نحو أسلوب رياضى لتقدير مخصصات الخسارة

د. محمد توفيق البلقينى   د. إبراهيم محمد مهدى   جيهان مسعد المعداوى

كلية التجارة -جامعة المنصورة   معيده

(١/١) مقدمة:

أثناء العقود الأخيرة، قد أقترح الإكتواريين طرق عديدة لحساب مخصص الخسائر تعتمد على run-off triangles. وفى كل هذه الطرق، يفترض أن كل المطالبات يتم تسويتها خلال عدد محدد لسنوات التطور وتطور الخسائر السنوية أو التراكمية عن نفس العدد لسنوات الحادث يكون معروف حتى السنة الميلادية الحالية حيث أن الخسائر يمكن تمثيلها فى مثلث run-off. وأكثر الطرق شيوعاً، طريقة chain-ladder وطريقة Bornhuetter-Ferguson. لذلك فى هذا البحث نحلل مجموعة من الطرق والنماذج الهامة لتقدير مخصص الخسارة (مخصص التعويضات تحت التسوية) باستخدام أسلوب (Run-Off Triangles).

ونقطة البداية فى هذا البحث هى استخدام أسلوب (Run-Off Triangles) تحت افتراض أن تطور الخسائر لكل سنة حادث تتبع نموذج (نمط) تطور وهو النموذج الشائع لكل سنوات الحادث. وهذا الافتراض يعتبر نموذج عشوائى أولى ويتم توضيح ذلك فيما يلى:

(٢/١) بيانات تطور الخسارة:

نفترض أن لدينا محفظة من الأخطار وأن كل مطالبة فى المحفظة يتم تسويتها إما فى سنة الحادث أو فى (n) من سنوات التطور المتتالية. ويتم وضع المحفظة إما فى خسائر سنوية أو خسائر تراكمية[1].

(١/٢/١) الخسائر السنوية: (Incremental losses)

يتم تكوين نموذج لمحفظة الأخطار من خلال الخسائر السنوية، يفترض مجموعة من المتغيرات العشوائية ($\{Z_{i,k}\}_{i,k} \in \{0,1,......,n\}$)، حيث أن المتغير العشوائى ($Z_{i,k}$) يمثل الخسارة السنوية لسنة الحادث (i) وسنة التطور (k). ويفترض أن الخسائر السنوية ($Z_{i,k}$) هى الخسائر المشاهدة للسنوات الميلادية ($i+k \le n$)، أما الخسائر غير المشاهدة تكون للسنوات الميلادية ($i+k \ge n+1$)

(٢/٢/١) الخسائر التراكمية: (Cumulative losses)

يتم تكوين نموذج لمحفظة الأخطار من خلال الخسائر التراكمية، يفترض مجموعة من المتغيرات

---

(1) - Schmidt, K. D.(2006), " Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles – A Unifying Survey," Casualty Actuarial Society Forum, PP.269-317.

- Schmidt, K. D. (2008), and Mathias Zocher " The Bornhuetter-Ferguson Principle" Casualty Actuarial Society, Variance: Advancing the Science of Risk– Volume 2, Issue 1, 85-110.

العشـــوائية($\{S_{i,k}\}_{i,k} \in \{0,1,......,n\}$)، حيـــث أن المتغير العشوائى ($S_{i,k}$) يمثل الخسارة التراكميـة لسنة الحادث (i) وسنة التطـور (k). ويفتــرض أن الخسائر التراكمية ($S_{i,k}$) هى الخســائر المشــاهدة للسنوات الميلاديـــة ($i+k \le n$)، أمــا الخســائر التراكمية غير المشاهدة تكون للســنوات الميلاديــة ($i+k \ge n+1$).

وتكون المشكلة التى تواجهنا فى التنبؤ بقيم الخســائر السنوية والتراكمية غير المشاهدة.

وتكون الخسارة التراكمية ($S_{i,k}$):

١. مشاهدة إذا كانت ($i+k \le n$).
٢. غيــر مشـــاهدة أو مســـتقبلية إذا كانـــت ($i+k > n$).
٣. حالية إذا كانت ($i+k = n$).
٤. نهائية إذا كانت ($k = n$).

وبصفة عامة: إن الهدف هو التنبؤ[1]:

١- بالخسائر التراكمية المســتقبلية: ($S_{i,k}$).
٢- بالخسائر السنوية المســتقبلية: ($Z_{i,k} = S_{i,k} - S_{i,k-1}$).
٣- بمخصصات سنة الحادث:

$$R_i := \sum_{l=n-i+1}^{n} Z_{i,l}$$

$$(i \in \{1,.........,n\})$$

٤- بمخصصــــات الســـنة الميلادية

$$R^{(n+p)} := \sum_{i=p}^{n} Z_{i,n-i+p}$$

$$(p \in \{1,.........,n\})$$

٥- بالمخصص الإجمالى:

$$R := \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=n-j+1}^{n} Z_{j,l}$$

وهذا يمكن تحقيقه بالتنبؤ بالخسائر السنوية غير المشاهدة ($Z_{i,k}$) أو بالتنبؤ بالخسائر التراكميـة غير المشاهدة ($S_{i,k}$) مع: ($i+k \ge n+1$) فى كلا الحالتين.

(١/٣) أنماط التطور وتقديرها:

(١/٣/١) أنماط التطور: (Development Patterns)

اســـتخدام (run-off Triangle) فـــى مخصصات الخسارة يفترض أن تطور الخسائر لكـل سنة حادث يتبع نموذج تطور، وهذا النموذج يكـون شائع لكل سنوات الحادث. ومن هنا يـتم التعـرض لثلاثة أنواع من أنماط التطور[2] :

(١/٣/١/١) نمط التطور للأنصبة السنوية: (Development pattern for Incremental Quotas)

نمط التطـور للأنصـبة السـنوية يقـارن الخسائر السنوية المتوقعة مـع الخســائر التراكميـة النهائية المتوقعة.

ويتضمن نمط التطور للأنصبة الســنوية المعلمــات التالية:

$(\vartheta_0, \vartheta_1, ..., \vartheta_n)$ ، حيــث أن: $\sum_{l=0}^{n} \vartheta_l = 1$ ، وهذا يطابق أن:

---

[1] Schmidt, Klaus D. July (2008), Op. ict.

[2] Schmidt, K. D., (2006), Op. ict.

$$\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

لكل: $(k \in \{0,1,.....,n\}, i \in \{0,1,....,n\})$

هـــذا الافتـــراض يعنـــى أن لأى ســـنة تطـــور $(k \in \{0,1,......,n\})$، فإن الأنصبة السنوية:

$$\vartheta_{i,k} = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

تكون متماثلة لكل سنوات الحادث

(١/٣/١/٢) نمط التطور للأنصبة التراكمية:

(Development pattern for Cumulative Quotas)

نمط التطور للأنصـــبة التراكميـــة يقـــارن الخسائر التراكمية المتوقعة مع الخســـائر التراكميـــة النهائية المتوقعة.

ويتضمن نمط التطور للأنصبة التراكمية المعلمـــات التالية: $(\gamma_0, \gamma_1, ...\gamma_n)$

حيث أن: $(\gamma_n = 1)$، وهذا يطابق أن:

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

لكل:

$(k \in \{0,1,.....,n\}, i \in \{0,1,....,n\})$

بمعنى أخر لكل $(k = 0,1,....,n)$ ولكل $(i = 0,1,........,n)$

وهـــذا الافتـــراض يعنـــى أن لأى ســـنة تطـــور $(k \in \{0,1,......,n\})$ ، فإن الأنصبة التراكمية:

$$\gamma_{i,k} = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

تكون متماثلة لكل سنوات الحادث

وهـــذه المعلمـــات يطلـــق عليهـــا أنصـــبة تطور (development quotas) أو (percentages reported).

(١/٣/١/٣) نمـــط التطـــور للعوامـــل:

(Development pattern for Factors)

نمط التطور للعوامـــل يقـــارن الخســـائر التراكمية المتوقعة المتتالية:

يتضمن نمط التطور للعوامل المعلمـــات التالية:

لكل:

$(k \in \{0,1,.....,n\}, i \in \{0,1,.....,n\})$

حيث أن:

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

لكـــــل: ($(k = 1,....,n)$ و $(i = 0,1,........,n)$)

ويطلق على هذه المعلمات عوامل تطور (age-to-age factors)

وهـــذا الافتـــراض يعنـــى أن لأى ســـنة تطـــور $(k \in \{0,1,......,n\})$، فإن العوامل:

$$\varphi_{i,k} = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

تكون متماثلة لكل سنوات الحادث

(٢/٣/١) تقدير أنماط التطور:

(١/٢/٣/١) تقدير الأنصبة:

لتقدير معالم أنماط التطور لأنصبة الخسارة السنوية أو التراكمية حيث أن المقدرات الواضحة لـــ (ϑ_k)، (γ_k) من run-off triangle هما خـــارج قسمة المشاهدات $(\frac{Z_{0,k}}{S_{0,n}})$، $(\frac{S_{0,k}}{S_{0,n}})$ على التوالى.

حيث أن:

أنصبة الخسارة السنوية الفردية الإعتبارية (empirical individual incremental quotas) كالتالى[1]:

$$\hat{\vartheta}_{0,k} = \frac{Z_{0,k}}{S_{0,n}}$$

أما بالنســـبة: (empirical individual cumulative quotas)

$$G_{i,k} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,n}}$$

حيث أن: ($G_{i,k}$ تمثل $\hat{\gamma}_{i,k}$)

$$\hat{\gamma}_{0,k} := \frac{S_{0,k}}{S_{0,n}}$$

(٢/٢/٣/١) تقدير العوامل:

لتقدير المعلمة φ_k لنمط تطور العوامـــل، فإن run-off triangle يوفر المقدر التالى[2]:

$$F_{i,k}^{-} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}$$

حيث أن:

$F_{i,k}$: (individual development factor) يمثل $\hat{\varphi}_{i,k}$

مع: $(i = 0,1,......., n-k)$

إذن:

$$\hat{\varphi}_{i,k} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}$$

ويطلق علـــى $\hat{\varphi}_{i,k}$: (empirical individual factors)

علاوة على ذلك، أي وســـط مـــرجح لهـــذه المقدرات هو مقدر جيد أيضاً.

$$\hat{\varphi}_k := \sum_{j=0}^{n-k} w_{j,k}\hat{\varphi}_{j,k}$$

مع متغيرات عشوائية (أو ثوابت) تحقق:

$$\sum_{j=0}^{n-k} w_{j,k} = 1$$

وأهم مقدر بارز من هـــذه العائلـــة الضـــخمة هـــو (chain-ladder factor).

(٣/٢/٣/١) تقـــدير عوامـــل (Chain-Ladder)

(chain-ladder factors) هـــى متوســـطات مرجحة ويمكن إستخدامها لتقدير عوامل التطور φ_k على النحو التالى:

---

(1) - Klaus D. Schmidt & Mathias Zocher (2008), "Bornhuetter–Ferguson as a General Principle of Loss Reserving" ASTIN Conference ,Manchester, July 14–16.
- Klaus D. Schmidt & Mathias Zocher (2008), "The Bornhuetter–Ferguson Principle" CAS Spring Meeting. Québec, June 17.

(2) Klaus D. Schmidt "Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey" (2006), Casualty Loss Reserve Seminar, Atlanta, September 12.

$$\hat{\varphi}_k^{CL} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالى:

$$\hat{\varphi}_k^{CL} := \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \hat{\varphi}_{j,k}$$

(٤/٢/٣/١) تقـــدير أنصــــبة (Chain-Ladder):

وتعـــــرف (chain-ladder quotas) كالتالى:

$$\hat{\gamma}_k^{CL} := \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{CL}}.$$

وتعتمد أنصبة (chain-ladder) علـــى المعلومـــات الداخلية. ويتم استخدامها لتقـــدير أنصـــبة التطـــور (γ_k).

حيث أن:

$$\gamma_k := \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\varphi_l}$$

(٤/١) تقدير مخصص الخسارة مـــن خـــلال مجموعة من الطرق تعتمـــد علـــى أســـلوب (Run-Off Triangles):

(١/٤/١) Extended Bornhuetter – Ferguson Method

يطلق عليها أيضــــاً،(Bornhuetter – Ferguson Method)، وتعتمـــد طريقـــة (EBF) علـــــــى إفتـــــــراض أنــــــــه يوجــــــــد معلمــــــــــــــــــــات $(\alpha_0,\alpha_1,......,\alpha_n)$ و $(\gamma_0,\gamma_1,.........,\gamma_n)$:[1]

مع $(\gamma_n = 1)$

$$E[S_{i,k}] = \alpha_i \gamma_k$$

لكل:

$$(k \in \{0,1,.....,n\}, i \in \{0,1,....,n\})$$

وبمـــــا أن:

$$E[S_{i,n}] = \alpha_i$$

إذن:

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$$

وتمثل المعلمات $(\gamma_0,\gamma_1,.........,\gamma_n)$ نمط تطـــور للأنصبة التراكمية.

أيضاً تعتمد طريقة (EBF) على إفتـــراض إضـــافى أن:

- المقدرات المبدئيـــة $(\hat{\gamma}_0,\hat{\gamma}_1,.........,\hat{\gamma}_n)$ لأنصبة التطور مع $(\hat{\gamma}_n = 1)$
- والمقدرات المبدئيـــة $(\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1,......,\hat{\alpha}_n)$ للخسائر التراكمية النهائية المتوقعة. حيـــث أن: $(\alpha_i := E[S_{i,n}])$، مـــع: $(i = 0,1,.......,n)$ تكون متاحة.

ويتم الحصول على المقدرات المبدئية من:

- **المعلومات الداخلية**: وهى أى معلومات يمكن الحصول عليها من خلال (-run

[1] Schmidt, K. D., and Mathias Zocher, Variance: Advancing the Science of Risk (2008), Op. ict.

(off triangle، مثـــل -Chain Ladder Factors).

- **المعلومات الخارجية:** وهى المعلومات التى يتم الحصول عليها بعيداً عن (run-off triangle)، فيمكن الحصول عليها من إحصائيات السوق أو من بيانات محافظ متشابهة.
- **Volume measures**: مثـــل (الأقساط) أو عـــدد العقـــود لمحفظـــة معينة، وهى تعد معلومـــات خارجيـــة لكونها غير موجـــودة فـــى (run-off triangle).

ويعـــرف (Bornhuetter –Ferguson predictors) للخسائر التراكمية المستقبلية ($S_{i,k}$)، حيث: ($i+k \ge n$) على النحو التالى:

$$\hat{S}^{BF}_{i,k}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i$$

ونتيجة ذلك:

- نجـــد أن (run-off triangle) يـــوفر معلومات فقط من خلال الخسائر التراكمية الحالية.
- مقدرات الخسائر التراكميـــة النهائيـــة يـــتم الحصول عليها باستخدام الاستكمال الخطى (linear extrapolation) للخســـــائر التراكمية الحالية.

(١/٤/٢) Loss-Development Method

هذه الطريقة تعتبر إمتـــداد لـــــ (Chain-Ladder Method) وأحيانـــاً يشـــار إليهـــا بــــ (generalized Chain-Ladder Method)[1].

تعتمد طريقة تطور الخسارة على إفتراض وجود المعلمات التالية[2]: $(\gamma_0,\gamma_1,\dots\dots,\gamma_n)$، مع $(\gamma_n=1)$،

وهذا يتمثل فى العلاقة التالية:

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$$

أى:

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

لكل:

$(k \in \{0,1,\dots,n\}, i \in \{0,1,\dots,n\})$

حيث أن: المعلمات $(\gamma_0,\gamma_1,\dots\dots,\gamma_n)$ تمثـــل نموذج تطور للأنصبة التراكمية.

وأيضاً تعتمد طريقة تطور الخسارة علـــى افتراض إضـــافى، وهـــو أن المقـــدرات المبدئيـــة $(\hat{\gamma}_0,\hat{\gamma}_1,\dots\dots,\hat{\gamma}_n)$ لنموذج تطـــور الأنصـــبة التراكمية تكون معلومة، وتحقق أن: $(\hat{\gamma}_n=1)$.

ولا تتضمن طريقـــة تطـــور الخســـارة أى مقدرات مبدئية للخسائر النهائية المتوقعة.

و يعـــــرف (loss-development predictors) للخســـائر التراكميـــة المســـتقبلية ($S_{i,k}$)، مـــع: $(i+k \ge n)$، كالتالى:

---

[1] Mack, Thomas (2000), "Credible Claims Reserves-The Benktander Methods,"ASTIN Bulletin 30, pp.333-347.

[2] Schmidt, K. D., and Mathias Zocher, Variance: Advancing the Science of Risk (2008), Op. ict.

$$\hat{S}^{LD}_{i,k}(\hat{\gamma}) := \hat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}$$

ويظـل تعريـف (loss-development predictors) للخسائر التراكمية المستقبلية مطابقـة للمعادلة التالية:

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k \frac{E[S_{i,n}]}{\gamma_{n-i}}$$

لذلك:

- يوفر (run-off triangle) معلومات مـن خلال الخسائر التراكمية الحالية.
- يتم الحصول علـى الخسـائر التراكميـة النهائية المتنبأ بهـا باسـتخدام المقـدرات المبدئية ($\hat{\gamma}_{n-i}$) أولاً ليـدرج الخسـائر التراكمية الحالية إلـى مسـتوى الخسـائر النهائية، ثم استخدام المقـدرات المبدئيـة ($\hat{\gamma}_k$) لتدرج القيمة الناتجة إلـى مسـتوى الخسائر التراكمية لسنة التطور (k).

من التعريف السابق:

$$\hat{S}^{LD}_{i,k}(\hat{\gamma}) := \hat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}$$

يمكـن كتابـة (loss-development predictors) كالتالى:

$$\hat{S}^{LD}_{i,k}(\hat{\gamma}) = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}$$

:Chain-Ladder Method (٣/٤/١)

تعتمد هذه الطريقة على افتـراض وجـود المعلمات التالية: $(\varphi_1,..........,\varphi_n)$ التى تنـتج من العلاقة التالية:

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

لكل:

$$(k \in \{0,1,.....,n\}, i \in \{0,1,....,n\})$$

حيـث أن: المعلمـات $(\varphi_1,..........,\varphi_n)$ تمثـل نمـط تطور للعوامل.

وتعتمد (chain-ladder method) تمامـاً على الخسائر التراكمية المشـاهدة مـن (run-off triangle) و دائماً لا تتضمن مقدرات مبدئية. وتكمن فكرة (chain-ladder method) في استبدال عوامل التطور الفردية غير المشاهدة بمتوسـطات مرجحـة (weighted means) لعوامـل التطـور الفرديـة المشاهدة للحصول على (predictors) للمطالبـات الإجمالية غير المشـاهدة أو(estimators of their expectations). حيث تكون على الصورة التالية:

المطالبات الإجمالية النهائية[1]:

$$S_{i,n} = S_{i,n-i} \prod_{k=n-i+1}^{n} F_{i,k}$$

حيث أن: $(i \in \{1,.....,n\})$

وهى عبارة عن حاصل ضرب آخر مطالبة إجماليـة مشاهدة $S_{i,n-i}$ في عوامل التطـور الفرديـة غيـر المشاهدة $(F_{i,n-i+1}\_\_\_\_F_{i,n})$.

---

[1] Klaus Th. Hess, and Klaus D. Schmidt, (2002). Op. ict.

وكمُقدرات لعوامل التطور، يتم استخدام (chain-ladder factors) على النحو التالي:

$$\hat{\varphi}_k^{CL} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

حيث أن : $\hat{\varphi}_k^{CL}$ تعرف بـــ (chain-) ladder factors لسنة التطور(k).

يعـــرف (chain-ladder Predictors) للخسائر التراكميـــة المســـتقبلية ($S_{i,k}$)، حيـــث أن: $(i+k \geq n)$ كالتالي:

$$\hat{S}_{i,k}^{CL} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^{k} \hat{\varphi}_l^{CL}$$

حيث أن:

$\hat{S}_{i,k}^{CL}$ تعـــرف بـــــ (chain-ladder Predictors) $S_{i,k}$ أو (chain-ladder estimator) لـــ $E[S_{i,n}]$.

وتتضـــمن (chain-ladder method) تدرج متتالي للخسائر التراكمية الحالية ($S_{i,n-i}$) إلى مستوى الخسائر التراكمية المستقبلية ($S_{i,k}$).

Cape-Cod Method (٤/٤/١)

تعتمد هذه الطريقة على افتـــراض وجـــود المعاملات التاليـــة: $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots\ldots\ldots, \gamma_n)$ ، مـــع $(\gamma_n = 1)$ وهذا يتمثل في العلاقة التالية[1]:

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$$

(1) Schmidt, K. D. (2006) Casualty Actuarial Society Forum, Op. ict.

أى:

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

لكل:

$$(k \in \{0,1,\ldots\ldots,n\}, i \in \{0,1,\ldots\ldots,n\})$$

حيث تمثل المعلمات $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots\ldots\ldots, \gamma_n)$: نمـــط تطور للأنصبة التراكمية.

أيضاً هذه الطريقة تعتمد علـــى افتـــراض إضـــــافي أن الأقســـــاط أو مقـــــايس الحجـــــم الأخرى: $(\pi_0, \pi_1, \ldots\ldots, \pi_n \in (0,\infty))$ (known volume measures) لسنوات الحـــادث معلومـــة، لذلك نسب الخسارة التراكمية النهائية المتوقعة:

$$\kappa_i := E[\frac{S_{i,n}}{\pi_i}]$$

حيث: $(i \in \{0,1,\ldots.,n\})$

تكون متطابقة لكل سنوات الحادث

والمقدرات المبدئية $(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \ldots\ldots\ldots, \hat{\gamma}_n)$ لنمط تطور الأنصبة التراكمية تكون معلومة، وتحقق أن: $(\hat{\gamma}_n = 1)$.

و لذلك يعرف (Cape-Cod predictors) للخسائر التراكمية المستقبلية، مع $(i+k \geq n)$ على النحو التالي[2] :

$$\hat{S}_{i,k}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}) := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\pi_i \hat{\kappa}^{CC}(\pi,\hat{\gamma})$$

حيث:

$$\hat{\kappa}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}) := \frac{\sum_{i=0}^{n} S_{i,n-i}}{\sum_{i=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-i}\pi_i}$$

وهى تمثل تقدير للمعلمة (κ)

(2) Schmidt, K. D. (2006), Casualty Actuarial Society Forum, Op. ict.

($\hat{K}^{CC}(\pi,\hat{\gamma})$) و للاختصار تكتب $\hat{K}^{CC}$ وهـي: تمثـل (Cape-Cod loss ratio)، التـي تعتبـر (estimator of the expected ultimate cumulative loss ratio) لكل سنوات الحادث.

ويظل تعريف (Cape-Cod predictors) مطـابق للعلاقة التالية[1]:

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,n-i}] + (\gamma_k - \gamma_{n-i})\,\pi_i\,\kappa$$

وهذه نتيجة لافتراض النموذج.

وبوضع:

$$(\hat{\alpha}_i^{CC} := \pi_i \hat{\kappa}^{CC})$$

ومن ثم يمكـن كتابـة (Cape-Cod predictors) على النحو التالي:

$$\hat{S}_{i,k}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}) := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\,\hat{\alpha}_i^{CC}(\pi,\hat{\gamma})$$

ومع:

$$\hat{\alpha}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}) := (\hat{\alpha}_0^{CC}(\pi,\hat{\gamma}), \hat{\alpha}_1^{CC}(\pi,\hat{\gamma}), ..., \hat{\alpha}_n^{CC}(\pi,\hat{\gamma}))$$

فنحصل على:

$$(\hat{S}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}) = (\hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}))$$

وبالتالي فإن: (Cape-Cod predictors) فيما يتعلق بـ (π) و ($\hat{\gamma}$) ما هي إلا (extended Bornhuetter-Ferguson predictors) فيمـا يتعلق بـ ($\hat{\gamma}$) و (($\hat{\alpha}^{CC}(\pi,\hat{\gamma})$). بمعنـى آخـر (Cape-Cod method) هي حالـة خاصـة مـن (extended Bornhuetter-Ferguson method) باستخدام المقدرات المبدئية للخسائر التراكمية النهائية المتوقعة التي تعتمد على كلاً من المعلومات الداخلية والخارجية.

:Additive Method (٥/٥/٣)

يطلق عليها أيضـاً (incremental loss ratio method) وتعتمد هذه الطريقة على افتراض وجود المعلمات المعلومة التالية[2]:

$$(\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n \in (0,\infty)).$$

والمعلمـات المجهولـة

$$\zeta(\pi) = (\zeta_0(\pi), \zeta_1(\pi), ..., \zeta_n(\pi)))$$

حيث تحقق العلاقة التالية:

$$E[Z_{i,k}] = \pi_i \zeta_k(\pi)$$

لكل:

$$(k \in \{0,1,......,n\}, i \in \{0,1,....,n\})$$

إذا كانـت المعلمـات ($\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n$): تمثل الأقسـاط لسـنوات الحادث، فإن هذا الافتراض يعنـي أن لكـل سـنة تطور(k) تكون نسبة الخسارة (معدل التعويضـات) السنوية المتوقعة (expected incremental loss ratio)[3]:

$$\zeta_k := E\left[\frac{Z_{i,k}}{\pi_i}\right]$$

تكون متطابقة لكل سنوات الحادث

حيث أن:

المتجه:

(1) Schmidt, K. D., and Mathias Zocher (2008), Variance: Advancing the Science of Risk. Op. ict.

(2) Schmidt, K. D. (2006) Casualty Actuarial Society Forum. Op. ict.

(3) Klaus D. Schmidt & Mathias Zocher, June 17, (2008), Op. ict.

$$(\zeta(\pi):=(\zeta_0(\pi),\zeta_1(\pi),......,\zeta_n(\pi)))$$

يمثل نمط تطور نسب الخسارة السنوية،

والمتجه $\gamma(\pi):=\left(\gamma_0(\pi),\gamma_1(\pi),......,\gamma_n(\pi)\right)$

يمثل نمط تطور الأنصبة التراكمية.

حيث أن:

$$\gamma_k(\pi)=\frac{\sum_{l=0}^{k}\zeta_l(\pi)}{\sum_{l=0}^{n}\zeta_l(\pi)}$$

ويوضع:

$$\alpha_i:=\pi_i\sum_{k=0}^{n}\zeta_k$$

نحصل على:

$$\mathrm{E}[S_{i,k}]=\gamma_k\alpha_i$$

لكل

$$\left(k\in\{0,1,.....,n\},i\in\{0,1,....,n\}\right)$$

،

$$\alpha_i=\mathrm{E}[S_{i,n}]$$

ويعرف (additive predictors) للخسائر السنوية ($Z_{i,k}$)،حيث أن: ($i+k\geq n$) على النحو التالي:

$$\hat{Z}_{i,k}^{AD}:=\hat{\zeta}_k^{AD}\pi_i$$

ويعرف (additive predictors) للخسائر التراكمية ($S_{i,k}$)، حيث أن: ($i+k\geq n$)على النحو التالي[1]:

$$\hat{S}_{i,k}^{AD}(\pi):=S_{i,n-i}+\sum_{l=n-i+1}^{k}\hat{Z}_{i,l}^{AD}$$

$$\hat{S}_{i,k}^{AD}(\pi):=S_{i,n-i}+\pi_i\sum_{l=n-i+1}^{k}\hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)$$

وبالتالي (additive incremental loss ratio) تكون على النحو التالي:

$$\hat{\zeta}_k^{AD}(\pi):=\frac{\sum_{j=0}^{n-k}Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k}\pi_j}$$

ويوضع:

$$\hat{\gamma}_k^{AD}(\pi):=\frac{\sum_{l=0}^{k}\hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)}{\sum_{l=0}^{n}\hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)}$$

فإن:

$$\hat{\alpha}_i^{AD}(\pi):=\pi_i\sum_{l=0}^{n}\hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)$$

ومن ثم يمكن كتابة (additive predictors) للخسائر التراكمية غير المشاهدة على النحو التالي:

$$\hat{S}_{i,k}^{AD}(\pi):=S_{i,n-i}+\left(\hat{\gamma}_k^{AD}(\pi)-\hat{\gamma}_{n-i}^{AD}(\pi)\right)\hat{\alpha}_i^{AD}(\pi)$$

ومع:

$$\hat{\gamma}^{AD}(\pi):=\left(\hat{\gamma}_0^{AD}(\pi),\hat{\gamma}_1^{AD}(\pi),........,\hat{\gamma}_n^{AD}(\pi)\right)$$

$$\hat{\alpha}^{AD}(\pi):=\left(\hat{\alpha}_0^{AD}(\pi),\hat{\alpha}_1^{AD}(\pi),..........,\hat{\alpha}_n^{AD}(\pi)\right)$$

---

[1] Schmidt, K. D., and Mathias Zocher, Variance: Advancing the Science of Risk (2008). Op. ict.

فنحصل على:

$$\hat{S}^{AD}(\pi) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}^{AD}(\pi), \hat{\alpha}^{AD}(\pi))$$

وبالتالى (additive predictors) للخسائر التراكمية ما هو إلا (extended Bornhuetter-Ferguson method) مع $(\hat{\gamma}^{Ad}(\pi))$ (additive cumulative quotas) والمقدرات المبدئية للخسائر التراكمية النهائية المتوقعة $(\hat{\alpha}^{Ad}(\pi))$.

ومن الملاحظ أن، (additive predictors) تماثل (Cape-Cod predictors) لأنها تعتمد على الحجم النسبى لمقايس الحجم لسنوات الحادث المختلفة.

علاوة على ذلك، فإن:

$$(\hat{\alpha}^{AD}(\pi) = \hat{\alpha}^{CC}(\pi, \hat{\gamma}^{AD}(\pi)))$$

وبالتالى (additive method) فيما يتعلق بـ (π) تتطابق مع (Cape-Cod method) فيما يتعلق بـ (π) و$(\hat{\gamma}^{Ad}(\pi))$.

وتكون نسب الخسارة التراكمية المتوقعة على النحو التالى[1]:

$$K_i := \mathrm{E}\left[\frac{S_{i,n}}{\pi_i}\right]$$

وتحقق أن:

$$K_i = \sum_{l=0}^{n} \zeta_{i,l}$$

ونتيجة لأن نسب الخسارة السنوية المتوقعة تكون متطابقة لكل سنوات الحادث، فإن نسب الخسارة التراكمية المتوقعة تكون متطابقة أيضاً لكل سنوات الحادث. وبالتالى (additive loss ratio):

$$\hat{K}^{AD} := \sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{AD}$$

يمكن تفسيرها على أنها مقدر لنسبة الخسارة التراكمية النهائية المتوقعة:

$$K = \sum_{l=0}^{n} \zeta_l$$

وتكون شائعة لكل سنوات الحادث

علاوة على ذلك، المقدرات المبدئية $(\hat{\alpha}_i^{AD})$ تكتب على النحو التالى:

$$\hat{\alpha}_i^{AD} := \pi_i \hat{K}^{AD}$$

حيث أن:

$$\hat{K}^{AD} = \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{i,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-j}^{AD} \pi_j}$$

وهذا يثبت أن (additive predictors) للخسائر التراكمية غير المشاهدة ما هى إلا (Cape-Cod predictors) فيما يتعلق $(\hat{\gamma}_k^{AD})$ وهى (additive cumulative quotas). بمعنى آخر، (additive method) هى حالة خاصة من (Cape-Cod method) فيما يتعلق بالمقدرات المبدئية للأنصبة التراكمية التى تعتمد على كلاً من المعلومات الداخلية والخارجية.

النتائج

لقد أسفرت الدراسة عن النتائج التالية:

١- يعتبر نموذج (Bornhuetter-Ferguson) قاعدة عامة لمقارنة مجموعة من الطرق الرياضية المستخدمة فى حساب مخصص الخسارة والتى تعتمد على (run-off triangle)، وذلك فى ضوء التقديرات الأولية للخسائر النهائية المتوقعة والتقديرات الأولية لأنصبة تطور الخسائر التراكمية، وتعطى (predictors) للخسائر

[1] Schmidt, K. D.(2006), Casualty Actuarial Society Forum, Op. ict.

النهائية لهذه الطرق شكل (Bornhuetter-Ferguson predictors)، ومن خلال هذه الطرق يتم تقييم ومقارنة (predictors) الناتجة من أجل التوصل إلى أفضل (predictors) وتحديد مدى التنبؤ بالاعتماد على مصادر المعلومات المختلفة ولمقارنة المحفظة التأمينية تحت مجموعة من اعتبارات السوق.

٢- يتم تقدير مخصص الخسارة من خلال التنبؤ بالخسائر التراكمية النهائية ومخصصات سنة الحادث.

٣- يوجد تفاوت ملحوظ بين التقديرات الأولية لأنصبة تطور الخسائر التراكمية.

٤- التقديرات الأولية للخسائر النهائية المتوقعة كانت متماثلة في الطرق الآتية:

- (Bornhuetter-Ferguson)
- (Chain-Ladder Quotas / Prior Ultimates)
- (Prior Ultimate/ Additive Quotas)

٥- قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-L) بمعلومية عوامل التطور ($\hat{\varphi}_k^{CL}$) تماثل قيم الخسائر التراكمية المتوقعة باستخدام طريقة (C-L) بمعلومية أنصبة التطور ($\hat{\gamma}_k^{CL}$).

٦- بالرغم من استخدام قاعدة واحدة في حساب مخصص الخسارة وهي قاعدة (B-F)، إلا انه مع تغيير أنصبة تطور الخسائر التراكمية أو الخسائر النهائية المتوقعة أو الاثنين معاً نحصل على طريقة جديدة مشتقة من هذه القاعدة، تعطي قيمة مختلفة لمخصص الخسارة.

٧- بتطبيق هذه النماذج على فرع تأمين الحريق وجد أن أنسب طريقة هي (loss-development ultimates/ additive quotas)، بينما كانت في فرع تأمين الطيران (chain ladder)، بينما كانت في فرع تأمين السيارات الإجباري (loss-development ultimates).

المراجع

Benktander,G. (1976), "An Approach to Credibility in Calculating IBNR for Casualty Excess Reinsurance" Actuarial Review 3:2, p. 7.

Bornhuetter, R. L., and R. E. Ferguson (1972), "The Actuary and IBNR" Proceedings of the Casualty Actuarial Society 59, pp. 181-195.

Chaoxiong (Michelle) Xia (2007), "A Bayesian Mixture model for Zeros and Negative in Stochastic Reserving", thesis of master degree, University of Calgary.

Colin M. Ramsay (2005), "A new method of estimating loss reserves" Proceedings of the Casualty Actuarial Society , Volume XCII, Numbers 176-177, pp. 462-485.

Daniel Cheung (1997),"Estimating IBNR reserves with robust statistics", A Dissertation of Ph.D, Western Michigan University.

Methods", ASTIN Bulletin 30, pp.333-347.

Rafat A. Ibrahim and Osama H. Mahmoud (2006), "A Comparison of Statistical Models that Reproduce Loss Reserve Estimates", Journal of Management and Accounting, Cairo university, pp 205-237.

Robert L. Brown (2001), " Introduction to ratemaking and loss reserving for property and casualty insurance", Second Edition, ACTEX publication, Inc., pp 109-150.

Schmidt K. D. and Mathias Zocher (2008), "The Bornhuetter-Ferguson Principle" Casualty Actuarial Society, Variance: Advancing the Science of Risk– Volume 2, Issue 1, 85-110.

Schmidt Klaus D. (2008) "Bornhuetter-Ferguson as a General Principle of Loss Reserving", ASTIN Bulletin, July 2008.

Schmidt, K. D. (2006), "Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles – A Unifying Survey", Casualty Actuarial Society Forum, PP. 269-317.

Statement of Principles Regarding Property and Casualty Loss and Loss Adjustment Expense reserve (1988), (CAS), PP10-16, Appendix 2.

Verrall R. J. (1989)," A state space representation of chain ladder linear model", Journal of institute of Actuaries, 116, 589-610.

Foundations of Casualty Actuarial Science (2001), Fourth Edition, Casualty Actuarial Society, Chapter 5, pp. 197-280.

Hess, K laus T h. a nd S chmidt, Klaus D. (2002), "A Comparison of models for the chain- ladder method", Insurance: Mathematics and Economics, 31, 351-364.

Hovinen, E. (1981), "Additive and Continuous IBNR" paper presented at the International ASTIN Colloquium, Loen, Norway.

Klaus D. Schmidt (2006), "Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey" Casualty Loss Reserve Seminar, Atlanta, September 12.

Klaus D. Schmidt and Mathias Zocher (2008), "Bornhuetter–Ferguson as a General Principle of Loss Reserving" ASTIN Conference, Manchester, July 14–16.

Klaus D. Schmidt and Mathias Zocher (2008), "The Bornhuetter–Ferguson Principle" CAS Spring Meeting, Québec, June 17.

Kloek T. (1998), "Loss development forecasting models: an econometrician's view", Insurance: Mathematics and Economics, v. 23, pp. 251-261.

Lorenz, Holger, and Klaus D. Schmidt (1999), "Grossing-up, chain ladder and marginal-sum estimation", Blatter DGVM, Vol. 24, 195-200.

Mack T. (2000), "Credible Claims Reserves-The Benktander

Verrall R. J. (1994), " Statistical Methods for the Chain Ladder Technique", Casualty Actuarial Society Forum, pp 393-446.

Zhongxian Han and Wu-Chyuan Gau (2008), "Estimation of loss reserves with lognormal development factors" Insurance: Mathematics and Economics, 42, 389-395.