

تكوين لوحة سيطرة (خريطة التحكم) باستعمال نموذج فضاء الحالة لبيانات ذات توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعم

د. هيفاء عبدالجواد سعيد* د. دلشاد شاكر اسماعيل بوتاني**

عدنان مصطفى حسين السنجاري**

المستخلص

إن الغرض الرئيسي من هذا البحث هو تكوين لوحة للسيطرة على كل من المعدل والتباين معاً لبيانات تتبع توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعم باستعمال نموذج فضاء الحالة (State Space Model) وذلك من خلال استعمال سلسلة عوامل بيز (Bayes' factors)، حيث يتم تكوين اللوحة عندما يكون متجه المعلمات غير معلوم ومصنوفة التباين معلومة. بعد ذلك يتم رسم سلسلة هذه العوامل على اللوحة المحورة لـ EWMA أحادية المتغير بعد أن يتم فرض أن السلسلة تتبع نموذج ARMA(1,1). أخيراً يتم تطبيق النموذج المفترض على البيانات المولدة.

الكلمات المفتاحية: نموذج فضاء الحالة، عوامل بيز، EWMA المحورة، ARMA، توزيع بسل.

Construction of a Control Chart Using SSM for Generalized Multivariate Modified Bessel Distribution Data

Abstract

The main purpose of this research is to construct a chart for controlling the mean and variance together of a data distributed generalized multivariate modified Bessel distribution using State Space Model (SSM) through applying Bayes' Factors (BF). The constructed control chart will undertake the case when parameters' vector is unknown and variance matrix is known. Then, drawing the series of these factors on the univariate modified EWMA chart after assuming that the series has an ARMA(1,1) model. Finally, applying assumed model on simulated data.

Keywords: State Space Model, Bayes' Factors, Modified EWMA, ARMA, Bessel Distribution.

١ - المقدمة

يعتبر موضوع السيطرة النوعية (Control quality) من المواضيع بالغة الأهمية في علم الإحصاء الحديث، وذلك لأنه فرع الإحصاء المسؤول عن اتخاذ القرار بوقف العملية الإنتاجية أو استمرارها، ومن أشهر الأساليب الإحصائية في السيطرة النوعية أسلوب لوحات السيطرة (Control chart).

فتح العالم الأمريكي والتر شيوارت (Walter Shewhart) باب تكوين اللوحات الإحصائية في عشرينيات القرن الماضي، حيث درس لوحة السيطرة لمتغير واحد بفرض الاستقلال والتوزيع الطبيعي، ومنذ ذلك الوقت توالى التطورات الكبيرة في هذا الجانب، حيث أن بعض الباحثين طوروا اللوحة لتشمل بيانات فيها نوعاً ما بعض الارتباط، وقام آخرون بتكوين لوحات سيطرة تتضمن عدة متغيرات كما قام آخرون بتكوين لوحات في حالة عدم توفر شرط التوزيع الطبيعي.

إن شرط طبيعية البيانات يعد من أكثر الشروط والافتراضات صعوبة وذلك لأن في كثير من الأحيان تحتوي البيانات على قيم شاذة (Outliers)، ولتلافي هذا الخرق في الافتراضات التي بنيت على أساسها اللوحات، سيتم في هذا البحث تكوين لوحات سيطرة لبيانات في حالة عدم توفر شرط الطبيعية وذلك باستعمال نموذج فضاء الحالة (State space) مع أسلوب بيز المتسلسل، حيث سيتم استعمال بيانات تتبع التوزيعات المختلطة (Mixed distributions) والتي تحتوي على جزء من البيانات الطبيعية والجزء الآخر هو عبارة عن بيانات شاذة، ومن هذه التوزيعات توزيع t متعدد المتغيرات.

تم استعمال نموذج فضاء الحالة في تكوين اللوحات من قبل العديد من الباحثين، حيث قام الباحثان سميث وويست في مطلع ثمانينيات القرن الماضي [14] بمراقبة السلاسل الزمنية في الجانب الحياتي عن طريق مرشح كالمن، وقام الباحث ويست [16] باستعمال أسلوب بيز مع النماذج الحركية في تكوين التوزيع التنبؤي لتوزيعات العائلة الأسية ومن ثم مقارنته مع النموذج البديل ومن ثم استعماله في المراقبة، كما استعمل الباحث جليل [8] النماذج الديناميكية الخطية في دراسة تتعلق بالسيطرة على العملية الإنتاجية لغرض اتخاذ القرار، وقام الباحث أبو ناقوس [1] بدراسة تناول فيها تكوين لوحة السيطرة النوعية أطلق عليها لوحة بيز، حيث اعتمد على إحصاء بيز والنماذج الديناميكية الخطية لغرض السيطرة على معدل نوعية المادة المنتجة، كما قامت الباحثة الرسام [2] بتكوين ثلاث لوحات إحداها للسيطرة على الانحراف المعياري وهذه تعتبر مكملة لعمل أبو ناقوس والثانية للسيطرة على الانحراف المعياري والمعدل معاً والثالثة هي لوحة ثنائية البعد للسيطرة على معدلين لصفتين بالاستناد إلى النموذج الديناميكي، وقام الزبيدي [3] بتكوين لوحتين خاصتين

بالسيطرة على الصفات النوعية وبالتحديد تكوين لوحة بيز لنسبة المعيب (p-chart)، وتكوين لوحة بيز لعدد العيوب المقابلة للوحة شيوارت لعدد العيوب (c-chart) وذلك من خلال استعمال أسلوب بيز مع النماذج الحركية العامة في تكوين هذه اللوحات الجديدة، كما قام الباحثان سلفادور وكاركالوب [12] بدراسة النموذج الحركي الخطي في حالة كون الأخطاء تتبع توزيع (Matrix Normal)، وقد اعتمد على عامل بيز (Bayes' factor) في المقارنة بين نموذجين ومن ثم استعماله في المراقبة (Monitoring)، وفي نفس العام قام الباحثان بان وجاريت [11] بتكوين لوحة متعددة المتغيرات باستعمال نموذج فضاء الحالة وذلك بالاعتماد على لوحة هوتلينغ (Hotelling's) للأخطاء، وقام الباحث كوستاس [15] بتطوير لوحة سيطرة متعددة المتغيرات باستعمال نموذج فضاء الحالة الخطي لبيانات تتبع التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات.

القسم الثاني من هذا البحث يركز على توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم (Generalized Multivariate Modified Bessel) وعلاقته مع التوزيع الطبيعي، بينما وضع القسم الثالث نموذج فضاء الحالة، في حين القسم الرابع اختص بإيجاد مرشحات للمعلمات وكذلك إيجاد توزيعات الأخطاء التنبؤية. بعد ذلك قدم القسم الخامس عامل بيز، كما وضع القسم السادس لوحة EWMA، والقسم السابع فقد خصص لتطبيق الأقسام السابقة له، فيما تضمن القسم الثامن أهم الاستنتاجات والتوصيات، وكان القسمين الأخيرين للمصادر والملاحق.

٢- توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم

في الكثير من الأحيان يعتبر توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم بديلاً جيداً عن التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات وخاصة إذا احتوت البيانات على بعض القيم الشاذة أو لكون المشاهدات تمتلك توزيعات ذات ذيول ثقيلة (Heavy-tailed) بمعنى أن لها نهايات توول إلى الصفر بسرعة بالمقارنة مع التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات، على سبيل المثال فيما يتعلق الأمر بالبيانات الاقتصادية والتجارية والصناعية وبالأخص بدراسة الموارد المالية وأسعار الأسهم المالية، فإن النمذجة باستعمال التوزيع الطبيعي ستكون على حساب الدقة في التحليل الإحصائي [4].

يمكن التعبير عن توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم بكونه توزيعاً خليطاً من التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات وتوزيع معكوس غاوس المعمم (Generalized Inverse Gaussian) وكالاتي [4]:

$$p(\underline{X}) = \int_0^{\infty} p(\underline{X}|w)p(w)dw \quad \dots (1)$$

حيث أن w متغير عشوائي يتبع توزيع معكوس غاوس المعمم (GIG) بالمعلمات (α, β, φ) وكما يأتي:

$$p(w) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\varphi}{2}}}{2M_{\varphi}(\sqrt{\alpha\beta})} w^{\varphi-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{w} + \alpha w\right)} \quad \dots (2)$$

كما أن المتجه العشوائي \underline{X} المشروط بالمتغير العشوائي w يتبع توزيع طبيعي متعدد المتغيرات والذي يوصف بالشكل الآتي:

$$\underline{X}|w \sim N_p(\underline{\theta}, w\Sigma)$$

وبالاعتماد على المعادلة (1)، فإنه بالإمكان إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتجه \underline{X} غير المشروط بـ w وكما يأتي:

$$p(\underline{X}) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\varphi}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} 2M_{\varphi}(\sqrt{\alpha\beta})} \int_0^{\infty} w^{\varphi-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{w} + \alpha w\right)} e^{-\frac{1}{2w}(\underline{X}-\underline{\theta})' \Sigma^{-1}(\underline{X}-\underline{\theta})} dq$$

بعد القيام بعدة عمليات رياضية ينتج:

$$p(\underline{X}) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\varphi}{2}} |\Sigma_{\varepsilon}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} M_{\varphi}(\sqrt{\alpha\beta})} \left[1 + \frac{(\underline{X}-\underline{\theta})' \Sigma^{-1}(\underline{X}-\underline{\theta})}{\beta} \right]^{\frac{2\varphi-p}{4}} \times M_{\left(\frac{2\varphi-p}{2}\right)} \left(\sqrt{\alpha\beta \left(1 + \frac{(\underline{X}-\underline{\theta})' \Sigma^{-1}(\underline{X}-\underline{\theta})}{\beta} \right)} \right)$$

حيث أن:

\underline{X} : متجه عشوائي ذو سعة $(p \times 1)$ وأن $-\infty < x < \infty$.

$\underline{\theta}$: متجه المتوسط ذو سعة $(p \times 1)$ وأن $-\infty < \theta < \infty$.

Σ : مصفوفة أكيدة الإيجابية (Positive Definite)، ذات سعة $(p \times p)$.

p : تمثل عدد المتغيرات.

α, β, φ : تمثل معاملات الشكل.

ويعبر عن هذا التوزيع وصفيًا بالشكل الآتي:

$$\underline{X} \sim \text{GMMB}_p(\underline{\theta}, \Sigma, \alpha, \beta, \varphi) \quad \dots (3)$$

يمتاز توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم إضافة إلى كونه من التوزيعات المتماثلة (Symmetric Distribution) بأنه يمتلك الخاصية الخطية (Linearity Property)، بمعنى أنه إذا كان \underline{X} موصوفاً كما في العلاقة (3) عندئذ فإن التركيبة الخطية $(C\underline{X} + \underline{d})$ ستكون موصوفة بالشكل الآتي [4]:

$$(C\underline{X} + \underline{d}) \sim \text{GMMB}_p(C\underline{\theta} + \underline{d}, C\Sigma C', \alpha, \beta, \varphi)$$

حيث أن:

C : مصفوفة ثابتة ذات سعة $(m \times p)$ وبرتبة (Rank) مساوية لـ m ، إذ أن m عدد صحيح موجب أقل أو يساوي p .

\underline{d} : متجه ثابت ذو سعة $(m \times 1)$.

٣- نموذج فضاء الحالة

يقصد بفضاء الحالة (State space) هو كمية الحالات الممكنة التي يحتويها نظام حركي، وتوصف الحالة (State) بواسطة مجموعة المتغيرات للنظام عند نقطة زمنية معينة، أو هو نظام حركي يشير إلى تقليل مجموعة المتغيرات المعروفة بمتغيرات الحالة (State variables) ويصور تماماً النظام ويستجيب لكل مجموعة من المدخلات (Input)، أما حالة النظام (System state) فتعني أقل مجموعة معلومات عن الماضي والحاضر يمكن من خلالها وصف السلوك المستقبلي لنظام ما وصفاً كاملاً عند معرفة الحالة في الحاضر ومدخلات المستقبل، حيث يتم دمج كل المعلومات الماضية في متغيرات الحالة الحالية، وهذا يجعلها تخضع للخاصية الماركوفية (Markovian property)، أي أن التوزيع الاحتمالي الشرطي لمتغير الحالة عند الزمن t معطى لجميع الحالات الماضية يعتمد فقط على حالته عند الزمن $t-1$. أما نموذج فضاء الحالة (State Space Model) فهو عبارة عن نموذج ديناميكي يربط بين المتغير المشاهد ومتغير الحالة.

إن أول من قام باستعمال نماذج فضاء الحالة هو العالم الأمريكي كالمن (Kalman) في عام ١٩٦١ وقد قام بتكوين هذه النماذج بالاعتماد على المعادلات الفرقية (Difference equations) والمعادلات التفاضلية (Differential equations) واستعملها وقتئذ في نظم السيطرة (Control system) الكهربية [7]. أما في المجال الإحصائي فكان أول من استعمل هذه النماذج هو العالم الياباني اكاكي (Akaike) عام ١٩٧٤، حيث طبق لأول مرة مفهوم نماذج فضاء الحالة لتحليل نموذج الانحدار الذاتي- الأوساط المتحركة (ARMA) [5].

يتكون نموذج فضاء الحالة من معادلتين المعادلة، الأولى تصف متجه المخرجات تسمى معادلة القياس (Measurement equation) أو معادلة المشاهدة (Observed equation)، والثانية تصف متجه المدخلات تسمى معادلة الحالة (State equation) أو معادلة النظام (System equation). تحتوي كل معادلة من هاتين المعادلتين على أخطاء، حيث يسمى الخطأ في معادلة المشاهدة بخطأ المشاهدة، بينما يسمى الخطأ في معادلة الحالة بخطأ الحالة أو خطأ النظام، وتكون هذه الأخطاء غير مترابطة فيما بينها ومستقلة أيضاً عن متجه الحالة.

في هذا البحث سنقوم بتكوين لوحات سيطرة استناداً إلى نموذج فضاء الحالة الخطي ذي الزمن المنقطع عندما تكون الأخطاء العشوائية لها توزيع t متعدد المتغيرات، وفيما يأتي النموذج المستعمل:

$$\underline{X}_t = F\underline{\theta}_t + \underline{\varepsilon}_t \quad \dots (4)$$

$$\underline{\theta}_t = G\underline{\theta}_{t-1} + \underline{\omega}_t \quad \dots (5)$$

for $t=1,2,3,\dots,n$

إذ أن:

$$\underline{\varepsilon}_t \sim \text{GMMB}_p(\underline{0}, \Sigma_{\underline{\varepsilon}}, \alpha, \beta, \varphi)$$

$$\underline{\omega}_t \sim \text{GMMB}_p(\underline{0}, \Sigma_{\underline{\omega}}, \alpha, \beta, \varphi)$$

حيث أن:

X_t : يمثل متجه متغيرات المشاهدة عند الزمن t ، ذو سعة $(p \times 1)$ ، ويمثل p عدد المتغيرات المشاهدة.

θ_t : يمثل متجه معلمات النموذج، ذو سعة $(p \times 1)$.

F : تمثل مصفوفة الانحدار، وتكون عبارة عن مصفوفة ثابتة ذات سعة $(p \times p)$.

G : تمثل مصفوفة الحالة، وتكون عبارة عن مصفوفة ثابتة ذات سعة $(p \times p)$.

ε_t : يمثل متجه خطأ المشاهدة، ذو سعة $(p \times 1)$.

ω_t : يمثل متجه خطأ الحالة، ذو سعة $(p \times 1)$.

Σ_{ε} : تمثل مصفوفة التباين لخطأ المشاهدة وتكون أكيدة الإيجابية، ذات سعة $(p \times p)$.

Σ_{ω} : تمثل مصفوفة التباين لخطأ الحالة وتكون أكيدة الإيجابية، ذات سعة $(p \times p)$.

v : تمثل درجة الحرية للتوزيع، وتكون قيمة صحيحة موجبة (Scale).

٤- ترشيح المعلمات

يعرف الترشيح بأنه التقدير عند الزمن t ، ومن أهم المرشحات التي تستخدم مع نموذج فضاء الحالة هو مرشح كالمن (Kalman filter) وهو عبارة عن مرشح كَوْن خصباً من قبل العالم رودولف كالمن في عام ١٩٦٠ للسيطرة على عدم الاستقرار التي تعاني منها الكثير من الإشارات الواقعية وتم تطويره على يد ريتشارد بوسي (Richard Bucy) عام ١٩٦١، ولذلك سمي في بعض الأحيان بمرشح كالمن - بوسي. يعتبر مرشح كالمن من أهم المرشحات الموجودة في هذا الجانب لكونه يمتاز بالخاصية التعااقبية، بمعنى يمكننا من خلال هذا المرشح الاستفادة من المعلومات والبيانات عند تغيير الزمن، كما أنه لا ينبغي أن تكون جميع البيانات متوفرة، وبذلك فإنه يستخدم في نظم السيطرة والاتصالات وغيرها [7]. في هذا القسم سيتم ترشيح المعلمات عندما يكون متجه المعلمات غير معلوم ومصفوفة التباين معلومة وكذلك مصفوفة أخطاء النظام Σ_{ω} ومعلمات الشكل معلومة، وذلك تمهيداً لإيجاد التوزيع التنبؤي الذي يعتبر الأساس في تكوين عوامل بيز.

التوزيع الأولي لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$ المشروط بالمتغير العشوائي w عند الزمن صفر يوصف بالشكل الآتي [17]:

$$\underline{\theta}_0|w \sim N_p(\underline{\mu}_{0|0}, w\Sigma_{0|0})$$

حيث أن كل من $\underline{\mu}_{0|0}$ و $\Sigma_{0|0}$ هما على الترتيب متجه المتوسط الابتدائي ومصفوفة التباين الابتدائية وتكونان معلومتين، وأن w يتبع توزيع معكوس غاوس المعمم (GIG). باستعمال الاستقراء الرياضي ونظرية بيز نجد أن التوزيع اللاحق لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$ عند الزمن $t-1$ يعبر عنه وصفيًا وفق الصيغة الآتية:

$$(\underline{\theta}_{t-1}|w, X^{t-1}) \sim N_p(\underline{\mu}_{t-1|t-1}, w\Sigma_{t-1|t-1}) \quad \dots (6)$$

$$X^{t-1} = \{\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_{t-1}\}$$

للحصول على التوزيع اللاحق المشروط بـ w لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$ عند الزمن t يتم استعمال نظرية بيز وكما يأتي:

$$p(\underline{\theta}_t|w, X^t) \propto p(\underline{X}_t|\underline{\theta}_t, w)p(\underline{\theta}_t|w, X^{t-1}) \quad \dots (7)$$

حيث أن $p(\underline{X}_t|\underline{\theta}_t, w)$ تمثل دالة الترجيح (Likelihood function) التي يتم الحصول عليها من المعادلة (4) باستعمال الخاصية الخطية في التوزيع الطبيعي فينتج:

$$p(\underline{X}_t|\underline{\theta}_t, w) \propto e^{-\frac{1}{2w}(\underline{X}_t - F\underline{\theta}_t)' \Sigma_{\varepsilon}^{-1}(\underline{X}_t - F\underline{\theta}_t)} \quad \dots (8)$$

ويمكن التعبير عن دالة الترجيح المشروطة بـ w عند الزمن t وصفيًا بالشكل الآتي:

$$(\underline{X}_t|\underline{\theta}_t, w) \sim N_p(F\underline{\theta}_t, w\Sigma_{\varepsilon})$$

وأن $p(\underline{\theta}_t|w, X^{t-1})$ تمثل الدالة الاحتمالية للتوزيع السابق المشروط بـ w لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$ عند الزمن t والتي يمكن الحصول عليها من المعادلة (5) ومن التوزيع اللاحق عند الزمن $t-1$ المعرف في العلاقة (6) فينتج:

$$p(\underline{\theta}_t|w, X^{t-1}) \propto e^{-\frac{1}{2w}(\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1})' \Sigma_{t|t-1}^{-1}(\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1})} \quad \dots (9)$$

ويمكن التعبير عن الدالة الاحتمالية للتوزيع السابق المشروط بـ w لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$ عند الزمن t وصفيًا بالشكل الآتي:

$$(\underline{\theta}_t | w, X^{t-1}) \sim N_p(\underline{\mu}_{t|t-1}, w\Sigma_{t|t-1})$$

حيث أن:

$$\underline{\mu}_{t|t-1} = G\underline{\mu}_{t-1|t-1} \quad \dots (10)$$

$$\Sigma_{t|t-1} = wG\Sigma_{t-1|t-1}G' + w\Sigma_{\omega} \quad \dots (11)$$

الآن ولإيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق المشروط بـ w لمتجه المعلمات θ عند الزمن t نقوم بتعويض كل من المعادلة (8) والمعادلة (9) في المعادلة (7) وكما يأتي:

$$p(\underline{\theta}_t | w, X^t) \propto e^{-\frac{1}{2w}(\underline{X}_t - F\underline{\theta}_t)' \Sigma_{\varepsilon}^{-1}(\underline{X}_t - F\underline{\theta}_t)} e^{-\frac{1}{2w}(\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1})' \Sigma_{t|t-1}^{-1}(\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1})}$$

بالقيام ببعض العمليات الرياضية ينتج:

$$p(\underline{\theta}_t | w, X^t) \propto e^{-\frac{1}{2w} \left\{ (\underline{\theta}_t - F'(FF')^{-1}X_t)' F' \Sigma_{\varepsilon}^{-1} F (\underline{\theta}_t - F'(FF')^{-1}X_t) + (\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1})' \Sigma_{t|t-1}^{-1} (\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1}) \right\}}$$

بعد ذلك نقوم باستعمال الصيغة التربيعية الآتية [6]:

$$(\underline{Z} - \underline{a})' A (\underline{Z} - \underline{a}) + (\underline{Z} - \underline{b})' B (\underline{Z} - \underline{b}) = (\underline{Z} - \underline{c})' (A + B) (\underline{Z} - \underline{c}) + (\underline{a} - \underline{b})' A (A + B)^{-1} B (\underline{a} - \underline{b}) \dots (12)$$

حيث أن $(A$ و $B)$ مصفوفتان أكيدتا الإيجابية ذواتا سعة $(p \times 1)$ و \underline{Z} و \underline{a} و \underline{b} و \underline{c} متجهات ذوات سعة $(p \times p)$ وأن:

$$\underline{c} = (A + B)^{-1} (A\underline{a} + B\underline{b})$$

$$\underline{Z} = \underline{\theta}_0 \quad ; \quad \underline{a} = F'(FF')^{-1}X_t \quad ; \quad A = F' \Sigma_{\varepsilon}^{-1} F \quad ; \quad \underline{b} = \underline{\mu}_{t|t-1} \quad ; \quad B = \Sigma_{t|t-1}^{-1}$$

وبعد التشبيه والتعويض والقيام بعدة عمليات رياضية تنتج لنا الصيغة الآتية:

$$p(\underline{\theta}_t | w, X^t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |w\Sigma_{t|t}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2w} \left\{ (\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t})' \Sigma_{t|t}^{-1} (\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t}) \right\}} \quad \dots (13)$$

وبذلك يمكن التعبير عن دالة كثافة احتمال متجه المعلمات $\underline{\theta}_t$ المشروطة بـ w وصفيًا بالشكل الآتي:

$$(\underline{\theta}_t | w, X^t) \sim N_p(\underline{\mu}_{t|t}, w\Sigma_{t|t})$$

أما التوزيع اللاحق الحدي غير المشروط لمتجه المعلمات $\underline{\theta}_t$ فيكون وفق الصيغة الآتية:

$$p(\underline{\theta}_t | X^t) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{p}{2}} |\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} M_p(\sqrt{\alpha\beta})} \left[1 + \frac{(\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t})' \Sigma_{t|t}^{-1} (\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t})}{\beta} \right]^{\frac{2\alpha-p}{4}} \times M_{\left(\frac{2\alpha-p}{2}\right)} \left(\sqrt{\alpha\beta \left(1 + \frac{(\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t})' \Sigma_{t|t}^{-1} (\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t})}{\beta} \right)} \right) \quad \dots (14)$$

والمعادلة (14) أعلاه هي دالة كثافة احتمال توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم ويمكن التعبير عنه وصفيًا بالشكل الآتي:

$$(\underline{\theta}_t | X^t) \sim \text{GMMB}_p(\underline{\mu}_{t|t}, \Sigma_{t|t}, \alpha, \beta, \varphi)$$

حيث أن:

$$\underline{\mu}_{t|t} = \underline{\mu}_{t|t-1} + K_t (\underline{X}_t - F\underline{\mu}_{t|t-1}) \quad \dots (15)$$

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t F \Sigma_{t|t-1} \quad \dots (16)$$

المعادلتان (15) و(16) على التوالي أعلاه تسميان بمعادلتى التحديث فالأولى تقوم بتحديث متجه المتوسط والثانية تقوم بتحديث مصفوفة التباين، و K_t هو عبارة عن معامل كالمن (Kalman factor) ويكون في بحثنا على شكل مصفوفة مربعة عدد صفوفها وأعمدها تساوي عدد المتغيرات p ويكون معرفاً بالصيغة الآتية:

$$K_t = \Sigma_{t|t-1} F' (F \Sigma_{t|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon})^{-1} \quad \dots (17)$$

والمقدار $(\underline{X}_t - F\underline{\mu}_{t|t-1})$ الموجود في ذيل المعادلة (15) يسمى الخطأ التنبؤي (Prediction error) أو البواقي (Residual) وهو يمثل الفرق بين المشاهدة الأصلية \underline{X}_t ومعدل التوزيع التنبؤي لتلك المشاهدة حيث أن التوزيع التنبؤي المشروط بـ w للمشاهدة \underline{X}_t بوجود المعلومات X^{t-1} يتم الحصول عليه كالآتي:

$$p(\underline{X}_t | w, X^{t-1}) = \int_{\underline{\theta}_t} p(\underline{X}_t | \underline{\theta}_t, w) p(\underline{\theta}_t | w, X^{t-1}) d\underline{\theta}_t$$

حيث أن $p(\underline{X}_t | \underline{\theta}_t, w)$ تمثل دالة الترجيح عند النقطة t المعرفة في العلاقة (8) وأن $p(\underline{\theta}_t | w, X^{t-1})$ تمثل التوزيع السابق لمتجه المعلمات عند الزمن t والذي تم الحصول عليه في المعادلة (9)، ومن هذا نستنتج أن:

$$p(\underline{X}_t | w, X^{t-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |w \Sigma_{\varepsilon}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |w \Sigma_{\mu|t-1}|^{\frac{1}{2}}} \times \int_{\underline{\theta}_t} e^{-\frac{1}{2w}(\underline{X}_t - F\underline{\theta}_t)' \Sigma_{\varepsilon}^{-1} (\underline{X}_t - F\underline{\theta}_t)} e^{-\frac{1}{2w}(\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1})' \Sigma_{\mu|t-1}^{-1} (\underline{\theta}_t - \underline{\mu}_{t|t-1})} d\underline{\theta}_t$$

بعد استعمال المتطابقة (12) والقيام بعملية التكامل وعمليات رياضية أخرى ينتج ما يأتي:

$$p(\underline{X}_t | w, X^{t-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |w [F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon}]|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2w}(\underline{X}_t - F \underline{\mu}_{t|t-1})' [F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon}]^{-1} (\underline{X}_t - F \underline{\mu}_{t|t-1})}$$

وبذلك يمكننا كتابة التوزيع التنبؤي المشروط بـ w وصفاً كالآتي:

$$(\underline{X}_t | w, X^{t-1}) \sim N_p(F \underline{\mu}_{t|t-1}, w [F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon}])$$

ويمكن كتابة التوزيع التنبؤي الحدي غير المشروط وصفاً بالصيغة الآتية:

$$(\underline{X}_t | X^{t-1}) \sim \text{GMMB}_p(F \underline{\mu}_{t|t-1}, [F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon}], \alpha, \beta, \varphi) \quad \dots (18)$$

استناداً إلى العلاقة (18) أعلاه وباستعمال الخاصية الخطية في توزيع t متعدد المتغيرات المذكورة في القسم الثاني من هذا البحث يتم الحصول على التوزيع الاحتمالي الحدي غير المشروط لخطأ التنبؤ فيعبر عنه بالصيغة الآتية:

$$(\underline{e}_t = \underline{X}_t - F \underline{\mu}_{t|t-1} | X^{t-1}) \sim \text{GMMB}_p(0, [F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon}], \alpha, \beta, \varphi)$$

وبذلك فإن الدالة الاحتمالية الحدية لخطأ التنبؤ تكون بالشكل الآتي:

$$p(\underline{e}_t) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{p}{2}} |F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} M_{\varphi}(\sqrt{\alpha\beta})} \left[1 + \frac{\underline{e}_t' (F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon})^{-1} \underline{e}_t}{\beta} \right]^{\frac{2\varphi-p}{4}} \times M_{\left(\frac{2\varphi-p}{2}\right)} \left(\sqrt{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\underline{e}_t' (F \Sigma_{\mu|t-1} F' + \Sigma_{\varepsilon})^{-1} \underline{e}_t}{\beta} \right) \right) \quad \dots (19)$$

حيث أن:

e_t : يمثل الخطأ التنبؤي عند الزمن t ، $-\infty < e_t < \infty$.

ولمعرفة مدى ملاءمة التوزيع التنبؤي للتنبؤ بالبيانات يتم اختبار الخطأ التنبؤي عن طريق معيار يطلق عليه متوسط مربعات الخطأ التنبؤي القياسي (Mean of squared standard one-step forecast error) والمعطى في الصيغة الآتية:

$$MSSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [(e_{1t}^*)^2 \quad (e_{1t}^*)^2 \quad \dots \quad (e_{pt}^*)^2]' \quad \dots (20)$$

حيث أن e_t^* تمثل الخطأ التنبؤي القياسي وتكون صيغته بالشكل الآتي:

$$e_t^* = \left\{ \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \left[\frac{M_{\varphi+1}(\sqrt{\alpha\beta})}{M_{\varphi}(\sqrt{\alpha\beta})} \right] [F\Sigma_{t|t-1}F' + \Sigma_{\varepsilon}] \right\}^{\frac{1}{2}} e_t$$

يقال للنموذج بأنه جيد إذا اقترب متجه (MSSE) من المتجه الواحدي (Ones vector).

٥- عامل بيز (Bayes' factors)

يعتبر عامل بيز البديل البيزي لاختبار الفرضيات الإحصائية (Statistical Hypotheses)، وتتلخص فكرة هذا العامل في أنه يمثل الأرجحية بين بديتين معينين، بمعنى أنه يمثل النسبة بين شئيين لمعرفة أيهما أصلح أو أفضل ولذلك يسمى في بعض الأحيان بأسلوب التفضيل. يمثل عامل بيز النسبة بين قسمة الاحتمال اللاحق لأحد البدائل (A_1) على الاحتمال السابق له وبين حاصل قسمة الاحتمال اللاحق للبديل الآخر (A_2) على الاحتمال السابق له، وبعد استعمال نظرية بيز تنتج الصيغة العامة لعامل بيز وكما يأتي [9]:

$$BF = \frac{p(X^n|A_1)}{p(X^n|A_2)}$$

حيث أن:

$p(X^n|A_1)$: تمثل التوزيع الحدي لدالة الإمكان لنموذج البديل الأول.
 $p(X^n|A_2)$: تمثل التوزيع الحدي لدالة الإمكان لنموذج البديل الثاني.
 X^n : تمثل جميع البيانات.

يستخدم عامل بيز في مجالات عديدة في الاستدلال البيزي (Bayesian Inference) وخاصة في مجالات المقارنة بين النماذج، ومن هذه الاستعمالات استعماله في تكوين لوحات السيطرة، حيث قام [17] بتعريف عامل بيز بالشكل الآتي:

$$BF(t) = \frac{p_1(\underline{e}_t|X^{t-1})}{p_2(\underline{e}_t|X^{t-1})}$$

حيث أن:

$p_1(\underline{e}_t|X^{t-1})$: تمثل دالة الخطأ التنبؤي عند الزمن t للبديل الأول.

$p_2(\underline{e}_t|X^{t-1})$: تمثل دالة الخطأ التنبؤي عند الزمن t للبديل الثاني.

في هذا البحث تم تكوين عوامل بيز على أساس كون البسط يمثل الخطأ التنبؤي للنموذج في الحالة المدروسة والمقام يمثل خطأ الهدف، حيث أن توزيع الهدف (Target distribution) عبارة عن نموذج يتم فرضه لمقارنته مع خطأ التنبؤ وسيتم فرضه بالشكل الآتي:

$$\underline{X}_t = \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}_t \quad ; \quad GMMB_p(\underline{\theta}, \Sigma_{\underline{\varepsilon}}, \alpha, \beta, \varphi)$$

حيث أن:

$\underline{\theta}$: يمثل متجه معدل الهدف (Target mean) ذو سعة $(p \times 1)$. عادةً يتم تقديره حسب الصيغة الآتية:

$$\underline{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [X_{1t} \quad X_{2t} \quad \cdots \quad X_{pt}]' \quad \dots (21)$$

$\underline{\varepsilon}_t$: متجه خطأ الهدف ذو سعة $(p \times 1)$.

$\Sigma_{\underline{\varepsilon}}$: تمثل مصفوفة تباين الهدف (Target variance matrix) ذو سعة $(p \times p)$. يتم الحصول عليها وفق الصيغة الآتية:

$$\Sigma_{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (\underline{X}_t - \underline{\theta})(\underline{X}_t - \underline{\theta})' \quad \dots (22)$$

ويمكن كتابة دالة خطأ الهدف (Target error) بالشكل الآتي:

$$p(\underline{\tau}_t = \underline{X}_t - \underline{\theta}) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{p}{4}} \left[1 + \frac{\underline{\tau}_t' \Sigma_{\underline{\tau}}^{-1} \underline{\tau}_t}{\beta}\right]^{\frac{2\varphi-p}{4}} M_{\left(\frac{2\varphi-p}{2}\right)} \left(\sqrt{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\underline{\tau}_t' \Sigma_{\underline{\tau}}^{-1} \underline{\tau}_t}{\beta}\right)\right)}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma_{\underline{\tau}}|^{\frac{1}{2}} M_{\varphi}(\sqrt{\alpha\beta})} \dots (23)$$

وبذلك فإن صيغة عامل بيز النهائية ستكون بالشكل الآتي:

$$BF(t) = \frac{p([\underline{e}_t = \underline{X}_t - E(\underline{X}_t|X^{t-1})]|X^{t-1})}{p(\underline{\tau}_t = \underline{X}_t - \underline{\theta})} \dots (24)$$

حيث أن:

$$p([\underline{e}_t = \underline{X}_t - E(\underline{X}_t|X^{t-1})]|X^{t-1})$$

$$p(\underline{\tau}_t = \underline{X}_t - \underline{\theta})$$

$$E(\underline{X}_t|X^{t-1})$$

بتعويض الدالة الاحتمالية لخطأ التنبؤ المعرفة في المعادلة (19) والدالة الاحتمالية لخطأ الهدف المعرفة في المعادلة (23) في صيغة عامل بيز المعرفة في المعادلة (24) نحصل على صيغة عامل بيز النهائية عندما تكون مصفوفة التباين معلومة ومتجه المعلمات مجهول بالشكل الآتي:

$$BF(t) = \frac{M_{\left(\frac{2\varphi-p}{2}\right)} \left(\sqrt{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\underline{e}_t' (F\Sigma_{t|t-1}F' + \Sigma_{\varepsilon})^{-1} \underline{e}_t}{\beta}\right)\right) |\Sigma_{\underline{\tau}}|^{\frac{1}{2}}}{M_{\left(\frac{2\varphi-p}{2}\right)} \left(\sqrt{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\underline{\tau}_t' \Sigma_{\underline{\tau}}^{-1} \underline{\tau}_t}{\beta}\right)\right) |F\Sigma_{t|t-1}F' + \Sigma_{\varepsilon}|^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\beta + \underline{e}_t' (F\Sigma_{t|t-1}F' + \Sigma_{\varepsilon})^{-1} \underline{e}_t}{\beta + \underline{\tau}_t' \Sigma_{\underline{\tau}}^{-1} \underline{\tau}_t}\right]^{\frac{2\varphi-p}{4}} \dots (25)$$

مع ملاحظة أن قيمة عامل بيز تكون قيمة موجبة لكونها ناتجة من قسمة دالتين احتماليتين، وأنها تكون عبارة عن سلسلة مترابطة وذات توزيع غير طبيعي.

٦- تكوين لوحة (EWMA) المحورة

تعتبر لوحة الأوساط المتحركة الموزونة أسياً (Exponentially weighted moving average) من أولى اللوحات التي تم تكوينها للسيطرة على البيانات المرتبطة ذاتياً، وتتخلص فكرة هذه اللوحة برسم المتوسط المتحرك الموزون أسياً ولكافة المشاهدات السابقة والحالية للعملية الإنتاجية وهذا المتوسط يتم الحصول عليه من المعادلة الآتية [10]:

$$z_t = \lambda y_t + (1 - \lambda)z_{t-1} \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, n \quad \dots (26)$$

حيث أن:

λ : تمثل معلمة التمهيد (Smoothing parameter) وتكون عبارة عن ثابت اختياري تكون قيمته محصورة بين الصفر والواحد.

y_t : تمثل قيم مفردات العينة.

z_t : قيمة المتوسط المتحرك الموزون أسياً. و z_0 عادة ما يتم التعويض عنها بقيمة متوسط العينة وهي تمثل أيضاً خط الهدف (Target line) للوحة في الكثير من الأحيان.

أما حدود اللوحة فتعطى بالصيغة الآتية:

$$UCL(t) = E(z_t) + L\sqrt{\text{Var}(z_t)} \quad \dots (27)$$

$$TL(t) = E(z_t) \quad \dots (28)$$

$$LCL(t) = E(z_t) - L\sqrt{\text{Var}(z_t)} \quad \dots (29)$$

حيث أن:

L : يمثل عرض حد السيطرة وتكون قيمته عادةً تساوي (3).

$UCL(t)$: يمثل الحد الأعلى للوحة عند الزمن t .

$TL(t)$: يمثل خط الهدف عند الزمن t .

$LCL(t)$: يمثل الحد الأدنى للوحة عند الزمن t .

وأن $E(z_t)$ و $Var(z_t)$ هما التوقع والتباين على الترتيب.

يعتبر عامل بيز الذي تم الحصول عليه في الجزء السابق من هذا البحث الركيزة الأساسية في تكوين اللوحات، حيث يتم رسم هذه العوامل على اللوحة ذات المتغير الواحد، وقد تم اختيار لوحة الأوساط المتحركة الموزونة أسياً (EWMA) ومن ثم إجراء بعض التعديلات عليها لغرض جعلها ملائمة لعوامل بيز، لكون هذه العوامل تعاني من مشكلتين الأولى هي عدم الطبيعية (Non-normality) والمشكلة الثانية هي وجود الارتباط الذاتي كما مذكور أعلاه، وللتغلب على المشكلة الأولى يتم استعمال معلمة تمهيد صغيرة جداً حيث أن ذلك يساعد على جعل اللوحة أقرب إلى اللامعلمية حسب ما هو مذكور من قبل بعض الباحثين ومنهم [10]، أما المشكلة الثانية فيتم التغلب عليها عن طريق إجراء التعديل على اللوحة بما يناسب البيانات المرتبطة ذاتياً. بالاستفادة من إيجابية قيم عوامل بيز تم إيجاد اللوغاريتم الطبيعي له وذلك لكون اللوغاريتمات أكثر استقراراً من القيم الأصلية لعوامل بيز وقد تم فرض أن السلسلة الناتجة من نوع الانحدار الذاتي الأوساط المتحركة (ARMA(1,1)) وكما يأتي:

$$(LBF)_t = c + \phi(LBF)_{t-1} - \theta\eta_{t-1} + \eta_t \quad \dots (30)$$

حيث أن:

$(LBF)_t$: تمثل قيمة لوغاريتم عامل بيز.

c : يمثل ثابت السلسلة.

ϕ : يمثل معامل الانحدار الذاتي.

θ : يمثل معامل الوسط المتحرك.

η_t : يمثل التشويش أو الخطأ ويكون ذو توزيع طبيعي له وسط صفري وتباين σ^2 ويعبر عنه وصفاً بالآتي:

$$\eta_t \overset{\text{IID}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

حيث يتم إيجاد التوقع والتباين للسلسلة $(LBF)_t$ المعرفة في المعادلة (30) ومن ثم إيجاد التوقع والتباين للوحة (EWMA) بالشكل الآتي:

$$E(z_t) = \frac{c}{(1 - \phi)} \quad \text{for } \phi \neq 1 \quad \dots (31)$$

$$\text{var}(z_t) = \frac{\lambda\sigma^2 \left\{ \left((1 - \phi(1 - \lambda))(1 + \theta^2 - 2\phi\theta) \right) + 2((\phi - \theta)(1 - \phi\theta)(1 - \lambda)) \right\}}{\{2 - \lambda\}(1 - \phi^2)\{1 - \phi(1 - \lambda)\}} \quad \dots (32)$$

حيث أن قيمة التباين قد تم إيجاده عندما الغاية تقترب من المالا نهائية وذلك لأن بعض الباحثين أمثال [13] يعد ذلك أفضل من الحالة التي يؤخذ الزمن بنظر الاعتبار.

وبتعويض المعادلتين (31) و(32) في المعادلات (27) و(28) و(29) نحصل على حدود اللوحة الجديدة، وكما يأتي:

$$UCL = \frac{c}{(1 - \phi)} + L \sqrt{\frac{\lambda\sigma^2 \left\{ \left((1 - \phi(1 - \lambda))(1 + \theta^2 - 2\phi\theta) \right) + 2((\phi - \theta)(1 - \phi\theta)(1 - \lambda)) \right\}}{\{2 - \lambda\}(1 - \phi^2)\{1 - \phi(1 - \lambda)\}}} \quad \dots (33)$$

$$TL = \frac{c}{(1 - \phi)} \quad \dots (34)$$

$$LCL = \frac{c}{(1 - \phi)} - L \sqrt{\frac{\lambda\sigma^2 \left\{ \left((1 - \phi(1 - \lambda))(1 + \theta^2 - 2\phi\theta) \right) + 2((\phi - \theta)(1 - \phi\theta)(1 - \lambda)) \right\}}{\{2 - \lambda\}(1 - \phi^2)\{1 - \phi(1 - \lambda)\}}} \quad \dots (35)$$

حيث أن قيمة c تقدر بالشكل الآتي:

$$c = (1 - \lambda) \overline{(LBF)}$$

بينما قيمة σ^2 تقدر بالشكل الآتي:

$$\sigma^2 = \frac{\text{var}(LBF)(1 - \phi^2)}{(1 + \phi^2 - 2\phi\theta)}$$

إذ أن $\overline{(LBF)}$ و $\text{var}(LBF)$ هما على التوالي يمثلان المعدل والتباين للوغاريتم عامل بيز.

٧- الجانب التطبيقي

لغرض تطبيق ما تم الحصول عليه في الأقسام السابقة تم توليد مئة وخمسين متجه ($N=150^2$) بشكل عشوائي وبواسطة اساليب المحاكاة (Generating data using Simulation techniques) باستعمال البرنامج (1) الموجود في الملحق الذي تم كتابته بواسطة برنامج (MATLAB 7.10). لقد تم عملية التوليد لبيانات تتبع توزيع بسل متعدد المتغيرات المحور المعمم لثلاثة متغيرات ولمعلمات شكل ذات قيم ($\alpha = 0.5, \beta = 1, \varphi = 2$) ومتجه متوسط $\underline{\mu}$ ، ومصفوفة تباين Σ معرفتين بالشكل الآتي:

$$\underline{\mu} = [10 \quad 20 \quad 30]^T$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.4168 & 1.0928 & -1.6720 \\ & 5.1936 & -2.4240 \\ & & 6.1704 \end{bmatrix}$$

بفرض أن مصفوفة الانحدار F ومصفوفة الحالة G معلومتين وتم اعتبار أن كل واحدة منهما تمثل مصفوفة الوحدة (Identity matrix) وأن مصفوفة تباين خطأ الحالة معرفة بالشكل الآتي:

$$\Sigma_{\omega} = \begin{bmatrix} 2.9280 & 0.2820 & -0.3120 \\ & 5.6000 & 0.0480 \\ & & 8.0360 \end{bmatrix}$$

وباعتبار أن متجه معدل الهدف (θ) معرف ومساوي لمتجه البيانات المولدة ($\underline{\mu}$) وأن مصفوفة تباين المشاهدة (Σ_{ϵ}) ومصفوفة تباين الهدف (Σ_{τ}) معرفتين وتساويان مصفوفة التباين للبيانات المولدة (Σ).

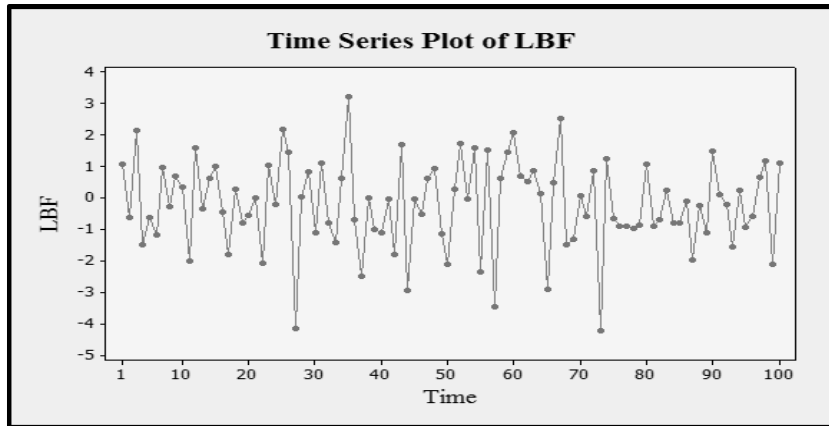
^٢ كان من الممكن أن يكون N مساويا لـ ١٥٠ أو ٢٠٠ أو أي رقم آخر، فهي عملية توليد بيانات بواسطة المحاكاة.

تم تجزئة العينة إلى جزأين، الجزء الأول (1,2,...,100) والجزء الثاني (101,102,...,150)، حيث تم إيجاد المقدرات عن طريق الجزء الأول وتطبيقها في الجزء الثاني، ولغرض ترشيح المعلمات تم فرض أن متجه متوسط التوزيع اللاحق لمتجه المعلمات (θ_t) عند الزمن صفر هو نفسه متجه متوسط البيانات المولدة (μ) وأن تباينه عبارة عن مصفوفة الوحدة، وباستعمال البرنامج رقم (2) في الملحق وبتطبيق المعادلات (10) و(11) و(15) و(16) و(17) الواردة في القسم الرابع من هذا البحث تم الحصول على الأخطاء التنبؤية وقد تم اختبارها باستعمال المعيار المعرف في الصيغة (20) فتم التأكد من إمكانية استعمال هذا النموذج في إيجاد عوامل بيز حيث كانت قيمة متجه (MSSE) قريبة من متجه واحد وكالاتي:

$$MSSE = [0.8846 \quad 0.9613 \quad 1.0953]$$

قبل إيجاد عوامل بيز يتم إيجاد معدل وتباين وخطأ الهدف وذلك عن طريق المعادلتين (21) و(22) إلا أننا فرضنا أنهما معلومتان كما مر بنا سابقاً، ومن ثم نقوم بإيجاد عامل بيز المعرف وفق المعادلة (25) في القسم الخامس من البحث بواسطة البرنامج رقم (2)، وبذلك نكون قد حصلنا على الركيزة الأساسية لتكوين اللوحات.

يتم التأكد من استقرار سلسلة عوامل بيز الناتجة من الخطوة السابقة وذلك باستعمال البرنامج الجاهز (Minitab 16.1) وكما موضح في الشكل الآتي:



الشكل (١): يوضح استقرار سلسلة عوامل بيز

أيضاً وباستعمال البرنامج الجاهز (Minitab 16.1) تم الحصول على الجدول الآتي:

الجدول (1): يوضح بعض الحالات المختلفة لنموذج (ARMA)

MSE	ϑ	φ	c	ARMA order
1.8270	0.5550*	0.2432(n.s)	0.1672**	ARMA(1,1),c
1.8640	-	-0.2580*	-0.2727*	AR (1),c
1.8260	0.3396**	-	-0.2190*	MA(1),c
1.9220	0.3581(n.s)	0.1107(n.s)	-	ARMA(1,1)
1.9180	-	-0.2256*	-	AR (1)
1.9050	0.2562**	-	-	MA(1)

حيث أن (*) تشير إلى أن القيمة معنوية عند (0.05) وأن (**) تشير إلى أن القيمة معنوية عند (0.01) وأن (n.s) تشير إلى أن القيمة غير معنوية.

يتبين من الجدول أعلاه أن النموذج MA(1) والذي يحتوي على الثابت c هو النموذج الملائم لتمثيل سلسلة عوامل بيز وذلك يمكن التعبير رياضياً عنها بالصيغة الآتية:

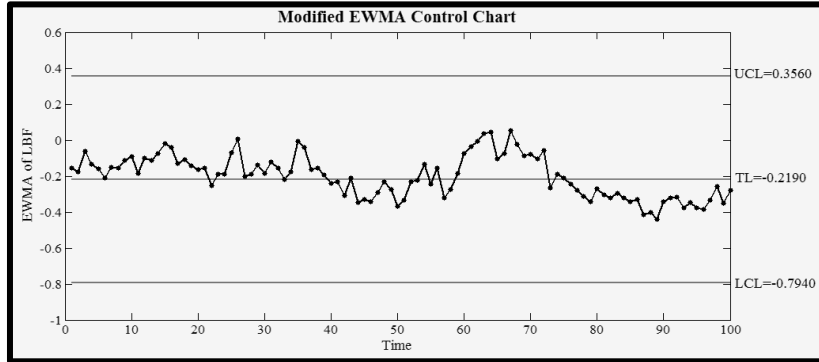
$$(LBF)_t = -0.2190 - 0.3396\eta_{t-1} + \eta_t$$

بالاعتماد على النموذج المذكور وقيم المعلمات المتحصل عليها في الجدول (1) وتعويضها في المعادلات (33) و(43) و(35) الموجودة في القسم السادس من هذا البحث بفرض أن قيمة معلمة التمهيد قيمة صغيرة ($\lambda=0.05$) وأن عرض اللوحة ($L=3$) وبلاستعانة بالبرنامج رقم (3) الموجود في الملحق نحصل على المعلومات الآتية:

الجدول (2): يوضح القيم التي تدخل في إيجاد حدود السيطرة

القيمة المقترنة	الإحصاء	القيمة المقترنة	الإحصاء
0.3560	UCL	0	ϕ
-0.2190	TL	0.3396	ϑ
-0.7940	LCL	-0.2190	c
		1.8260	σ^2

باستعمال البرنامج (MATLAB 7.10) تم رسم لوحة السيطرة للجزء لأول من البيانات كما يأتي:



الشكل (2): يوضح لوحة (EWMA) المحورة للبيانات الأولية

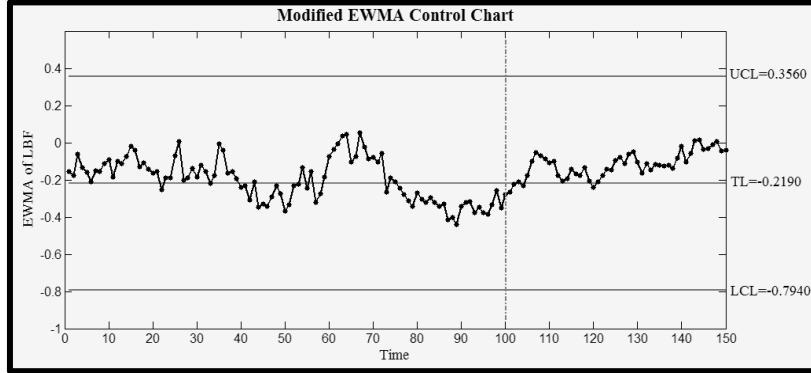
نلاحظ أن جميع القيم داخل حدود السيطرة وهذا يدل على إمكانية استعمالها في السيطرة على نوعية هذه البيانات في المستقبل.

لغرض معرفة كون البيانات المتبقية خارج السيطرة أو داخل السيطرة، يتم الاستفادة من النتائج التي تم الحصول عليها من الجزء الأول من البيانات وهذه النتائج بالإضافة إلى السابقة هي كما يأتي:

$$\underline{\mu}_{opt} = \underline{\mu}_{100|99} = [12.5192 \quad 22.9255 \quad 28.2855]'$$

$$\underline{\Sigma}_{opt} = \underline{\Sigma}_{100|99} = \begin{bmatrix} 5.3304 & 0.7649 & -1.0702 \\ & 8.7847 & -1.0985 \\ & & 11.9513 \end{bmatrix}$$

حيث أن المتجه أعلاه يمثل المعدل الأمثل لمتجه المعلمات θ كما أن المصفوفة تمثل التباين الأمثل لمتجه المعلمات، وبتطبيق هذه القيم بدلاً من القيم المتغيرة عبر الزمن $\underline{\mu}_{t|t-1}$ و $\underline{\Sigma}_{t|t-1}$ للجزء الثاني من البيانات فنحصل على عوامل بيز بطريقة مشابهة تماماً إلى تلك الطريقة المستعملة في الجزء الأول من البيانات، وبرسم سلسلة عوامل بيز وبنفس حدود السيطرة السابقة نحصل على اللوحة للبيانات الحالية وكما موضح في الشكل الآتي:



الشكل (3): يوضح لوحة (EWMA) المحورة لجميع البيانات

نلاحظ أن قيم الجزء الثاني أيضاً داخل حدود السيطرة وهذا يدل على أن العملية تحت السيطرة.

من الجدير بالإشارة إلى أن في حالة كون العملية خارج السيطرة يمكن معرفة المتغير المسبب في ذلك باستعمال نفس الأسلوب السابق مع كل متغير على حدة.

كما تجدر الإشارة إلى أن طريقة تقسيم البيانات إلى جزأين ومن ثم استعمال الجزء الأول من البيانات في التقدير واستعمال الجزء الثاني في التنبؤ من الطرق الجيدة في معرفة العملية الإنتاجية إلا أنه ليس بالضرورة القيام بها.

٨- الاستنتاجات والتوصيات

أولاً: الاستنتاجات

نستنتج مما سبق أن:

أ- بالإمكان استعمال لوحة EWMA المحورة في السيطرة على أي سلسلة زمنية غير طبيعية شريطة أن تكون متمثلة.

ب- أن عوامل بيز هي الركيزة الأساسية في تكوين اللوحة المقترحة.

ج- قيم عامل بيز تحتوي على ارتباط ذاتي سواء كانت البيانات الأصلية مرتبطة ذاتياً أو غير مرتبطة ذاتياً.

د- يمكن معرفة المتغير المسبب في حالة كون العملية خارج السيطرة وذلك باستعمال نفس الأسلوب السابق مع كل متغير على حدة.

ثانياً: التوصيات

بناءً على نتائج الدراسة نوصي بما يأتي:

أ- نوصي بتطبيق اللوحات الناتجة في مجالات الحياة كافة وخاصة تلك المجالات التي تكون توزيعاتها على الأغلب ذات ذيول ثقيلة.

ب- نوصي بتكوين لوحات في حالة كون متجه المعلمات ومصفوفة التباين غير معلومتين.

ج- نوصي بتعديل اللوحة لتشمل نموذج (ARIMA(p,d,q)) لأي رتبة كانت ولأي عدد من الاختلافات.

٩- المصادر

أ- المصادر العربية

[1] أبو ناقوس، أحمد حسن عليان، (١٩٩٣)، "استعمال إحصاء بيز على النماذج الديناميكية الخطية مع تصميم لوحة بيز"، رسالة ماجستير، قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل، العراق.

[2] الرسام، ريا سالم، (١٩٩٦)، "تكوين لوحة بيز ثنائية البعد لغرض مراقبة جودة الإنتاج مع المحاكاة"، رسالة ماجستير، قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل، العراق.

[3] الزبيدي، طه حسين، (١٩٩٧)، "تكوين لوحة بيز للسيطرة على الصفات النوعية"، رسالة ماجستير، قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة الموصل، العراق.

[4] العبيدي، سرمد عبد الخالق صالح، (٢٠١٣)، "التقدير اللابيزي والبيزي لبعض معلمات نموذج انحدار بسل المحور المعمم مع التطبيق على بيانات سوق العراق لأوراق المالية"، رسالة ماجستير، قسم الإحصاء والمعلوماتية، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

ب- المصادر الإنكليزية

- [5] Akaike, Hirotugu, (1974), “**Markovian representation of stochastic processes and its application to the analysis of autoregressive moving average processes**” Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 26, pp.363-387.
- [6] Bishop, Christopher, (2006), “**Pattern Recognition and Machine Learning**”, Springer-Verlag New York, Inc.
- [7] Grewal , Mohinder S. and Andrews, Angus P., (2008), “**Kalman filtering: theory and practice using MATLAB**”, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc. .
- [8] Jalil, Talib Sharif, (1988), “**Sequential inspection and intervention policy for a manufacturing process**”, Unpublished Ph. D. Thesis, Dept. of Mathematics, Wales University.
- [9] Kass, Robert E. and Raftery, Adrian E., (1995), “**Bayes factors**”, Journal of the American Statistical Association, Vol. 90, pp. 773-795.
- [10] Montgomery, Douglas C., (2009), “**Introduction to statistical quality control** ”, 6th ed., John Wiley & Sons, Inc. .
- [11] Pan, Xia and Jarrett Jeffrey, (2004), “**Applying state space to SPC: monitoring multivariate time series**”, Journal of Applied Statistics, Vol. 31, pp. 397-418.
- [12] Salvador, Manuel and Gargallo, Pilar, (2004), “**Automatic Monitoring and Intervention in Multivariate Dynamic Linear Models**”, Computational Statistics & Data Analysis, Vol. 47, pp. 401 – 431.
- [13] Schmid, Wolfgang, (1997), “**On EWMA charts for time series. in frontiers in statistical quality control**”, Vol. 5, pp. 114-137.
- [14] Smith, Adrian and West, Mike, (1983), “**Monitoring renal transplants: An application of the multiprocess Kalman filter**”, Biometrics, Vol. 39, pp. 867-878.
- [15] Triantafyllopoulos, Kostas, (2006), “**Multivariate control charts based on Bayesian state space models**”, Quality and Reliability Engineering International, Vol. 22, pp. 693–707.

[16] West, Mike, (1986), “**Bayesian Model Monitoring**”, Royal Statistical Society, Vol. 48, pp. 70-78.

[17] West, Mike, and Harrison, Jeff, (1997), “**Bayesian forecasting and dynamic models**”, 2th ed., Springer-Verlag, New York.