هذه القواعد( ).

أشار "جورج بيكوك" إلى إنه لم يقم باستنباط قوانين في الجبر الرمزي، خاصة عندما يتعلق الأمر بفهم ثبات الصور، أما بالنسبة لتفسير العلامة (=) فقد كان دقيقاً خلال التمييز بين إشارتها إلى التساوي الحسابي والتكافؤ الجبري. حيث يمثل التساوى الحسابي الفكرة المعيارية عن التساوي؛ بمعنى إن استبدال أي عدد (صحيح حسابيًا) ينتج عنه القيمة نفسها في الجانب الاخر. بينما يشير التكافؤ الجبري إلى تصور أكثر عمومية حيث يمكن أن يتحول أحد الجانبين إلى الجانب الاخر خلال العمليات الجبرية( ). ثم بدأ في صياغة وبناء[٢] الجبر الرمزي على النحو التالي بقوله:-

> قد يعد الجبر في صورته العامة هو العلم الذي يتناول مجموعة العلامات والرموز العشوائية خلال قوانين محددة ولكنها عشوائية( )، حيث يمكننا افتراض أيّ[٣]

---

(1) Peacock, G.: Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis, p. 198.

(2) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. 11, pp. 449 – 450.

(٣) يشير فيلسوف العلم النمساوي "إرنست ناجل" Ernest Nagel (١٩٠ – ١٩٨٥) إلى تأييد "جورج بيكوك" لعشوائية قوانين الجبر الرمزي وبالتالى حرية عالم الرياضيات في وضعها، إلا إن هذا التأييد قد تم تجاهله تماما، أولاً من قبل معاصريه، ولاحقاً من قبل مؤرخي الرياضيات، ممن نسبوا حرية الرياضيات إلى "وليم

قانون لتركيب هذه الرموز طالما أن افتراضاتنا مستقلة

وبالتالى لا يوجد تعارض بينها( ).

تعبر الرموز عن كميات عشوائية غير مقيدة سواءً في طبيعتها أو مقدارها( ). وحيث إنه لا يوجد قيود على معنى الرموز – كما هو الحال في الجبر الحسابي – فعلى سبيل المثال تكون العلاقة (a – b) ممكنة في جميع الحالات، بغض النظر عن قيم كل من (a) و(b)، كما إن (c –) يكون لها معنى أيضاً، وهنا تنشأ مجموعة جديد من الكميات. وفي الحقيقة أصبح للعلامات (+) و(–) وجود مستقل، وهنا تكمن نقطة الانفصال بين الجبر الحسابي والجبر الرمزي( ). ٣

وبينما يتعامل الجبر الحسابي فقط مع الكميات الموجبة ولا يسمح بطرح كمية من كمية أصغر منها، فإن "جورج بيكوك" يعده نسق منطقي كامل، إلا إنه لم يكن كافياً ليشمل كل التطورات التي حدثت في الجبر منذ نشأته( ). ٤

هاملتون" مؤسس الرباعيات The Quaternions، وإلى مخترعي الهندسة اللاقليدية Non-Euclidean Geometry. أنظر في ذلك:–

- Nagel, E.: Impossible numbers: A chapter in the history of modern logic, in Studies in the History of Ideas (1935), Edit by the Department of Philosophy of Columbia University, Vol. III, New York: Columbia University press, pp. 454 – 455.

(1) Peacock, G.: A treatise on Algebra, p. 71.

(2) Ibid, p. 69.

(3) Ibid, p. ix.

(4) Buzaglo, M. (2002): The Logic of Concept Expansion, UK: Cambridge University Press, pp. 16 – 17.

وعلى العكس من ذلك، فقد تجاهل الجبر الرمزي ضرورة أن تشير الرموز إلى كميات موجبة فقط. ومن ثم، فقد سمح بتمثيل أي كمية؛ سواء أكانت موجبة أم سالبة. وتعد الرموز مجردة نتيجة لضرورة تمثيلها شيئًا ما، رغم إنه من الممكن أن تُعطي تفسيراً فيما بعد( ).

ولهذا فقد يصبح الجبر الرمزي علماً للرموز وتركيباتها، يتم بناؤه وفقًا لقواعده الخاصة والتي قد تنطبق على الحساب وباقي العلوم الاخرى خلال التفسير، وبهذا فإن التفسير سيتبع ٢
– ولا يسبق – عمليات الجبر ونتائجها( ).

يتضمن الجبر الرمزي الأعداد والكميات السالبة، وعملية الطرح غير المقيدة. ويرى "جورج بيكوك" إن عالم الرياضيات قد انتقل من الجبر الحسابي إلى الجبر الرمزي على النحو التالي:–

> إن افتراض الوجود المستقل للعلامات (+) و (–) يجعل أداء العملية المشار إليها بالعلامة – ممكناً في كل الحالات: ولعل هذا الافتراض هو سبب الفصل بين الجبر الحسابي والجبر الرمزي، وجعل من الضروري إقامة مبادئ خاصة بهذا العلم مبنية على أسس خاصة بها ( ).

في السياق نفسه أشار "جورج بيكوك" إلى إننا إذا قمنا بتعميم العملية المشار إليها بالعلامة (–) بحيث تسمح بتطبيقها في كل الحالات، فسنلاحظ عندئذ الوجود المستقل لهذه

(1) Ibid, p.17.

(2) Peacock, G.: Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis, pp. 194 – 195.

(3) Peacock, G.: A treatise on Algebra, pp. viii – ix.

العلامة والذي يعد نتيجة منطقية ضرورية لذلك، وبالتالى سنقدم مجموعة من الكميات لم يتم التفكير في وجوده أبداً في الجبر الحسابي، وهذا التعميم للعملية المشار إليها بالعلامة (–) يعد في الواقع افتراضاً طالما إنه ليس لديه نتيجة يمكن استنباطها من عملية الطرح التي تم تعريفها واستخدامها في الحساب والجبر الحسابي[1].

وبذلك قدم الجبر الرمزي – على عكس الجبر الحسابي – مستوى جديداً من التجريدية المميزة، حيث تم التركيز على دلالات السمات الصورية (أو التركيبية). ومن ثم، اتسمت الرموز المستخدمة في الجبر الرمزي بأنها عامة في تمثيلها وغير محددة (عشوائية) في قيمتها، كما اتسمت العمليات التي تجري عليها بأنها كلية في تطبيقها[2].

بمعنى آخر؛ يأتي الجبر الحسابي من استعمال الرموز والعلامات لتدل على الأعداد والعمليات التي تكون الأعداد موضوعاً لها، وتكون هذه الأعداد أو ما تمثلة والعمليات القائمة عليها مستعملة بالمعنى نفسه وبالتحديدات نفسها التي تسعمل فيها في الحساب العام. أما الرموز المستعملة في الجبر الرمزي فهي غير محددة القيمة، ويكون تطبيق العمليات القائمة أيا كانت دلالاتها أو الاسم الذي يطلق عليها تطبيقاً عاماً[3].

ومن ثم، فإن قيام "جورج بيكوك" بالتمييز بين الجبر الرمزي عن الجبر الحسابي يعد محاولة لإعادة بناء علاقة جوهرية بينهما، حيث أشار إلى إن قواعد الجبر الحسابي تقترح – وإلى حد ما تحدد – المبادئ الأولى في الجبر الرمزي[4].

---

(1) Ibid, p. vii.

(2) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. II, p. 2.

(٣) رشوان، محمد مهران: مرجع سابق، ص ص. ٥٥٥ – ٥٥٦.

(4) Peacock, G.: A treatise on Algebra, Vol. II, p. 1.

ومن ثم، أسس "جورج بيكوك" الجبر الرمزي"، وذلك خلال استخدام قواعد الجبر الحسابي بعد إزالة القيود التي كانت موجودة به، ولهذا تختلف عملية الطرح في الجبر الرمزي عن نظيرتها في الجبر الحسابي من حيث كونها ممكنة بالنسبة لكل العلاقات الخاصة بقيمة الرموز أو التعبيرات المستخدمة(١).

إن تعميمات الجبر الحسابي هي تعميمات للتفكير الاستدلالي وليس للصورة، أما الجبر الرمزي فهو يأخذ بقواعد الجبر الحسابي، وكل ما هنالك أنه يلغي تماما تحديداتها، إن هذا الأخذ بقواعد العمليات في الجبر الحسابي بوصفها قواعد لإنجاز العمليات التي تحمل الأسماء نفسها في الجبر الرمزي هي التي تكفل الهوية المطلقة للنتائج في العلمين طالما تكون هذه النتائج موجودة بصورة مشتركة(٢).

فكل نتائج الجبر الحسابي التي تكون – وفقًا لمبدأ ثبات الصور المتكافئة – عامة في صورتها ومحددة في قيمتها تكون نتائج أيضاً في الجبر الرمزي ولكنها تكون عامة في صورتها وقيمتها. وهكذا فإن حاصل ضرب $(a^n \times a^m)$ هو (a^{m+n}) عندما تكون (n) و (m)أعداداً صحيحة – أي عامة في صورتها ومحددة في قيمتها – يكون هو حاصل الضرب نفسه عندما تكون (n) و(m) عامة في صورتها وقيمتها، وبالمثل تكون المتسلسلة $[(a + b)^n]$ في ضوء المبدأ نفسه ولكن عندما تكون (n) عامة في الصورة والقيمة(٣).

على سبيل المثال، إذا كانت الرموز (a), (b), (c), (d) تشير إلى أعداد صحيحة ولكنها تخضع لقيد ما وهو أن (b) أقل من (a) و (d) أقل من (c)، يمكننا أن نستنتج

(1) Mcfarlane, A.: Op. Cit, p. 7.

(٢) رشوان، محمد مهران: مرجع سابق، ص. ٥٥٦.

(3) Mcfarlane, A.: Op. Cit, p. 7.

وبشكل حسابي أن: [(a – b)(c – d) = ac + bd – ad – bc]. ويشير مبدأ "جورج بيكوك" إلى إن الصورة الموجودة في الجانب الأيسر تتكافئ مع الصورة الموجودة في الجانب الايمن، ليس فقط عند التخلص من القيود التي ذكرناها، ولكن أيضاً عندما تشير الرموز (a), (b), (c), (d)) إلى الرمز الجبري الأكثر عمومية. وهذا يعني إنها قد تكون كميات تخيلية، والجدير بالإشارة إن التكافؤ لم يتحدد خلال طبيعة الكمية المشار اليها، بل يُفترض أن يكون صادقاً وحقيقياً أولًا ثم يتم البحث عن التفسيرات المختلفة التي قد تنطبق على الرمز[1]. ولذا يمكن للجبر الرمزي لدى "جورج بيكوك" أن يعرف بأنه بداية الصورية.

ومن ثم، يُعد الجبر الرمزي نوعاً من الحساب المعمم، ويرجع نجاح هذا التعميم إلى مبدأ ثبات الصورة المتكافئة، والذي يشير إلى إن التكافؤ الجبري يكون ذاتياً بغض النظر عن التفسير؛ فالمعادلات الصحيحة التي تم التعبير عنها برموز غير مُفسرة ينبغي أن تظل صادقة مهما اختلفت تفسيرات الرموز، ولعل افتراض حرية الجبر واستقلاله عن الحساب قد تم التعبير عنه خلال فكرة إنه في الجبر الرمزي تقوم القواعد بتحديد معنى العمليات[2].

وتتمثل أهم سمات الجبر الرمزى – عند "جورج بيكوك" – في تركيزه على القوانين التي تعبر عن العمليات الجبرية – حيث يتحدد معنى الأشياء الجبرية خلال قواعد العمليات التي تُجرى عليها – وأيضًا تركيزه على موضوع الأعداد والكميات السالبة في استخدامه للجبر الرمزي[3].

(1) Ibid, p. 7.

(2) Valencia, V. S.: The Algebra of Logic, in: Gabbay, D. M. & Woods, J. (Eds.) (2004): Handbook of the History of logic, Vol. 3, The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege, Elsevier: North Holland, p. 399.

(3) Ibid, p. 399.

ولعل الدراسة المتأنية لكتابات "جورج بيكوك" تُظهر أنه كان على علم بمشكلات الأعداد والكميات السالبة وكان يسعى لإيجاد حل لها. ومن ثم إعادة بناء الجبر مرة أخرى بصورة رمزية بحيث يُسمح بوجود هذه الأعداد والكميات السالبة. لقد استطاع "جورج بيكوك" تطوير الجبر على أكمل وجه، وقام بنشر نتائجه، ولهذا ينسب إليه الفضل في تأسيس الجبر الرمزي.

رابعاً: موقف علماء الرياضيات من الجبر الرمزي

اختلف علماء الرياضيات في الثلاثينيات والأربعينيات من القرن التاسع عشر حول الجبر الرمزي لدي "جورج بيكوك" ما بين مؤيد ومعارض؛ فقد رفض "وليم هاملتون" الجبر الرمزي، وأوضح سبب رفضه في رسالة بعثها إلى – أحد اصدقائه– "جون جرافيس" (١٨٠٦ – ١٨٧٠) John T. Graves قال فيها:–

> إذا كنت تنظر – مثل "جورج بيكوك" – إلى الجبر بوصفه نسق خاص بالعلامات وتركيباتها، فإننى لست مقتنعًا بذلك إلا إذا نظرت إلى ما تشير إليه العلامات من أشياء، وأتمنى إنشاء نسق للبراهين في الجبر يعتمد على الحدس Intuition، ويشبه بشكل أو بآخر الهندسة الإقليدية Euclidean geometry(1).

---

(1) Graves, R. P. (1885): Life of Sir William Rowan Hamilton including selections from his poems, correspondence, and miscellaneous writings, Vol. 2, Dublin: Hodges, Figgis and Co., p. 143.

نبذ "وليم هاملتون" الجبر الرمزي عند "جورج بيكوك" وكان يرى أن الرياضيات ذات معنى وضرورية بصورة أكثر منطقية، وأن المعرفة الرياضية يتم اشتقاقها من حدسنا عن الزمان والمكان، فالتعامل مع الجبر بوصفه "علم الرموز" يسلبه الجوانب الجوهرية والأساسية التي نشأ منها[1].

وبعد مرور عشر سنوات تقريباً، قدم "وليم هاملتون" – في رسالة بعثها إلى "جون جرافيس" – الوصف التالي لرد فعله السلبي على دراسة الجبر لـ"جورج بيكوك" قائلاً:–

> عندما قرأت هذا العمل لأول مرة ... بدا لي إن المؤلف (جورج بيكوك) أراد أن يرد الجبر إلى مجرد نسق خاص بالرموز لا أكثر، ولعل هذا يشبه المقابض والعلاقات، أو جرة قلم أسود على ورقة بيضاء، أو عمل يتم وفقاً لمجموعة قوانين محددة ولكنها عشوائية، ولكني أرفض اطلاق مسمى العلم على نتائج نسق كهذا[2].

هكذا رفض "وليم هاملتون" الجبر الرمزي لدي "جورج بيكوك" بوصفه علم القوانين والرموز العشوائية، وما كان يراه أكثر ارضاء له هو النظر إلى الجبر بوصفه علم للرموز لها معنى وتحكمها مبادئ ضرورية تنبع من الحدس، بل كان يتوقع أن تكون الرياضيات كلها لها معنى وضرورية بصورة أكثر منطقية.

(1) Ibid, p. 527.

(2) Ibid, p. 528.

لم يقتصر عدم الرضا عن أفكار "جورج بيكوك" على "وليم هاملتون"؛ فقد اعترض "وليم فريند" على الجبر الرمزي لدي "جورج بيكوك"؛ حيث كان يراه حساباً كلياً ليس أكثر(1).

في المقابل أثرت نظرية "جورج بيكوك" على كثير من علماء الرياضيات ممن أيدوا نظريته في الجبر الرمزي وقاموا بإعادة تعريفه؛ فقد أيد "دنكان جريجوري" نظرية الجبر بصفته علم الرموز وأشار إلى إن الخطوة التي تم اتخاذها من الجبر الحسابي إلى الجبر الرمزي تعني – بغض النظر عن طبيعة العمليات التي تمثلها الرموز التي نستخدمها – افتراض وجود مجموعات من العمليات غير المعروفة تخضع للقوانين نفسها، وبالتالي نكون قادرين على برهنة العلاقات بين المجموعات المختلفة من العمليات والتي تسمى مبرهنات جبرية عندما يتم التعبير عنها بين الرموز(2).

كما أيده أيضًا "دي مورجان"؛ حيث رأي أن الجبر عبارة عن مجموعة من الرموز المجردة من أي معني، وعمليات يتم اجراؤها على هذه الرموز، ويتم اختيار قوانينها الأساسية بشكل عشوائي(3).

كما أثرت أراء "جورج بيكوك" على "جورج بول" – مؤسس المنطق الحديث – الذي أشار إلى إن الذي يعرفون الحالة الحاضرة لنظرية الجبر الرمزي هم على وعي بأن صحة

(1) Frend,W.: Op. Cit, p. ix.

(2) Menghini, M. (1994): Form in Algebra: Reflecting, with Peacock, on Upper Secondary School Teaching, For the Learning of Mathematics, Vol. 14, No. 3, p. 10.

(3) Ibid, p. 10.

عملية التحليل لا تقوم على تفسير الرموز المستخدمة، بل على قوانين التركيب الخاص بها فأي نسق للتفسير لا يؤثر على صدق العلاقة المفترضة يكون نسقا مقبولا بالمثل[1].

ووفقا لـ"جورج بول"، فقد كانت تلك الآراء شائعه بين المفكرين في بداية القرن التاسع عشر ومنتصفه، حيث يرى إن عد اللغة وسيلة الفكر – وليس مجرد وسيلة للتعبير عن الفكر – يُعد حقيقة مقبولة بشكل عام، وسواء أكنا ننظر للعلامات بوصفها ممثلة للأشياء ولعلاقاتها، أو بوصفها ممثلة للتصورات وعمليات الفكر الإنساني، فإننا عند دراسة قوانين العلامات، نقوم بدراسة قوانين الاستدلال الظاهرة. وقد كان هذا هو التصور الرمزي الذي تبناه "جورج بيكوك"[2]، ثم تابعه فيه علماء الجبر في كامبردج[3].

وكان هذا الاتجاه الجديد قد برهن عليه "ج. د. جيرجون" Gergonne, J. D. (١٧٧١ – 1859)، حيث رأى أنه وبالطريقة نفسها يمكن تحقيق الحساب الجبرى دون أن يكون لدى المرء أدنى فكرة عن معنى الرموز التي يتعامل معها، فمن الممكن متابعة مسار الفكر الاستدلالي دون أي معرفة بمعني الحدود التى يتم التعبير بها أو دون الإعلان عنها إذا كان المرء يعرفها[4].

---

(١) رشوان، محمد مهران: مرجع سابق، ص. ٥٥٦.

(٢) هدف "جورج بيكوك" خلال تصوره الرمزي إلى إيجاد أساس منطقي قوى يُبنى عليه الجبر، ولذا قام بتأسيس المدرسة الرمزية لعلماء الرياضيات والتي ينتمي إليها كل من "دانكان جريجوري"، "دي مورجان" و"جورج بول". أنظر في ذلك: –

- Macfarlane, A.: Op. Cit, p. 6.

(3) Detlefsen, M.: Op. Cit, p. 272.

(٤) رشوان، محمد مهران: مرجع سابق، ص. ٥٥٦.

علينا إذن أن نتجنب فهم الجبر الرمزي عند "جورج بيكوك" بمصطلحاتنا الحالية وكأنه يعد بحثاً تركيبياً صورياً في عالم الرموز، فالتصورات الحديثة في المنطق والجبر تجذبنا لأن نفهم "جورج بيكوك" بهذا الشكل، ولعل هذا قد يكون السبب الذى جعل المؤرخين ينظرون لرؤية "جورج بيكوك" بوصفها بداية تصور التركيب الجبري، الذي تم تعميمه لاحقاً في تصور "الفرد تارسكي" Alfred Tarski (١٩٠١ – ١٩٨٣) عن نظرية النموذج Model Theory عام ١٩٥٤[1]؛ والتي تُعد أحد فروع المنطق الحديث، حيث تتعامل مع العلاقة الصورية وتأويلاتها، بمعنى آخر تدرس نظرية النموذج قضايا أو جمل اللغة الصورية وتأويلاتها أو البنيات التي تجعل هذه التأويلات أو البنيات صادقة أو كاذبة وتقدم نظرية النموذج التعريفات الدقيقة للصدق، والصدق المنطقي، والنتيجة، والمعاني والموجهات. وتجسد نظرية النموذج فرعاً من الرياضيات المهتمة بالطرق التي صنفت بها البنيات الرياضية. وهذه النظرية في الرياضيات تدرس للمجموعات أو حتى الأشكال الهندسية باستخدام أدوات المنطق الحديث، وتسمى البنية التي تعطي معنى للقضايا أو الجمل من اللغة الصورية نموذجًا للغة وترتبط نظرية النموذج بالجبر ويمكن تعريفها بالمعادلة التالية: (نظرية النموذج = الجبر العام + المنطق)[2].

وهنا نجد إن المنطق الحديث يكافح للخروج الى حيز الوجود، واعياً بنسبه، ولكن وضعه ما يزال غير دقيق، إذا قيس بما سيكون عليه فيما بعد، لقد أعطى عمل "جورج بيكوك" عناية متزايدة للخواص الصورية للعمليات، ونظر "جورج بول" إلى موضوعه من هذه الزاوية، وسار على هذه النهج كثير من علماء الرياضيات اللاحقين – مثل: "دي مورجان"

---

(1) Bzaglo, M.: Op. Cit, p.17.

(٢) حامد، عبير عبد الغفار(٢٠١٠): مفهوم النموذج بين المنطق وفلسفة العلم، القاهرة: دار الثقافة، ص ص. ١٥– ١٦.

و"جراسمان" Grassmann (١٨٠٩ – ١٨٧٧) – الذين أدوا دوراً هاماً ورائداً في وضع أسس المنطق الحديث الذي شهد قمة تطوره في القرن العشرين [١].

خامساً: خاتمة

بدأت جذور التطورات الحديثة للجبر مع رفض عديد من علماء الرياضيات استخدام الأعداد والكميات السالبة أبرزهم "روبرت سيمسون"، "بارون ماسيرس"، و"وليم فريند". وقد تركزت أسباب الرفض لديهم في كونها من الأشياء السخيفة التي جاءت إلى علم الجبر؛ نظراً لغرابتها، غموضها، ولعدم وجود تعريف جيد لها، كما نتج عن استخدامها نتائج لا معنى لها.

بناءً عليه، كان وجودها سبباً في رفض علم الجبر وجعله غامضاً وصعباً بالنسبة لكل من يمارس الاستدلال الصحيح، فضلاً عن عدم استيعاب العقل لها بشكل كامل، والمطالبة بقصرها فقط على الإشارة إلى عملية الطرح، والتي خلالها يكون المطروح منه أكبر من أو يساوي المطروح.

على العكس من ذلك، رفض عديد من علماء الرياضيات البريطانيين التخلي عن الأعداد والكميات السالبة؛ حيث أيدوا بقاءها رغم إقرارهم بعدم وجود تعريف جيد لها، لعل أبرزهم "نيكولاس سوندرسون"، "وليم جرينفيلد"، "ترايل"، "روبرت وودهس"، و"جون ووكر"؛ فلم يكن لديهم صعوبة في الإقرار بأن الكمية السالبة هي كمية أقل من اللاشئ، وطالبوا بالاعتماد عليها في الجبر بدلًا من نبذها. حيث استخدموها الأعداد السالبة لوصف اتجاه ومقدار كل من الكميات المعلومة وغير المعلومة في المعادلة، كما رحبوا بتعريف الكميات السالبة بوصفها ناتجه عن طرح الكمية الأكبر من الكمية الأقل.

---

[١] رشوان، محمد مهران: مرجع سابق، ص ص. ٥٥٦ – ٥٥٧.

وإلى جانب أنصار الكميات السالبة، كانت صياغة "جورج بيكوك" للجبر الرمزي بمثابة رد على معارضي الكميات السالبة؛ حيث عالج المشكلات الرئيسة التي أثاروها؛ مثل نبذ الأعداد السلبة، عملية الطرح المقيدة، فلم يؤيدهم في نبذهم للأعداد السالبة، بل سعى إلى تطوير الجبر بحيث يتم قبول الأعداد السالبة، ومن ثم عملية الطرح غير المقيدة. وكان رده على معارضي الأعداد والكميات السالبة هو إن علم الجبر ينقسم إلى جزءين؛ الجبر الحسابي والجبر الرمزي وإنهم أخطأوا في قصر علم الجبر على الجزء الحسابي، الذي يتعامل مع الكميات الموجبة دون السالبة، وبالتالي يتم إنهاء ذلك الخلاف حول ما إذا كانت الأعداد السالبة صحيحة للاستخدام من عدمه.

وقد استخدم "جورج بيكوك" – في الجبر الرمزي – عمليات الجبر الحسابي ولكن دون القيود الحسابية المفروض عليها؛ فعلى سبيل المثال لم تعد عمليات الجمع والطرح تقتصر على كميات من النوع نفسه، كما لم يعد يلزم أن يتم طرح الأصغر من الأكبر. وعليه، استخدم "جورج بيكوك" الجبر الحسابي كـ"علم مُقترح"؛ بمعنى إنه استخدمه لاقتراح مبادئ وقوانين الجبر الرمزي، وذلك خلال مبدأ ثبات الصورة المتكافئة. ومن ثم، يعد الجبر الرمزي امتداد للجبر الحسابي، حيث أصبحت العمليات التي كانت مستحيلة التحقق في الجبر الحسابي ممكنة وصحيحة منطقياً في الجبر الرمزي، وقد سعى "جورج بيكوك" – خلال إزالة هذه القيود – إلى جعل الجبر الرمزي يتعامل مع الأعداد السالبة، وأن يكون امتداداً للجبر الحسابي، وهذا هو جوهر مبدأ ثبات الصورة المتكافئة.

وقد اختلف علماء الرياضيات في الثلاثينيات والأربعينيات من القرن التاسع عشر حول الجبر الرمزي لدي "جورج بيكوك" ما بين مؤيد ومعارض؛ فقد رفض "وليم هاملتون" و"وليم فريند" الجبر الرمزي، حيث رأي "وليم هاملتون" إن الرياضيات ذات معنى وضرورية بصورة أكثر منطقية، وأن المعرفة الرياضية يتم اشتقاقها من حدسنا عن الزمان والمكان،

فالتعامل مع الجبر بوصفه "علم الرموز" يسلبه الجوانب الجوهرية والأساسية التي نشأ منها، فالجبر الرمزي من منظور "وليم فريند" يُعد حساباً كلياً ليس أكثر.

وهكذا رفض "وليم هاملتون" الجبر الرمزي لدي "جورج بيكوك" بوصفه علم القوانين والرموز العشوائية، وما كان يراه أكثر ارضاءً له هو النظر إلى الجبر بوصفه علم الرموز ذات معني، والتي يحكمها مبادئ ضرورية تنبع من الحدس، بل كان يتوقع أن تكون الرياضيات كلها لها معنى وضرورية بصورة أكثر منطقية.

في المقابل أثرت نظرية "جورج بيكوك" على كثير من علماء الرياضيات ممن تبنوا نظريته في الجبر الرمزي وقاموا بإعادة تعريفه؛ فقد أيده "دنكان جريجوري"، "دي مورجان"، "جورج بول" وغيرهم ممن أدوا دوراً هاماً في وضع أسس المنطق الحديث الذي شهد قمة تطوره في القرن العشرين.

سادساً: قائمة المصادر والمراجع:

١ – المصادر:

- Peacock, G. (1830): A treatise on Algebra, Cambridge: J. & J. J. Deighton.
- Peacock, G. (1833): Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis Held at Cambridge 1833. In (1834): Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: John Murray, Albemarle Street, pp. 185 –352.
- Peacock, G. (1842): A treatise on Algebra, Vol. I, Arithmetical Algebra, Cambridge: J. & J. J. Deighton.
- Peacock, G. (1845): A treatise on Algebra, Vol. II, On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Positions, Cambridge: J. & J. J. Deighton.

٢ – المراجع الأجنبية:

- Bell, E. T. (1940): The Development of Mathematics, New York: McGraw Hill Pub., pp. 180-181.
- Buzaglo, M. (2002): The Logic of Concept Expansion, UK: Cambridge University Press.
- De Morgan, A. (1842): Obituary on William Frend, Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. xii, London, pp. 458 – 468.
- Detlefsen, M.: Formalism, in: Shapiro, S. (Ed.) (2005): The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic, Oxford University Press, Inc., pp. 236 – 317.
- Frend, W. (1796): Principles of Algebra, Vol. I, London: GG & J Robinson.
- Graves, R. P. (1885): Life of Sir William Rowan Hamilton including selections from his poems, correspondence, and miscellaneous writings, Vol. 2, Dublin: Hodges, Figgis and Co.
- Greenfield, W. (1788): On the use of negative quantities in the solution of problems by algebraic equations, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 1, Edinburgh: J. Dickson, pp. 131 – 145.
- Macfarlane, A.: Lectures on Ten British Mathematician of the Nineteenth Century, in: Merriman, M. & Woodward, R. S. (Eds.) (1916): Mathematical Monographs, No. 17, 1st ed., New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Maseres, F. (1758): Dissertation of the Use of the Negative Sign in Algebra. London: Samuel Richardson.
- Maseres, F. (1800): Tracts on the resolution of affected alqebraick equations by Dr. Halley`s. Mr. Raphson`s, and Sir Isaac

Newton`s, Methods of Approximation, London: J. Davis, Chancery-Lane.

- Menghini, M. (1994): Form in Algebra: Reflecting, with Peacock, on Upper Secondary School Teaching, For the Learning of Mathematics, Vol. 14, No. 3, pp. 9-14.
- Nagel, E.: Impossible numbers: A chapter in the history of modern logic, in Studies in the History of Ideas (1935), Edit by the Department of Philosophy of Columbia University, Vol. III, New York: Columbia University press, pp. 429 – 474.
- Newton, I. (1728): Universal Arithmetick; or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution, 2d ed. In: Derek T. Whiteside (Ed.) (1967): The Mathematical Works of Isaac Newton, New York, London: Johnson Reprint Corporation, Vol. 2, pp. 3-134.
- Saunderson, N. (1740): The Elements of Algebra. Cambridge: The University Press.
- Trail, W. (1796): Elements of Algebra for the Use of Students in Universities, Edinburgh: William Creech.
- Trail, W. (1812): Account of the Life and Writings of Robert Simson, Late professor of mathematics in the University of Glasgow, Bath: Richard Cruttwell.
- Valencia, V. S.: The Algebra of Logic, in: Gabbay, D. M. & Woods, J. (Eds.) (2004): Handbook of the History of logic, Vol. 3, The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege, Elsevier: North Holland.
- Walker, J. (1812): The Philosophy of Arithmetic; Considered as a Branch of Mathematical Science and the Elements of Algebra, Dublin: R. Napper.
- Woodhouse, R. (1801): On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary quantities, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 91, pp. 89 – 119.

٣ – المراجع العربية:

- حامد، عبير عبد الغفار(٢٠١٠): مفهوم النموذج بين المنطق وفلسفة العلم، القاهرة: دار الثقافة.
- رشوان، محمد مهران: المنطق في القرن العشرين، مقال منشور في كتاب: حصاد القرن؛ المنجزات العلمية والانسانية في القرن العشرين، تحرير(٢٠٠٧): جدعان، فهمي & شاهين، محمد & غصيب، همام، بيروت: المؤسسة العربية للدراسات والنشر، الطبعة الاولي، ص ص. ٥٤٧ – ٥٩٠.

Abstract:

The roots of modern developments in the field of algebra have begun with the refusal of many mathematicians to use the negative numbers and quantities, and this is due to their ambiguity and absurdity, and because there aren't sufficient definitions for them. However, George Peacock attempted to develop algebra in a way that accepts negative numbers and quantities, he said that algebra is divided into two parts: arithmetic algebra, and symbolic algebra, and he used arithmetic algebra to set the laws and principles of symbolic algebra through the principle of the permanence of equivalent forms. As a result, the processes that used to be impossible in arithmetic algebra have become possible and logically valid in symbolic algebra. George Peacock attempted to make symbolic algebra deals with negative numbers, and to make it extension for arithmetic algebra, and this is the principle of the permanence of equivalent forms. Although Peacock's symbolic algebra has raised a controversy among mathematicians, yet his theory had a great influence on many mathematicians who played an essential role in setting the bases of modern logic whose peak was reached in the twentieth century.

Descriptors: George Peacock - Negative Numbers and Quantities - Arithmetic algebra - Symbolic algebra - Principle of the Permanence of Equivalent Forms