قسم الرياضة والتأمين والإحصاء

كلية التجارة

تسعير وثيقة التأمين البحري أجسام سفن " اللنشات" باستخدام التحليل البيزي للبيانات في سوق التأمين المصري – دراسة كمية

أحمد حمدي عبد المنعم النحاس

المدرس المساعد بكلية التجارة

جامعة مدينة السادات

قسم الرياضة والتأمين والإحصاء

الأستاذ الدكتور/ أسامة ربيع أمين سليمان

أستاذ التأمين ورئيس قسم

الرياضة والتأمين والإحصاء

بكلية التجارة – جامعة مدينة السادات

2021

ملخص الدراسة:

تتعلق هذه الدراسة باستخدام التحليل البيزي للبيانات في تحديد التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات والتوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات، ثم تحديد التوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي لقيم المطالبات. هذا بالإضافة الي تقدير الحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة. وتشير النتائج إلى أن عدد المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية يتوافق مع توزيع بواسون، وأن التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات هو توزيع ثنائي الحدين السالب بمعالم $\left(T_1 + T_2, \frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+1}\right)$. وكانت بيانات قيم المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية تتوافق مع توزيع جاما والتوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات تم توفيقه مع دالة بيتا بمعالم$(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, \alpha_2)$. وبناء عليه كان التوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي لقيم المطالبات هو من النوع السادس من منحنيات كارل بيرسون.

الكلمات المفتاحية: التحليل البيزي، التوزيع القبلي، التوزيع البعدي، إجمالي الخسائر السنوية المحتملة.

Abstract:

This study concerns the use of Bayesian data analysis in determining the predictive probability distribution of the number of claims and the predictive probability distribution of claims values, and then determining the overall predictive probability distribution of claim's values. And an estimate of the maximum probable yearly aggregate loss. The results indicate that the number of claims during the main experience period fitted to the Poisson distribution, and that the predictive probability distribution of the number of claims is a negative binomial distribution with parameters $\left(T_1 + T_2, \frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+1}\right)$. The data for the claim's values during the main experience period fitted to the gamma distribution and the predictive probability distribution for the claims values is fitted to the beta function with parameters$(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, \alpha_2)$. The overall predictive probability distribution of claim's values is the sixth type of Karl Pearson curves.

Key words: Bayesian data analysis, Prior distribution, Posterior distribution, maximum probable yearly aggregate loss (MPY).

(1) مقدمة:

يعد التأمين البحري من أقدم صور التأمين المعروفة. ويتكون من فرعين رئيسيين هما تأمين البضائع Marine Cargo Insurance، وتأمين أجسام السفن" الوحدات" * Marine Hull Insurance. ويتميز تأمين أجسام السفن بأنه سوق للقيم الكبيرة High Values market لذلك يجب زيادة الاهتمام بعملية تسعير تأمين أجسام السفن بالعدالة بين المؤمن والمؤمن لهم.

وتهدف عملية التسعير في التأمين - بصفة عامة- إلى محاولة الوصول إلى أقساط مناسبة وعادلة تعتمد علي الأسس الرياضية والإحصائية لبيانات حقيقية وكافية. مما يجعل الأقساط الناتجة تكون مناسبة وغير مبالغ فيها (مهدي والبلقيني ،1992).

ولتفادي أوجه القصور في عملية التسعير يجب أن يتم الاعتماد على الأساليب الكمية التي تعطي تقديرات أكثر دقة. ومن أهم هذه الأساليب هو أسلوب التحليل البيزي للبيانات Data Bayesian analysis في تقدير عدد وقيم المطالبات المتوقعة وذلك في ظل نظرية الخطر التجميعية.

(2) الدراسات السابقة:

دراسة Lamm-Tennant et al. (1992) تناولت الدراسة استخدام نموذج بيز التجريبي (EB) لتقدير معدل الخسارة في تأمينات الممتلكات والمسئولية، من خلال التطبيق على أربع فروع هي: تأمين السيارات التكميلي وتأمين المسئولية المدنية للسيارات وتأمين المسئولية الطبية وتأمين الحريق. وتوصلت الدراسة إلى أن استخدام أسلوب بيز التجريبي أدي للحصول على نتائج جيدة في الأربعة فروع. وأن هذا النموذج يعطي نتائج أكثر دقة في الشركات الصغيرة التي لديها تباينات أعلي في نسبة الخسارة من الشركات الكبيرة. وأنه بصفة عامة يمكن تحسين النتائج باستخدام سلاسل زمنية أطول للبيانات محل الدراسة.

دراسة الديب (1996) استهدفت هذه الدراسة التعرف على طرق تقدير MPY باستخدام التوزيعات الاحتمالية. وبصفة خاصة المنحنيات التي أعدها كارل بيرسون لهذا الغرض وما طرأ عليها من تطوير. وتوصلت الدراسة إلى أن أسلوب بيرسون يعطي تقديرات أكثر دقة من أي أسلوب آخر. وأن التطوير الذي أدخل على هذا الأسلوب باستخدام الجداول مثل جداول جونسون وآخرون أو باستخدام معادلات تقريبية مثل معادلات بومان شنتون جعل استخدام هذا الأسلوب أمر يسير للغاية.

واعتمدت دراسة بخيت (2004) على التحليل البيزي التجريبي للتنبؤ بمعدلات الخسارة المستقبلية لفروع التأمينات الهندسية (تأمين جميع أخطار المقاولين- تامين عطل الآلات- تأمين جميع أخطار التركيب- وتوصلت الدراسة إلى أن معدلات الخسارة في التأمينات الهندسية

* يطلق عليها في سوق التأمين المصري تأمين الوحدات.

تتصف بعدم الاستقرار من خلال السلاسل الزمنية لخبرة الماضي. ويعكس ذلك مقدار التباين في هذه الفروع وانحراف التباين عن التباين المشترك الفعلي.

دراسة إسماعيل (2005) قامت هذه الدراسة باستخدام التحليل البيزي للبيانات في تقدير كلاً من عدد المطالبات المتوقع على مستوى محفظة التأمين، وكذلك قيمة التعويضات المتوقعة، وذلك من خلال التوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات والتوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات، وذلك في ظل استخدام نماذج الخطر التجميعية Collective Risk Theory والتي تنظر لمحفظة التأمين على أنها مفتوحة تسمح بدخول وخروج أي وثيقة بعكس نماذج الخطر الفردية.

دراسة جلول (2013) استهدفت هذه الدراسة تقييم معدلات الخسائر المحققة في تأمين الممتلكات والمسئولية بالسوق المصري خلال فترة الدراسة، والتنبؤ بمعدلات الخسارة المتوقعة. وقد تم استخدام معدلات الخسارة في سبعة فروع من تأمينات الممتلكات والمسئولية لخمس شركات تأمين مصرية. وقد توصلت الدراسة إلى أن معدلات الخسائر المحققة والمتوقعة في جميع الفروع يقع في المدي المقبول، أقل من 50% في جميع الشركات محل الدراسة باستثناء فرع التأمين الطبي حيث كانت نتائجه خارج المدي المقبول بنسب تتراوح بين 77% و91% وهو ما يؤكد الحاجة إلي تعديل سياسة الاكتتاب والتسعير المتبعة في هذا الفرع.

دراسة اسماعيل (2011) استهدفت هذه الدراسة تقدير الحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة (MPY). واعتمدت هذه الدراسة على استخدام التحليل البيزي للبيانات في تقدير عدد المطالبات المتوقع وكذلك قيمة التعويضات المتوقعة عن طريق تحديد التوزيع التنبؤي لعدد وقيم المطالبات واتفقت بيانات عدد المطالبات مع توزيع ثنائي الحدين السالب، وبيانات قيم المطالبات مع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي. وتم تحديد التوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي لقيم المطالبات وهو التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي، والذي يعطي معلومات فنية شبه كاملة عن هذا النوع من التأمين منها تقدير الحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة.

دراسة الخواجه (2014) كان الهدف من هذه الدراسة بناء نموذج رياضي للتنبؤ بمعدل الخسارة للتأمينات العامة لسوق التأمين السعودي. وقد قام الباحث بجمع بيانات تخص سبع أنواع من أنشطة التأمين خلال الفترة من 2005 حتى 2013. وأوضحت نتائج الدراسة أن معدلات الخسارة لجميع أنشطة التأمين العام في المملكة العربية السعودية تتصف بعدم الاستقرار وأن متوسط المتوسطات لمعدلات الخسارة لجميع أنشطة التأمين العام لسوق التأمين السعودي يساوي 34.5%.

دراسة حافظ (2015) استهدفت ترشيد سياسات الاكتتاب من خلال استخدام نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية لكل من معدل الخسارة ومعدل العمولات وتكاليف الإنتاج ومعدل المصروفات العمومية والإدارية. وأيضاً ترشيد سياسات التسعير من خلال استخدام أسلوب التحليل البيزي ونظرية المصداقية وتبين أن التوزيع الاحتمالي الحدي لعدد مطالبات مستلزمات الإنتاج يتبع توزيع ثنائي الحدين السالب.

ويختلف هذا البحث عن الدراسات السابقة في تغطيته للفجوة البحثية المتمثلة في عدم وجود سعر تأمين يعتمد على الأساليب الكمية ووفقاً للخبرة المحلية لسوق التأمين المصري للتأمين البحري أجسام السفن بالتطبيق علي" اللنشات" باعتبارها أكثر الوحدات البحرية انتشاراً في سوق التأمين المصري.

(3) مشكلة الدراسة:

في ضوء دراسة معدلات الخسارة بفرع أجسام السفن خلال الفترة من2012/2011 إلى 2019/ 2020 تشير النتائج إلى تذبذب شديد في معدلات الخسارة في هذا الفرع حيث أن الانحراف المعياري للبيانات خلال هذه الفترة يساوي 19.3037، مقارنة ببعض فروع التأمين الأخرى كالتأمين البحري بضائع 14.659، وتأمين السيارات التكميلي 4.514، وتأمين الحوادث 11.691، والتأمين الطبي 12.819.

ويرجع هذا التذبذب إلى الاعتماد على الخبرة الشخصية وخبرة معيد التأمين في تقدير السعر التأميني. ومع عدم قدرة الشركة على تعديل السعر وفقاً للنتائج الفعلية المحققة، فيجب تطوير طرق التسعير المستخدمة في سوق تأمين أجسام السفن في مصر للوصول إلى أفضل تقدير ممكن للسعر التأميني. وبالتالي تتمثل مشكلة الدراسة في التوصل إلى نموذج تسعير مناسب للسوق المصري فرع أجسام سفن بالاعتماد على الأساليب الكمية. بحيث يحقق التدنية المطلوبة للفرق ما بين النتائج المتوقعة والنتائج الفعلية المحققة.

(4) أهداف الدراسة:

يستهدف البحث بصفة أساسية استخدام أسلوب التحليل البيزي للبيانات للوصول إلى التوزيع الاحتمالي الإجمالي لقيم المطالبات وتقدير الحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة لاستخدامه في حساب سعر تأمين مناسب للسوق المصري يحقق العدالة بين أطراف العملية التأمينية.

(5) أهمية الدراسة:

تتمثل أهمية الدراسة في النقاط التالية:

أ- ضرورة تحقيق العدالة بين المؤمن والمؤمن لهم بحيث يلبي احتياجات شركة التأمين ويزيد من قدرتها على الوفاء بالتزاماتها بالإضافة الي تحقيق هامش ربح مناسب. وأيضا غير مغالى فيه فيكون عبء علي المؤمن لهم.

ب- سد الفجوة في المكتبة العربية فيما يتعلق بالبحوث الخاصة بهذا الفرع في سوق التأمين المصري.

ج- أهمية استخدام الأساليب الكمية بصفة عامة وأسلوب التحليل البيزي بصفة خاصة، بما يساعد في الوصول إلى تقدير مناسب للسعر التأميني لفرع أجسام السفن في السوق المصري.

د- تساعد على التنبؤ الدقيق بالسعر التأميني المناسب الذي يساهم في زيادة القدرة الاكتتابية لشركات التأمين بفرع أجسام السفن في السوق المصري.

(6) حدود الدراسة:

سوف تشمل الدراسة فرع أجسام السفن بالسوق المصري بالتطبيق على اللنشات لشركتين تعملان في السوق المصري للتأمين وذلك خلال الفترة من عام 2013 إلى عام 2020.

(7) البيانات ومصادر الحصول عليها:

سعياً نحو تحقيق أهداف الدراسة تم الاعتماد على البيانات التالية:

أولاً: البيانات الثانوية:

تتمثل أهم مصادر البيانات الثانوية في:

أ- إحصاءات الهيئة العامة للرقابة المالية لقطاع التأمين.
ب- إحصاءات الاتحاد الدولي للتأمين البحري.

ثانياً: البيانات الأولية:

البيانات المستمدة من سجلات وملفات الإصدار والتعويضات في الشركات محل الدراسة، مثل الأقساط، ومبالغ التأمين، وعدد المطالبات، وقيم المطالبات، ونوع الحادث، ونوع السفينة.

(8) الاسلوب الاحصائي المستخدم:

سيتم استخدام أسلوب التحليل البيزي للبيانات للوصول إلى التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات، حيث تم اختبار تبعية البيانات لأحد التوزيعات المنفصلة " بواسون وثنائي الحدين السالب". وأيضا التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات حيث تم اختبار تبعية البيانات لأحد التوزيعات المتصلة" جاما والأسى السالب واللوغاريتمي الطبيعي وباريتو" واستخدام عزوم التوزيعين للوصول إلى التوزيع الاحتمالي الإجمالي لقيم المطالبات.

(9) متغيرات الدراسة:

يتمثل المتغير العشوائي محل الدراسة في إجمالي قيم المطالبات والذي يتكون من متغيرين عشوائيين هما:

1- عدد المطالبات Loss Frequency.
2- قيم المطالبات Loss Severity.

(10) الدراسة التطبيقية:

تعتمد هذه الدراسة على البيانات التي تم جمعها من شركتي التأمين محل الدراسة حيث تم الحصول على البيانات المتعلقة بعدد الوحدات وعدد المطالبات وحجم المطالبات ومبالغ التأمين عن الفترة ما بين عام 2013 الى عام 2020، ووفقاً للتحليل البيزي للبيانات والذي يعتمد علي دمج المعلومات المتحصلة من الماضي مع البيانات خلال فترة الدراسة الأساسية فقد تم تقسيم البيانات على فترات كما يلي:

أ- ما قبل 2013 وهي تمثل فترة لا يتوافر بها أي معلومات عن المتغير العشوائي محل الدراسة.
ب- السنوات من 2013 حتى 2015 وهي فترة يتوافر بها معلومات عن المتغير العشوائي محل الدراسة ويطلق عليها فترة خبرة قبلية.
ج- السنوات من 2016 حتى 2020 وهي تمثل فترة الدراسة الأساسية والتي يعتمد عليها في بناء نموذج التسعير.

ولتحديد التوزيع الاحتمالي الإجمالي لدالة قيم المطالبات تم إيجاد كل من:

1- التوزيع الاحتمالي التنبؤي للمتغير العشوائي عدد المطالبات.
2- التوزيع الاحتمالي التنبؤي للمتغير العشوائي قيم المطالبات.
3- التوزيع الاحتمالي الإجمالي لقيم المطالبات.

(1/10) التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات

يتم إيجاد التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات من خلال اتباع الخطوات الآتية:

الخطوة الأولي: تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي عدد المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية (2016-2020).

بفرض أن y متغير عشوائي يعبر عن عدد المطالبات بحيث $(y = 0, 1, 2, \ldots)$ وأن هذا المتغير له توزيع احتمالي نظري متقطع. ولإيجاد التوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات نقوم أولا بإيجاد معالم التوزيع الفعلي خلال الفترة (2016-2020)، ثم نقوم باختبار جودة التوفيق لأحد التوزيعات الاحتمالية النظرية. والجدول التالي يوضح عدد المطالبات لكل وحدة من الوحدات محل الدراسة:

جدول (1)

التوزيع التكراري لعدد الوحدات وفقاً لعدد المطالبات في فرع أجسام السفن" اللنشات" خلال الفترة (2016-2020)

عدد المطالبات	عدد الوحدات
0	**2421**
1	**52**
2	**3**
3	**4**
4	**1**
الإجمالي	**2481**

المصدر: اعداد الباحث بالاعتماد على بيانات الشركتين محل الدراسة.

وبحساب معالم التوزيع الفعلي للبيانات نجد أن

- المتوسط

$$\sum y_i p(y_i) = 0.0298266827891979$$

- التباين

$$\sum p(y_i)(y_i-\bar{y})^2 = 0.045865709582265$$

جودة التوفيق للتوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث.

ولتحديد التوزيع الاحتمالي المناسب سوف نقوم باختبار مدى ملائمة البيانات السابقة في الجدول لأشهر التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المستخدمة في هذا الشأن وهما توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين السالب (سالم،2015):

أولاً: توزيع بواسون The Poisson Distribution

يعد توزيع بواسون من أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الشائع استخدامه في مجال التأمين حيث إن قيم المتغير العشوائي البواسونى تمثل أرقام صحيحة غير سالبة، لذا فعدد الحوادث أو عدد المطالبات والتي تمثل ظاهرة عشوائية يمكن التعبير عنها من خلال توزيع بواسون. وهذا التوزيع له العديد من الاستخدامات كما في الحالات نادرة الوقوع حيث تكون فرصة نجاح الحدث صغيرة وحجم العينة كبير كما في مجال ضبط الجودة للوحدات المعيبة في الإنتاج ويستخدم في الأحداث التي تقع وفقاً لمعدلات زمنية، والمتغير العشوائي المتقطع له توزيع بواسونى $y \sim P(\boldsymbol{\theta})$ إذا كانت دالة الاحتمال Probability mass function معطاه بالعلاقة:

$$\boldsymbol{P(y) = P(\,y\,;\,\theta) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^{y}}{y!} \qquad ; \qquad \theta > 0\,, \qquad y = 0, 1, 2, \ldots}$$

وتساوى الصفر بخلاف ذلك.

حيث:

$\boldsymbol{\theta}$ = متوسط التوزيع

$\boldsymbol{y}$ = متغير عشوائي يأخذ القيم الصحيحة من صفر فيما أكبر

ومن المعروف أن أهم خصائص توزيع بواسون تتمثل في Johnson et al., (2005):

- التوقع الرياضي (متوسط التوزيع) يعطى من العلاقة:

$$Mean = \mu = \mathrm{E(y)} = \boldsymbol{\theta}$$

- التباين يعطى من العلاقة:

$$Variance = \sigma^2 = V(y) = \boldsymbol{\theta}$$

- الالتواء يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Skewness = \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\theta}}}$$

- التفرطح يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Kurtosis = \beta_2 = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}} + 3$$

- الدالة المولدة للعزوم تعطى من العلاقة:

$$\mu_x(t) = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{t}})}$$

- الدالة المولدة للاحتمالات تعطى من العلاقة:

$$G(t) = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t})}$$

حساب الاحتمالات النظرية لعدد الحوادث:

لحساب الاحتمالات النظرية لعدد الحوادث للتأمين البحري أجسام سفن " اللنشات" يجب أولاً الحصول على معالم التوزيع. وهذا التوزيع بمعلمة واحدة $\boldsymbol{\theta}$، ويتم الحصول عليها من خلال مساواة $\boldsymbol{\theta}$ مع متوسط التوزيع الفعلي كما يلي:

$$Mean = \mu = \sigma^2 = \theta = 0.0298266827891979$$

ويمكن إيجاد الاحتمالات بالتعويض في معادلة التوزيع

$$P(y=0) = \frac{e^{-0.02982668} \times 0.02982668^0}{0!} = 0.970613743$$

$$P(y=1) = \frac{e^{-0.02982668} \times 0.02982668^1}{1!} = 0.028950188$$

$$P(y=2) = \frac{e^{-0.02982668} \times 0.02982668^2}{2!} = 0.000431744$$

$$P(y=3) = \frac{e^{-0.02982668} \times 0.02982668^3}{3!} = 4.2925\text{E}-06$$

$$P(y=4) = \frac{e^{-0.02982668} \times 0.02982668^4}{4!} = 3.20077\text{E}-08$$

ويلي ذلك اختبار الفروض الإحصائية لجودة التوفيق Goodness of fit من خلال مقارنة التوزيع الفعلي المتجمع بالتوزيع النظري المتجمع باستخدام اختبار كولومجروف سميرنوف حيث يتم إيجاد أكبر فرق مطلق بين الاحتمالين ثم مقارنته بقيمة كولومجروف الجدولية:

الفرض العدمي: بيانات عدد المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر تتبع توزيع بواسون.

الفرض البديل: بيانات عدد المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر لا تتبع توزيع بواسون.

ومما هو جدير بالذكر أن الفرض العدمي يعنى أن دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع المشاهد لعدد مطالبات أجسام السفن " اللنشات" تتفق مع دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع النظري" بواسون" لعدد مطالبات أجسام السفن " اللنشات.

جدول (2)

اختبار (K-S) لجودة التوفيق لتوزيع بواسون لعدد المطالبات في فرع أجسام السفن" اللنشات"

y_i	الاحتمال الفعلي المتجمع	الاحتمال النظري المتجمع	الفرق المطلق
0	**0.975816203**	**0.970613743**	**0.00520246**
1	**0.996775494**	**0.999563931**	**0.002788438**
2	**0.997984684**	**0.999995675**	**0.002010992**
3	**0.999596937**	**0.999999968**	**0.000403031**
4	**1**	**1**	**1.9189E-10**

المصدر: اعداد الباحث

من خلال الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق مطلق بين الاحتمال النظري المتجمع والاحتمال الفعلي المتجمع هو 0.00520246 وهي تمثل القيمة المحسوبة لاختبار كولومجروف سميرنوف والتي يتم مقارنتها بقيمة كولومجروف الجدولية حيث α=0.05 و n=2481

فتصبح القيمة الجدولية:

$$\frac{1.36}{\sqrt{2481}} = 0.02730395$$

وحيث أن قيمة كولومجروف الجدولية 0.02730395 أكبر من القيمة المحسوبة 0.0052 فلا نستطيع رفض الفرض العدمي والذي مفاده أن البيانات تتبع توزيع بواسون.

ثانياً: توزيع ثنائي الحدين السالب: Negative Binomial Distribution

ويسمى أيضاً بتوزيع باسكال ويتم استخدامه إذا كانت نتائج التجربة اما نجاح باحتمال p أو فشل باحتمال q=1-p حيث اجراء التجربة عدد y من المرات حتى يتم الحصول على عدد معين من مرات النجاح، ويمثل هذا التوزيع أحد التوزيعات المتقطعة التي تستخدم بكثرة في قطاع التأمين لتوفيق بيانات عدد المطالبات وخاصة عندما تكون الأخطار غير متجانسة (Hossack et al., 1999)، والمتغير العشوائي المتقطع له توزيع ثنائي الحدين السالب $y \sim nb(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ إذا كانت دالة الاحتمال Probability mass function معطاه بالعلاقة غيطان(2004ب):

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{P}(\,\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = \binom{\mathbf{y}+\mathbf{r}-\mathbf{1}}{\mathbf{y}} \mathbf{p}^{\mathbf{r}} (\mathbf{q})^{\mathbf{y}} \qquad ; \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$$

وتساوى الصفر بخلاف ذلك.

حيث: $r\,,p$ = هما معلمتا التوزيع و q = 1-p

$\boldsymbol{y}$ = متغير عشوائي يأخذ القيم الصحيحة من صفر فيما أكبر.

ومن المعروف أن أهم خصائص توزيع ثنائي الحدين السالب تتمثل في Johnson et al., (2005) :

- التوقع الرياضي (متوسط التوزيع) يعطى من العلاقة:

$$Mean = \mu = E(y) = \frac{rq}{p} = \frac{r(1-p)}{p}$$

- التباين يعطى من العلاقة:

$$Variance = \sigma^2 = V(y) = \frac{rq}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

- الالتواء يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Skewness = \beta_1 = \frac{2-p}{\sqrt{rq}} = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$$

- التفرطح يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Kurtosis = \beta_2 = 3 + \frac{6}{r} + \frac{p^2}{r(1-p)}$$

- الدالة المولدة للعزوم تعطى من العلاقة:

$$\mu_x(t) = \frac{p^r}{(1-e^t\, q)^r}$$

- الدالة المولدة للاحتمالات تعطى من العلاقة:

$$G(t) = \frac{p^r}{(1-t\, q)^r}$$

حساب الاحتمالات النظرية لعدد الحوادث

ولحساب الاحتمالات النظرية لعدد الحوادث يتم أولاً إيجاد معالم توزيع ثنائي الحدين السالب من خلال معادلة متوسط وتباين التوزيع الفعلي مع متوسط وتباين توزيع ثنائي الحدين السالب حيث أن توزيع ثنائي الحدين السالب بمعلمتين $\boldsymbol{r, p}$ و عليه فإن معالم التوزيع تكون على الشكل الآتي:

$$Mean = \mu = \frac{rq}{p} = 0.0298266827891979 \qquad \dots (1)$$

$$variance = \sigma^2 = \frac{rq}{p^2} = 0.045865709582265 \qquad \dots (2)$$

وبقسمة المعادلة رقم (1) على المعادلة رقم (2):

$$\frac{rq}{p} \times \frac{p^2}{rq} = \frac{Mean}{variance} = \frac{0.0298266827891979}{0.045865709582265}$$

$p = 0.650304618872202$

$\because\ q = 1 - p \qquad \therefore\ q = 1 - 0.65030461887 = 0.3496953811$

وبالتعويض في المعادلة رقم (1)

$$Mean = \frac{\mathrm{r} \times 0.3496953811}{0.650304618872202}$$

$\therefore\ r = 0.055466645$

وحيث أن قيمة $r = 0.055466645$ لا تمثل قيمة صحيحة موجبة فلا يمكنا قول إن البيانات تتبع توزيع ثنائي الحدين السالب.

وبناء على ما سبق من خلال جودة التوفيق يمكنا قول إن البيانات تتبع توزيع بواسون ووفقا للتحليل البيزي فإن المعلمة θ تمثل متغير عشوائي يتم إيجاد التوزيع الاحتمالي لها.

الخطوة الثانية: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي (Posterior distribution) للمعلمة θ خلال فترة الخبرة ما قبل 2013:

عندما تتوافر معلومات محدودة أولا تتوافر أي معلومات عن المعلمة θ، وذلك خلال الفترة ما قبل 2013 ونرغب في تمثيل هذه المعرفة بتوزيع احتمالي يعبر عنها فإننا نلجأ إلي ما يعرف بالتوزيعات القبلية الغير معلمة *Non informative priors* وهي توزيعات تعبر عن المعرفة القليلة أو النادرة. ومن هذه التوزيعات الصياد (1993):

- **التوزيع المنتظم**

وهناك أكثر من صيغة وتتوقف كل صيغة على المدي الذي تتراوح فيه المعلمة θ كما هو موضح أدناه:

$$1)\ \pi\theta = \frac{1}{b-a} \qquad a < \theta < b$$
$$2)\ \pi\theta \propto d\theta \qquad -\infty < \theta < \infty$$
$$3)\ \pi\theta \propto \frac{d\theta}{\theta} \qquad 0 < \theta < \infty$$

- **قاعدة عدم الاختلاف أو جيفريز للثبات**

وهي مبنيه على أساس أن العنصر الاحتمالي في التوزيع القبلي لا يتغير تحت تأثير أي تحويله.

$$\pi\theta = I^{0.5}(\theta)$$

- **توزيع غير معلم يستخدم في حالة الجهل التام بأي معلومات عن المعلمة θ.**

ويستخدم عادة في حالة توزيع ذي الحدين وتوزيع برنولي وهو:

$$\pi\theta = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

وحيث أن قيمة θ تتراوح بين $0 < \theta < \infty$ فإن التوزيع الاحتمالي البعدي حيث لا توجد عينة هو $\pi\theta$[1]، ويكون تقدير قيمة θ قبل الحصول على العينة:

$$\boldsymbol{\pi}\theta \propto \frac{\mathbf{1}}{\theta}$$

الخطوة الثالثة: تحديد دالة الإمكان خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015):

الجدول التالي يوضح توزيع عدد المطالبات وفقاً لعدد الوحدات خلال الفترة القبلية (2013– 2015).

جدول (3)

التوزيع التكراري لعدد الوحدات وفقاً لعدد المطالبات في فرع أجسام السفن " اللنشات" خلال الفترة (2013-2015).

عدد الوحدات	عدد المطالبات
687	0
11	1
1	2
1	3
700	الاجمالي

المصدر: اعداد الباحث بالاعتماد على بيانات الشركتين محل الدراسة.

وحيث أن المتغير العشوائي عدد المطالبات يتبع توزيع بواسون خلال فترة الخبرة الأساسية، فإن المتغير العشوائي عدد المطالبات يتبع توزيع بواسون خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015) (إسماعيل،2005). وبالتالي فإن متوسط التوزيع = متوسط عدد المطالبات.

$$Mean = \ \theta = 0.0228571428571429$$

وحيث أن عدد المطالبات تتبع توزيع بواسون فيكون شكل دالة التوزيع خلال فترة الخبرة القبلية كما يلي:

$$P(y) = f(y_i/\theta) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^{y}}{y!} \qquad ; \quad \theta > 0\ , \qquad y = 0,1,2, \ldots$$

ونجد أن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015) تكون علي الشكل الآتي:

(1) التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة بدون بيانات ما قبل(2013) يمثل التوزيع الاحتمالي القبلي خلال فترة الخبرة القبلية (2013- 2015) راجع في ذلك (إسماعيل، 2005).

$$f\left(\underline{y}_1/\theta\right) = \prod_{i=1}^{n_1} f(y_i/\theta)$$

$$f\left(\underline{y}_1/\theta\right) = \prod_{i=1}^{n_1} \frac{e^{-\theta}\ \theta^{y}}{y!}$$

$$f\left(\underline{y}_1/\theta\right) \propto \theta^{\sum_{i=1}^{n_1} y_i} \times e^{-n\theta}$$

حيث تم اختزال المقدار الذي لا يعتمد على θ وهو $\frac{1}{y!}$ في ثابت التناسب. وبالتعويض عن $T_1 = \sum_{i=1}^{n_1} y_i$ والتي تسمي بالإحصاء الكافي فإن دالة الإمكان تتناسب مع المقدار التالي:

$$f\left(\underline{y}_1/\theta\right) \propto \theta^{T_1} \times e^{-n_1\theta}$$

الخطوة الرابعة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015) $\boldsymbol{\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right)}$.

ولتحديد دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015) يتم دمج دالة الإمكان مع دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة ما قبل 2013 كما يلي:

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right) \propto f\left(\underline{y}_1/\theta\right) \pi\theta$$

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right) \propto \theta^{T_1} \times e^{-n_1\theta} \times \frac{1}{\theta}$$

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right) \propto \theta^{T_1} \times e^{-n_1\theta} \times \theta^{-1}$$

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right) \propto \theta^{T_1-1} \times e^{-n_1\theta}$$

ومن الدالة السابقة يتضح أن التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية $\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right)$ يتناسب مع شكل دالة جاما بمعالم $(T_1\,, n_1)$، حيث أن: $T_1 = 16 \quad \&\ n_1 = 700$ وتكون دالة التوزيع الاحتمالي علي الشكل الآتي:

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right) = P(\ \theta\ ;\ T_1\,, n_1) = \frac{{n_1}^{T_1}}{\Gamma(T_1)} \theta^{T_1-1}\ e^{-\theta n_1}$$

ومعالم هذا التوزيع هي $(T_1\,, n_1)$.

الخطوة الخامسة: تحديد دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية (2016 -2020).

يمكن تحديد دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية كما يلي:

$$f\left(\underline{y}_2/\theta\right) = \prod_{i=1}^{n_2} f\left(\underline{y}_2/\theta\right)$$

$$f\left(\underline{y}_2/\theta\right) = \prod_{i=1}^{n_2} \frac{e^{-\theta}\ \theta^{y_i}}{y!}$$

$$f\left(\underline{y}_2/\theta\right) \propto \theta^{\sum_{i=1}^{n_2} y_i} \times e^{-\theta n_2}$$

حيث تم اختزال المقدار الذي لا يعتمد على θ وهو $\frac{1}{y!}$ في ثابت التناسب. وبالتعويض عن $T_2 = \sum_{i=1}^{n_2} y_i$ فإن دالة الإمكان تتناسب مع المقدار التالي:

$$f\left(\underline{y}_2/\theta\right) \propto \theta^{T_2} \times e^{-n_2\theta}$$

الخطوة السادسة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi\left(\boldsymbol{\theta}/\underline{\boldsymbol{y}}_2\right)$ للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$ خلال فترة الخبرة الأساسية (2016 -2020).

تم إيجاد التوزيع الاحتمالي البعدي لفترة الخبرة الأساسية $\pi\left(\theta/\underline{y}_2\right)$ من خلال دمج دالة الإمكان لفترة الخبرة الأساسية $f\left(\underline{y}_2/\theta\right)$ مع التوزيع الاحتمالي البعدي لفترة الخبرة القبلية $\pi\left(\theta/\underline{y}_1\right)$:

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_2\right) \propto f\left(\underline{y}_2/\theta\right) \times \pi\left(\theta/\underline{y}_1\right)$$

وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي البعدي تتناسب مع:

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_2\right) \propto \theta^{T_1-1} \times e^{-n_1\theta} \times \theta^{T_2} \times e^{-n_2\theta}$$

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_2\right) \propto \theta^{T_1+T_2-1} \times e^{-\theta n_1-\theta n_2}$$

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_2\right) \propto \theta^{T_1+T_2-1} \times e^{-\theta(n_1+n_2)}$$

وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية تتناسب مع دالة التوزيع الاحتمالي جاما وتكون الدالة على الشكل التالي:

$$\pi\left(\theta/\underline{y}_2\right) = \frac{(n_1+n_2)^{T_1+T_2}}{\Gamma(T_1+T_2)}\theta^{T_1+T_2-1} \times e^{-\theta(n_1+n_2)}$$

ومعالم التوزيع هي $(T_1 + T_2\ , n_1 + n_2)$ بحيث:

$$T_1 = 16 \quad \& \ n_1 = 700 \quad \& \quad T_2 = 74 \quad \& \ n_2 = 2481$$

الخطوة السابعة: تحديد التوزيع الاحتمالي التنبؤي للمشاهدات مستقبلاً لعدد المطالبات $P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right)$.

يتم الحصول على التوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات $P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right)$ بإجراء التكامل المحدود لحاصل ضرب دالة التوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات للسنة القادمة $f\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right)$ في دالة التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi\left(\theta/\underline{y}_2\right)$ للمعلمة θعلى مدي المعلمة $0 < \theta < \infty$ كما يلي:

$$P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \int_0^\infty f(y_{n+1}/\theta) \times \pi\left(\theta/\underline{y}_2\right).d\beta$$

حيث إن:

$$f(y_{n+1}/\theta) = \frac{e^{-\theta}\ \theta^{y_{n+1}}}{y_{n+1}!}$$

وبالتالي

$$P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\theta}\ \theta^{y_{n+1}}}{y_{n+1}!} \times \frac{(n_1+n_2)^{T_1+T_2}}{\Gamma(T_1+T_2)}\theta^{T_1+T_2-1} \times e^{-\theta(n_1+n_2)}$$

$$P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \frac{(n_1+n_2)^{T_1+T_2}}{y_{n+1}!\,\Gamma(T_1+T_2)}\int_0^\infty \theta^{y_{n+1}+T_1+T_2-1} \times e^{-\theta(n_1+n_2+1)}.d\beta$$

وبضرب المعادلة السابقة في المقدار

$$\frac{\Gamma(y_{n+1}+T_1+T_2)\times(n_1+n_2+1)^{y_{n+1}+T_1+T_2}}{\Gamma(y_{n+1}+T_1+T_2)\times(n_1+n_2+1)^{y_{n+1}+T_1+T_2}}$$

$$\therefore P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \frac{(n_1+n_2)^{T_1+T_2} \times \Gamma(y_{n+1}+T_1+T_2)}{y_{n+1}!\,\Gamma(T_1+T_2) \times (n_1+n_2+1)^{y_{n+1}+T_1+T_2}}$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(n_1+n_2+1)^{y_{n+1}+T_1+T_2}}{\Gamma(y_{n+1}+T_1+T_2)} \theta^{y_{n+1}+T_1+T_2-1} \times e^{-\theta(n_1+n_2+1)}.\,d\beta$$

وحيث أن تكامل دالة جاما بحدود من صفر إلى مالانهاية يساوي واحد

$$\therefore P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \frac{(n_1+n_2)^{T_1+T_2} \times \Gamma(y_{n+1}+T_1+T_2)}{y_{n+1}!\,\Gamma(T_1+T_2) \times (n_1+n_2+1)^{y_{n+1}+T_1+T_2}}$$

$$\therefore P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \frac{\Gamma\left(y_{n+1}+T_1+T_2\right)}{\Gamma(y_{n+1}+1)\Gamma(T_1+T_2)} \times \left(\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+1}\right)^{T_1+T_2}$$

$$\times \left(\frac{1}{n_1+n_2+1}\right)^{y_{n+1}}$$

$$P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \binom{y_{n+1}+T_1+T_2-1}{y_{n+1}} \left(\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+1}\right)^{T_1+T_2} \left(\frac{1}{n_1+n_2+1}\right)^{y_{n+1}}$$

وهذه الدالة هي دالة ثنائي الحدين السالب بمعالم $\left(T_1+T_2, \frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+1}\right)$

(2/10) العزوم الخاصة بالتوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات.

(1/2/10) العزوم الأربعة حول الصفر

$$M(t) = p^r[1-(1-p)e^t]^{-r}$$

وبالتعويض عن قيمة $p = \frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+1}$ و$r = T_1+T_2$ نحصل على القيم الآتية:

$$M_1' = qr \times p^{-1} = \frac{qr}{p} = 0.02829298962590$$

$$M_2' = \frac{qr(p+qr+q)}{p^2} = \frac{qr(1+qr)}{p^2} = 0.02910237725745$$

$$M_3' = \frac{qr(1+3qr+2q)}{p^2} + \frac{q^3r^3+3q^3r^2+2q^3r}{p^3} = 0.03074456141$$

$$M_4' = \frac{7q^2r^2+6q^2r+qr)}{p^2} + \frac{6q^3r^3+18q^3r^2+12q^3r)}{p^3} + \frac{q^4r^4+6q^4r^3+11q^4r^2+6q^4r)}{p^4} = 0.03409984073894$$

ثانياً العزوم المركزية من الرتبة r وهى العزوم حول المتوسط ونحصل عليها من العلاقة

$$M_r = E(x-m)^r$$

وباستخدام العلاقة بين العزوم المركزية " حول المتوسط" والعزوم حول الصفر البلقيني وآخرون (2018) ؛ Johnson et al.,(2005) :

$$M_1 = zero$$

$$M_2 = M_2' - (M_1')^2 = \frac{r(q)}{p^2} = 0.0283018839954789$$

$$M_3 = M_3' - 3M_2'M_1' + 2(M_1')^3 = \frac{rq(1+q)}{p^3} 0.0283196783268184$$

$$M_4 = M_4' - 4M_3'M_1' + 6M_2'(M_1')^2 - 3(M_1')^4$$
$$= \frac{3r^2q^2}{p^4} + \frac{rq(p^2+6q)}{p^4} = 0.0307582736844057$$

والعزوم السابقة خاصة بوحدة خطر واحدة وبالتالي فللوصول إلى العزوم الخاصة بإجمالي الوحدات نستخدم المعادلات الآتية Aiuppa(1988):

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i$$

$$M_N = mM$$

$$M_2(N) = mM_2$$

$$M_3(N) = mM_3$$

$$M_4(N) = m\left(M_4 - 3{M_2}^2\right) + 3m^2{M_2}^2$$

وحيث أن m تمثل عدد الوحدات = 2481.

$$M_2(N) = 2481 \times 0.028301884 = 70.2169741927832 \cong 70$$

$$M_3(N) = 2481 \times 0.028319678 = 70.2611219288364$$

$$M_4(N) = 2481 \times (0.030758274 - 3 \times (0.028301884)^2)$$
$$+ 3 \times (2481)^2 \times (0.028301884)^2$$
$$= 14861.6198534066$$

(3/10) التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات:

من أجل تحديد التوزيع المناسب يتم اتباع الخطوات الآتية:

الخطوة الأولي: تحديد التوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية (2016-2020).

ويتم ذلك من خلال اختبار مدى ملائمة البيانات لمجموعة من التوزيعات المتصلة للمتغير العشوائي المتصل قيمة المطالبات والتوزيعات الأكثر تمثيلا لبيانات المطالبات بقطاع التأمين والتي تكون ملتوية جهة اليمين هي سالم (2015):

1- توزيع جاما
2- التوزيع الأسى السالب
3- التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي
4- توزيع باريتو

حيث سيتم استخدام البيانات التي تم الحصول عليها من شركتي التأمين محل الدراسة لتقدير معالم التوزيع الفعلي ومقارنتها بمعالم هذه التوزيعات النظرية لمعرفة أي منها أكثر ملائمة لبيانات أجسام السفن. ويرمز للمتغير العشوائي قيم المطالبات بالرمز x_i وفيما يلي جدول يوضح توزيع عدد المطالبات وفقاً لفئات الخسارة.

جدول (4)
التوزيع التكراري لعدد المطالبات وفقاً لفئات الخسارة في فرع أجسام السفن " اللنشات"
خلال الفترة (2016 -2020)

القيمة بالألف جنيه

عدد المطالبات	فئات الخسارة
43	1- 100
7	100 - 200
5	200 - 300
4	300 - 500
2	500 - 1000
8	1000 - 4000
5	13000 - 20000
74	الإجمالي

المصدر: سجلات التعويضات بشركات التأمين محل الدراسة

وبحساب معالم التوزيع الفعلي للبيانات السابقة نجد أن التوقع يساوي 1487.16216216 والتباين يساوي 16890950.0547845

- **جودة التوفيق للتوزيع الاحتمالي لحجم المطالبات.**

ولتحديد التوزيع الاحتمالي المناسب سوف نقوم باختبار مدى ملائمة البيانات السابقة في الجدول لأحد التوزيعات المتصلة الأتية:

أولاً: توزيع جاما Gamma Distribution

يعد توزيع جاما من أهم التوزيعات الاحتمالية الشائع استخدمها في القطاع التأميني، والمتغير العشوائي المتصل له توزيع جاما $x \sim \Gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ إذا كانت دالة الاحتمال Probability density function معطاه بالعلاقة:

$$f(x) = P(\, x\, ;\, \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-\beta x} \qquad ; \quad \alpha > 0\ , \qquad x > 0$$

وتساوى الصفر بخلاف ذلك.

حيث: $(\alpha \text{ ، } \beta)$: تمثل معلمات توزيع جاما وهي قيم موجبة.

ومن المعروف أن خصائص توزيع جاما تتمثل في غيطان (2004ب):

- التوقع الرياضي (متوسط التوزيع) يعطى من العلاقة:

$$Mean = \mu = \mathrm{E}(x) = \frac{\alpha}{\beta}$$

- التباين يعطى من العلاقة:

$$Variance = \sigma^2 = V(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

- الالتواء يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Skewness = \beta_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

- التفرطح يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Kurtosis = \beta_2 = 3 + \frac{6}{\alpha}$$

- الدالة المولدة للعزوم تعطى من العلاقة:

$$M(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha} \qquad ; \quad \beta > t$$

حساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات:

لحساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات للتأمين البحري أجسام السفن " اللنشات" يتم أولاً إيجاد معالم توزيع جاما من خلال معادلة متوسط وتباين التوزيع الفعلي مع متوسط وتباين توزيع جاما

$$Mean = \mu = \frac{\alpha}{\beta} = 1487.16216216216$$

$$Variance = \sigma^2 = V(x) = \frac{\alpha}{\beta^2} = 16890950.0547845$$

وبقسمة المعادلة الأولى على المعادلة الثانية

$$\frac{\alpha}{\beta} \div \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1487.16216216216}{16890950.0547845}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{1487.16216216216}{16890950.0547845}$$

$$\beta = \frac{1487.16216216216}{16890950.0547845} = 0.0000880449090985803$$

$$\alpha = \beta \times 1487.16216216216 = 0.130937057382416$$

ويمكن إيجاد الاحتمالات بالتعويض في معادلة التوزيع أو باستخدام برنامج SPSS من خلال المعادلة الآتية:

```
COMPUTE y=CDF.GAMMA(x,0.130937057382416,0.0000880449090985803).
EXECUTE
```

$P(X \leq 100) = 0.572140337$
$P(X \leq 200) = 0.625861539$
$P(X \leq 300) = 0.659320309$
$P(X \leq 500) = 0.703512947$
$P(X \leq 1000) = 0.766538905$
$P(X \leq 4000) = 0.893773345$
$P(X \leq 20000) \cong 1$

ويلي ذلك اختبار الفروض الإحصائية لجودة التوفيق Goodness of fit من خلال مقارنة التوزيع الفعلي المتجمع بالتوزيع النظري المتجمع باستخدام اختبار كولومجروف سميرنوف حيث يتم إيجاد أكبر فرق مطلق بين الاحتمالين ثم مقارنته بقيمة كولومجروف الجدولية:

الفرض العدمي: بيانات قيم المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر تتبع توزيع جاما.

الفرض البديل: بيانات قيم المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر لا تتبع توزيع جاما.

ومما هو جدير بالذكر أن الفرض العدمي يعنى أن دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع المشاهد لقيم مطالبات أجسام السفن " اللنشات" تتفق مع دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع النظري" جاما" لقيم مطالبات أجسام السفن " اللنشات".

جدول (5)

اختبار (K-S) لجودة التوفيق لتوزيع جاما لقيم المطالبات في فرع أجسام السفن" اللنشات"

الفئات	الاحتمال النظري التجميعي	الاحتمال الفعلي التجميعي	الفرق المطلق
1- 100	**0.572140337**	**0.581081081**	**0.008940744**
100- 200	**0.625861539**	**0.675675676**	**0.049814136**
200- 300	**0.659320309**	**0.743243243**	**0.083922935**
300- 500	**0.703512947**	**0.797297297**	**0.09378435**
500- 1000	**0.766538905**	**0.824324324**	**0.057785419**
1000- 4000	**0.893773345**	**0.932432432**	**0.038659087**
13000- 20000	**1**	**1**	**0**

المصدر: اعداد الباحث

من خلال الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق مطلق بين الاحتمال النظري المتجمع والاحتمال الفعلي المتجمع هو 0.09378435 وهي تمثل القيمة المحسوبة لاختبار كولومجروف سميرنوف والتي يتم مقارنتها بقيمة كولومجروف الجدولية حيث α=0.05 و n=74

فتصبح القيمة الجدولية:

$$\frac{1.36}{\sqrt{74}} = 0.158096789$$

وحيث أن قيمة كولومجروف الجدولية0.158096789 أكبر من القيمة المحسوبة 0.09378435 فلا نستطيع رفض الفرض العدمي والذي مفاده أن البيانات تتبع توزيع جاما.

ثانياً: توزيع الأسى السالب The Negative Exponential Distribution

يعد التوزيع الأسى السالب حالة خاصة لتوزيع جاما عندما $(\boldsymbol{\alpha} = 1)$، والمتغير العشوائي المتصل له توزيع أسى سالب $x\sim EXP(\boldsymbol{\lambda})$ إذا كانت دالة الاحتمال Probability density function معطاه بالعلاقة:

$$\boldsymbol{f(x) = P(\,x\,;\,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad ; \qquad \lambda > 0\,, \qquad x > 0}$$

وتساوى الصفر بخلاف ذلك.

حيث: $\boldsymbol{\lambda}$= تمثل معلمة التوزيع

ومن المعروف أن خصائص توزيع الأسى السالب تتمثل في Krishnamoorthy (2016):

- التوقع الرياضي (متوسط التوزيع) يعطى من العلاقة:

$$Mean = \mu = \mathrm{E(x)} = \frac{1}{\lambda}$$

- التباين يعطى من العلاقة:

$$Variance = \sigma^2 = V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- الالتواء يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of} Skewness = \beta_1 = 2$$

- التفرطح يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Kurtosis = \beta_2 = 9$$

- الدالة المولدة للعزوم تعطى من العلاقة:

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad ; \quad \lambda > t$$

- دالة الاحتمال التراكمي (الدالة التوزيعية) تعطى من العلاقة:

$$F(X) = 1 - \boldsymbol{e^{-\lambda x}} \quad ; \quad \lambda > 0 \ , \ x > 0$$

حساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات:

لحساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات للتأمين البحري أجسام السفن " اللنشات" يتم أولاً إيجاد معالم التوزيع الأسى السالب من خلال معادلة متوسط التوزيع الفعلي مع متوسط التوزيع الأسى السالب $\frac{\mathbf{1}}{\lambda}$ حيث أن التوزيع الاسى السالب بمعلمة واحدة λ وعليه فإن معلمة التوزيع تكون على الشكل الآتي:

$$Mean = \mu = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{1487.162162} = 0.000672422$$

ويمكن إيجاد الاحتمالات بالتعويض في معادلة التوزيع

$$P(X \leq 100) = 1 - e^{-0.000672422 \times 100} = 0.065031241$$

$$P(X \leq 200) = 1 - e^{-0.000672422 \times 200} = 0.125833419$$

$$P(X \leq 300) = 1 - e^{-0.000672422 \times 300} = 0.182681556$$

$$P(X \leq 500) = 1 - e^{-0.000672422 \times 500} = 0.28552753$$

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0.000672422 \times 1000} = 0.48952909$$

$$P(X \leq 4000) = 1 - e^{-0.000672422 \times 4000} = 0.932097777$$

$$P(X \leq 20000) = 1 - e^{-0.000672422 \times 20000} = 0.999998556 \cong 1$$

ويلي ذلك اختبار الفروض الإحصائية لجودة التوفيق Goodness of fit من خلال مقارنة التوزيع الفعلي المتجمع بالتوزيع النظري المتجمع باستخدام اختبار كولومجروف سميرنوف حيث يتم إيجاد أكبر فرق مطلق بين الاحتمالين ثم مقارنته بقيمة كولومجروف الجدولية:

الفرض العدمي: بيانات قيم المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر تتبع التوزيع الأسي السالب.

الفرض البديل: بيانات قيم المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر لا تتبع التوزيع الأسي السالب.

ومما هو جدير بالذكر أن الفرض العدمي يعنى أن دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع المشاهد لقيم مطالبات أجسام السفن " اللنشات" تتفق مع دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع النظري" الأسي السالب " لقيم مطالبات أجسام السفن " اللنشات".

جدول (6)

اختبار (K-S) لجودة التوفيق للتوزيع الأسي السالب لقيم المطالبات في فرع أجسام السفن" اللنشات"

الفئات	الاحتمال النظري التجميعي	الاحتمال الفعلي التجميعي	الفرق المطلق
1- 100	**0.065031241**	**0.581081081**	**0.51604984**
100- 200	**0.125833419**	**0.675675676**	**0.549842257**
200- 300	**0.182681556**	**0.743243243**	**0.560561687**
300- 500	**0.28552753**	**0.797297297**	**0.511769767**
500- 1000	**0.48952909**	**0.824324324**	**0.334795234**
1000- 4000	**0.932097777**	**0.932432432**	**0.000334655**
13000- 20000	**1**	**1**	**0**

المصدر: اعداد الباحث

من خلال الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق مطلق بين الاحتمال النظري المتجمع والاحتمال الفعلي المتجمع هو 0.560561687 وهي تمثل القيمة المحسوبة لاختبار كولومجروف سميرنوف والتي يتم مقارنتها بقيمة كولومجروف الجدولية حيث α=0.05 و n=74

فتصبح القيمة الجدولية:

$$\frac{1.36}{\sqrt{74}} = 0.158096789$$

وحيث أن قيمة كولومجروف الجدولية0.158096789 أصغر من القيمة المحسوبة 0.560561687 فإنه يمكنا أن نرفض الفرض العدمي والذي مفاده أن البيانات تتبع التوزيع الأسى السالب.

ثالثاً: التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي The lognormal Distribution

يعد التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية، والمتغير العشوائي المتصل له توزيع لوغاريتمي طبيعي $x \sim \text{logN}.(\mu, \sigma^2)$ إذا كانت دالة الاحتمال Probability density function معطاه بالعلاقة:

$$f(x) = P(x\,;\,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \;;\; \sigma > 0 \quad x > 0$$

وتساوى الصفر بخلاف ذلك.

حيث: $\boldsymbol{\sigma^2},\boldsymbol{\mu}$= معلمات التوزيع

و خصائص التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي تتمثل في Krishnamoorthy (2016) **:**

- التوقع الرياضي (متوسط التوزيع) يعطى من العلاقة:

$$Mean = \mu = E(x) = \boldsymbol{e^{\mu+\sigma^2/2}}$$

- التباين يعطى من العلاقة:

$$Variance = \sigma^2 = V(x) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

- الالتواء يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Skewness = \beta_1 = \left(e^{\sigma^2} + 2\right) \times \sqrt{\left(e^{\sigma^2} - 1\right)}$$

- التفرطح يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Kurtosis = \beta_2 = e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 3$$

- العزوم حول الصفر تعطى من العلاقة:

$$\mu_r' = \boldsymbol{e}^{[\boldsymbol{r\mu+r^r\sigma^2}/2]}$$

حساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات:

لحساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات للتأمين البحري أجسام السفن " اللنشات" يتم أولاً إيجاد معالم التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي من خلال معادلة متوسط وتباين التوزيع الفعلي مع متوسط وتباين التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

$$Mean = \mu = \boldsymbol{e^{\mu+\sigma^2/2}} = 1487.162162$$

$$Variance = \sigma^2 = V(x) = \boldsymbol{e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)} = 16890950.05$$

وبقسمة المعادلة الثانية على مربع المعادلة الأولى

$$\boldsymbol{e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \div \left(e^{\mu+\sigma^2/2}\right)^2} = \frac{16890950.05}{1487.162162^{\,2}}$$

$$\boldsymbol{e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \div e^{2\mu+\sigma^2}} = \frac{16890950.05}{1487.162162^{\,2}}$$

$$\boldsymbol{\left(e^{\sigma^2} - 1\right)} = \frac{16890950.05}{1487.162162^{\,2}}$$

$$\left(e^{\sigma^2}\right) = \frac{16890950.05}{1487.162162^{\,2}} + 1$$

$$\therefore\ \sigma = 1.468361363 \quad \& \quad \mu = 6.226582447$$

ويمكن إيجاد الاحتمالات بالتعويض في معادلة التوزيع

$$P(X \leq 100) = 0.13567$$
$$P(X \leq 200) = 0.26435$$
$$P(X \leq 300) = 0.35942$$
$$P(X \leq 500) = 0.49601$$
$$P(X \leq 1000) = 0.67724$$
$$P(X \leq 4000) = 0.92073$$
$$P(X \leq 20000) = 0.99379 \cong 1$$

ويلي ذلك اختبار الفروض الإحصائية لجودة التوفيق Goodness of fit من خلال مقارنة التوزيع الفعلي المتجمع بالتوزيع النظري المتجمع باستخدام اختبار كولومجروف سميرنوف حيث يتم إيجاد أكبر فرق مطلق بين الاحتمالين ثم مقارنته بقيمة كولومجروف الجدولية:

الفرض العدمي: بيانات قيم المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

الفرض البديل: بيانات قيم المطالبات في التأمين البحري (أجسام سفن – اللنشات) في مصر لا تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

ومما هو جدير بالذكر أن الفرض العدمي يعنى أن دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع المشاهد لقيم مطالبات أجسام السفن " اللنشات" تتفق مع دالة الاحتمال التجميعي للتوزيع النظري" اللوغاريتمي الطبيعي " لقيم مطالبات أجسام السفن " اللنشات".

جدول (7)

اختبار (K-S) لجودة التوفيق للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي لقيم المطالبات في فرع أجسام السفن" اللنشات"

الفئات	لوغاريتم الحد الأعلى للفئة	الدرجة المعيارية	الاحتمال النظري التجميعي	الاحتمال الفعلي التجميعي	الفرق المطلق
1-100	4.605170	-1.1	0.13567	0.581081081	0.445411
100- 200	5.298317	-0.63	0.26435	0.675675676	0.411326
200- 300	5.703782	-0.36	0.35942	0.743243243	0.383823
300- 500	6.214608	-0.01	0.49601	0.797297297	0.301287
500- 1000	6.907755	0.46	0.67724	0.824324324	0.147084
1000- 4000	8.294049	1.41	0.92073	0.932432432	0.011702
13000- 20000	9.9034876	2.5	0.99379	1	0.00621

المصدر: اعداد الباحث

من خلال الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق مطلق بين الاحتمال النظري المتجمع والاحتمال الفعلي المتجمع هو 0.445411 وهي تمثل القيمة المحسوبة لاختبار كولومجروف سميرنوف والتي يتم مقارنتها بقيمة كولومجروف الجدولية حيث $\alpha=0.05$ و n=74

فتصبح القيمة الجدولية:

$$\frac{1.36}{\sqrt{74}} = 0.158096789$$

وحيث أن قيمة كولومجروف الجدولية0.158096789 أصغر من القيمة المحسوبة 0.445411 فإنه يمكنا أن نرفض الفرض العدمي والذي مفاده أن البيانات تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

رابعاً: توزيع باريتو Pareto Distribution

يتم استخدام توزيع باريتو بصفة أساسية في مجال التأمينات العامة حيث يعتبر أداة أساسية في تقدير أقساط إعادة التأمين وتقدير حدود الاحتفاظ بالخطر(سالم،2015)، والمتغير العشوائي المتصل له توزيع باريتو $x \sim \mathrm{P}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ إذا كانت دالة الاحتمال Probability density function معطاه بالعلاقة:

$$\boldsymbol{f(x) = P(\,x\,;\,\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}(\frac{\beta}{x})^{\alpha+1}} \qquad ; \quad \boldsymbol{x \geq \beta \quad , \alpha > 0}$$

وتساوى الصفر بخلاف ذلك.

حيث: $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ = معلمات التوزيع

و خصائص توزيع باريتو تتمثل في غيطان(2004ب):

- التوقع الرياضي (متوسط التوزيع) يعطى من العلاقة:

$$Mean = \mu = \mathrm{E(x)} = \boldsymbol{\frac{\alpha\beta}{\alpha - 1}} \ , \boldsymbol{\alpha > 1}$$

- التباين يعطى من العلاقة:

$$Variance = \sigma^2 = V(x) = \boldsymbol{\frac{\alpha\beta^2}{\alpha - 2}} - \left(\boldsymbol{\frac{\alpha\beta}{\alpha - 1}}\right)^2 \quad , \quad \boldsymbol{\alpha} > 2$$

- الالتواء يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Skewness = \beta_1 = \boldsymbol{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3}\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}} \quad , \quad \boldsymbol{\alpha > 3}$$

- التفرطح يعطى من العلاقة

$$\text{Coefficient of } Kurtosis = \beta_2 = \boldsymbol{\frac{3(\alpha - 2)(3\alpha^2 + \alpha + 2)}{\alpha(\alpha - 3)(\alpha - 4)}} \ , \ \boldsymbol{\alpha > 4}$$

- الدالة المولدة للعزوم تعطى من العلاقة:

$$\mu_r' = \frac{\alpha\sigma^r}{\alpha - r} \qquad ; \quad \alpha > r$$

- دالة الاحتمال التراكمي (الدالة التوزيعية) تعطى من العلاقة:

$$F(X) = 1 - (\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{\alpha}} \qquad ; \qquad \boldsymbol{x} \geq \beta$$

حساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات:

لحساب التكرارات النظرية لقيم المطالبات للتأمين البحري أجسام السفن " اللنشات" يتم أولاً إيجاد معالم توزيع باريتو من خلال معادلة متوسط وتباين التوزيع الفعلي مع متوسط وتباين توزيع باريتو

$$Mean = \mu = \frac{\boldsymbol{\alpha\beta}}{\boldsymbol{\alpha - 1}} = 1487.162162$$

$$Variance = \sigma^2 = V(x) = \frac{\boldsymbol{\alpha\beta^2}}{\boldsymbol{\alpha - 2}} - (\frac{\boldsymbol{\alpha\beta}}{\boldsymbol{\alpha - 1}})^2 = 16890950.05$$

وبقسمة المعادلة الثانية على مربع المعادلة الأولى:

$$\left[\frac{\alpha\beta^2}{\alpha - 2} - (\frac{\alpha\beta}{\alpha - 1})^2\right] \div (\frac{\alpha\beta}{\alpha - 1})^2 = \frac{16890950.05}{1487.162162^2}$$

$$\left[\frac{\alpha\beta^2}{\alpha - 2} \div (\frac{\alpha\beta}{\alpha - 1})^2\right] - 1 = 7.63725732$$

$$\left[\frac{\alpha\beta^2}{\alpha - 2} \times \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2\beta^2}\right] - 1 = 7.63725732$$

$$\left[\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha(\alpha - 2\ )}\right] - 1 = 7.63725732$$

$$\left[\frac{(\alpha - 1)^2 - (\alpha^2 - 2\alpha)}{\alpha^2 - 2\alpha}\right] = 7.63725732$$

$$\left[\frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha}\right] = 7.63725732$$

$$7.63725732\alpha^2 - 15.27451464\alpha - 1 = 0$$

وباستخدام القانون العام لحل المعادلات التربيعية:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \ \alpha = 2.063455$$

ولإيجاد قيمة β **يتم التعويض عن قيمة** α في المعادلة الأولى الخاصة بالمتوسط:

$$\beta = \frac{(\alpha - 1) \times 1487.162162}{\alpha}$$

$$\beta = \frac{1.063455 \times 1487.162162}{2.063455}$$

$$\therefore \ \beta = 766.4475538$$

وحيث أن قيمة بيتا أكبر من 100 وهو الحد الأعلى للفئة الأولى وهو ما لا يتوافق مش شرط توزيع باريتو بأن يكون $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{\beta}$ وبالتالي فإن هذا التوزيع لا يناسب البيانات الفعلية.

وبالنظر الى نتائج جودة المطابقة لحجم المطالبات مع أحد التوزيعات المتصلة نجد أن توزيع جاما هو أكثر التوزيعات النظرية مطابقة لبيانات الدراسة خلال فترة الخبرة الأساسية (2016 -2020).

ووفقاً للتحليل البيزي فإن المعلمة β متغير عشوائي، بينما المعلمة α_2 تم اعتبارها ثابتة خلال فترة الخبرة والتي تختلف باختلاف فترة الخبرة.

الخطوة الثانية: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي للمعلمة β خلال فترة الخبرة ما قبل 2013.

حيث أنه لا تتوافر أي معلومات عن المعلمة β ما قبل 2013 وكانت قيمة β تتراوح بين $0 < \beta < \infty$ فإن التوزيع الاحتمالي البعدي للمعلمة β حيث لا توجد عينة هو $\pi\beta$، ويكون تقدير قيمة β قبل الحصول على العينة:

$$\boldsymbol{\pi}\beta \propto \frac{\mathbf{1}}{\beta}$$

الخطوة الثالثة: تحديد دالة الإمكان خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015):

الجدول التالي يوضح توزيع عدد المطالبات وفقاً لعدد الوحدات خلال الفترة القبلية (2013– 2015).

جدول (8)

التوزيع التكراري لعدد المطالبات وفقاً لفئات الخسارة خلال الفترة (2013- 2015)

القيمة بالألف جنيه

فئات الخسارة	عدد المطالبات
1: 100	**11**
100: 200	**2**
200: 500	**1**
1000: 4000	**2**
الإجمالي	**16**

المصدر: اعداد الباحث بالاعتماد على بيانات الشركتين محل الدراسة

وحيث أن المتغير العشوائي قيم المطالبات يتبع توزيع جاما خلال فترة الخبرة الأساسية، فإن المتغير العشوائي قيم المطالبات يتبع توزيع جاما خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015)، وبالتالي فإن متوسط التوزيع = متوسط قيم المطالبات، وتباين التوزيع = تباين قيم المطالبات.

$$Mean = \frac{\alpha_1}{\beta} = 387.5$$

$$Variance = \frac{\alpha_1}{\beta^2} = 643281.25$$

ومن المعادلتين السابقتين تكون قيمة $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ كما يلي:

$$\beta = 0.00060238$$

$$\alpha_1 = \ \beta \ \times 0.00060238 = 0.233422395$$

وحيث أن قيم المطالبات تتبع توزيع جاما فيكون شكل دالة التوزيع خلال فترة الخبرة القبلية كما يلي:

$$f(x) = P(\,x\,;\ \alpha_1, \beta) = \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1}\ e^{-\beta x} \quad ; \quad \alpha > 0\ , \qquad x > 0$$

ونجد أن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015) تكون على الشكل الآتي:

$$f(\underline{x}_1/\beta) = \prod_{i=1}^{n_1} \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} {x_i}^{\alpha_1 - 1}\ e^{-\beta x_i}$$

$$f(\underline{x}_1/\beta) \propto \beta^{n_1 \alpha_1} \times e^{-\beta \sum_{i=1}^{n_1} x_i}$$

وتم اختزال المقدار الذي لا يعتمد على β وهو $\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}$ في ثابت التناسب. وبالتعويض عن $T_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i$ فإن دالة الإمكان تتناسب مع المقدار التالي:

$$f(\underline{x}_1/\beta) \propto \beta^{n_1\alpha_1} \times e^{-\beta T_1}$$

الخطوة الرابعة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015).

ولتحديد دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (2013 – 2015) تم دمج دالة الإمكان مع دالة التوزيع البعدي خلال فترة الخبرة ما قبل 2013 كما يلي:

$$\pi(\beta/\underline{x}_1) \propto f(\underline{x}_1/\beta)\pi\beta$$

$$\pi(\beta/\underline{x}_1) \propto \beta^{n_1\alpha_1} \times e^{-\beta T_1} \times \frac{1}{\beta}$$

$$\pi(\beta/\underline{x}_1) \propto \beta^{n_1\alpha_1} \times e^{-\beta T_1} \times \beta^{-1}$$

$$\pi(\beta/\underline{x}_1) \propto \beta^{n_1\alpha_1-1} \times e^{-\beta T_1}$$

ومن الدالة السابقة يتضح أن $\pi(\beta/\underline{x}_1)$ يتناسب مع شكل دالة جاما بمعالم $(n_1\alpha_1\,, T_1)$، حيث $n_1 = 16 \ \& \alpha_1 = 0.233422395 \ \& T_1 = 6409.74415$ ، وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية تتناسب مع دالة التوزيع الاحتمالي جاما، وتكون دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل الآتي:

$$\pi(\beta/\underline{x}_1) = P(\beta\,;\, n_1\alpha_1\,, T_1) = \frac{{T_1}^{n_1\alpha_1}}{\Gamma(n_1\alpha_1)}\beta^{n_1\alpha_1-1}\ e^{-\beta T_1}$$

ومعالم هذا التوزيع هي $(n_1\alpha_1\,, T_1)$.

الخطوة الخامسة: تحديد دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية (2016- 2020).

دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية يمكن تحديدها كما يلي:

$$f(\underline{x}_2/\beta) = \prod_{i=1}^{n_2} \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} {x_i}^{\alpha_2-1}\ e^{-\beta x_i}$$

وباختزال المقدار الذي لا يعتمد على β في ثابت التناسب:

$$f\left(\underline{x}_2/\beta\right) \propto \beta^{n_2\alpha_2} \times e^{-\beta\sum_{i=1}^{n_2} x_i}$$

وبالتعويض عن $T_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_i$ فإن دالة الإمكان تتناسب مع المقدار التالي:

$$f\left(\underline{x}_2/\beta\right) \propto \beta^{n_2\alpha_2} \times e^{-\beta T_2}$$

الخطوة السادسة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi\left(\boldsymbol{\beta}/\underline{\boldsymbol{x}}_2\right)$للمعلمة $\boldsymbol{\beta}$ خلال فترة الخبرة الأساسية (2016 -2020).

تم استنتاج التوزيع الاحتمالي البعدي لفترة الخبرة الأساسية (2016 – 2020) بدمج دالة الإمكان لفترة الخبرة الأساسية $f\left(\underline{x}_2/\beta\right)$ مع التوزيع الاحتمالي البعدي لفترة الخبرة القبلية $\pi\left(\beta/\underline{x}_1\right)$ ، حيث ان دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية تم استنتاجها كما يلي:

$$\pi\left(\beta/\underline{x}_2\right) \propto f\left(\underline{x}_2/\beta\right) \times \pi\left(\beta/\underline{x}_1\right)$$

وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي البعدي تتناسب مع:

$$\pi\left(\beta/\underline{x}_2\right) \propto \beta^{n_2\alpha_2} \times e^{-\beta T_2} \times \beta^{n_1\alpha_1-1} \times e^{-\beta T_1}$$

$$\pi\left(\beta/\underline{x}_2\right) \propto \beta^{n_2\alpha_2+n_1\alpha_1-1} \times e^{-\beta T_2-\beta T_1}$$

$$\pi\left(\beta/\underline{x}_2\right) \propto \beta^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-1} \times e^{-\beta(T_1+T_2)}$$

وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية تتناسب مع دالة التوزيع الاحتمالي جاما وتكون الدالة على الشكل التالي:

$$\pi\left(\beta/\underline{x}_2\right) = \frac{(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \beta^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-1}\ e^{-\beta(T_1+T_2)}$$

ومعالم التوزيع هي $\left(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2\,, T_1+T_2\right)$ بحيث:

$n_1 = 16$ & $\alpha_1 = 0.233422395$ $T_1 = 6409.74415$

$n_2 = 74$ & $\alpha_2 = 0.130937057382416$ $T_2 = 102160.47972$

الخطوة السابعة: إيجاد التوزيع الاحتمالي التنبؤي للمشاهدات مستقبلاً لقيم المطالبات$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}/\underline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}\right)$.

يتم الحصول على التوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات $P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right)$ بإجراء التكامل المحدود لحاصل ضرب دالة التوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات للسنة القادمة $f\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right)$ في دالة التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi\left(\beta/\underline{x}_2\right)$ للمعلمة β على مدي المعلة β $0 < \beta < \infty$ كما يلي:

$$P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \int_0^\infty f(x_{n+1}/\beta) \times \pi\left(\beta/\underline{x}_2\right).d\beta$$

حيث إن:

$$f(x_{n+1}/\beta) = \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} {x_{n+1}}^{\alpha_2-1}\ e^{-\beta x_{n+1}}$$

وبالتالي

$$P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} {x_{n+1}}^{\alpha_2-1}\ e^{-\beta x_{n+1}} \frac{(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \beta^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-1}\ e^{-\beta(T_1+T_2)}.d\beta$$

$$P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \frac{{x_{n+1}}^{\alpha_2-1}(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \int_0^\infty \beta^{\alpha_2}\ e^{-\beta x_{n+1}} \beta^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-1}\ e^{-\beta(T_1+T_2)}.d\beta$$

$$P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \frac{{x_{n+1}}^{\alpha_2-1}(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \int_0^\infty \beta^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-1}\ e^{-\beta(x_{n+1}+T_1+T_2}\ .d\beta$$

وبضرب المعادلة السابقة في المقدار

$$\frac{(x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2} \times \Gamma(\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2) \times (x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}$$

$$\therefore P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \frac{{x_{n+1}}^{\alpha_2-1}(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}\Gamma(\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)(x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}$$

$$\times \int_0^\infty \frac{(x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \beta^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2-1}\ e^{-\beta(x_{n+1}+T_1+T_2}\ .d\beta$$

وحيث أن تكامل دالة جاما بحدود من صفر إلى مالانهاية يساوي واحد

$$\therefore P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \frac{{x_{n+1}}^{\alpha_2-1}(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}\Gamma(\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)(x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}$$

$$\therefore P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \frac{\Gamma(\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} {x_{n+1}}^{\alpha_2-1} \frac{(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{(x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}$$

$$\therefore P\left(x_{n+1}/\underline{x}_2\right) = \frac{\Gamma(\alpha_2+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} {x_{n+1}}^{\alpha_2-1} \frac{(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{(x_{n+1}+T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}$$

$$\times \frac{1}{(x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2}}$$

والمقدار الأول في المعادلة السابقة يشبه العلاقة بين مقلوب بيتا وجاما:

$$\therefore P(x_{n+1}/\underline{x}_2) = \frac{1}{\beta(\alpha_2, n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} {x_{n+1}}^{\alpha_2-1} \frac{(T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}{(x_{n+1}+T_1+T_2)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}}$$

$$\times \frac{1}{(x_{n+1}+T_1+T_2)^{\alpha_2+1-1}}$$

$$\therefore P(x_{n+1}/\underline{x}_2) = \frac{1}{\beta(\alpha_2, n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \times \left(\frac{x_{n+1}}{(x_{n+1}+T_1+T_2)}\right)^{\alpha_2-1}$$

$$\times \frac{1}{(x_{n+1}+T_1+T_2)} \times \left(\frac{(T_1+T_2)}{(x_{n+1}+T_1+T_2}\right)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2}$$

والتوزيع السابق غير معروف ولكي نصل إلى توزيع من التوزيعات المعروفة يتم عمل تحويلة بحيث يتحول المتغير العشوائي x_{n+1} إلى متغير آخر نفرضه z بحيث:

$$z = \frac{(T_1+T_2)}{(x_{n+1}+T_1+T_2)}$$

$$z \times (x_{n+1}+T_1+T_2) = (T_1+T_2)$$

$$z\, x_{n+1} + z\, T_1 + z\, T_2 = (T_1+T_2)$$

$$z\, x_{n+1} = (T_1+T_2) - z\, T_1 + z\, T_2 = (T_1+T_2) - z(T_1+T_2)$$

$$z\, x_{n+1} = (T_1+T_2)(1-z)$$

$$x_{n+1} = \frac{(T_1+T_2)(1-z)}{z} = (T_1+T_2)(\frac{1}{z}-1)$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة ل z

$$\frac{dx_{n+1}}{dz} = (T_1+T_2)(-\frac{1}{z^2})$$

$$\therefore P(z/\underline{x}_2) = \frac{1}{\beta(\alpha_2, n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \times (1-z)^{\alpha_2-1} \times \frac{z}{(T_1+T_2)}$$

$$\times (z)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2} . \frac{dx_{n+1}}{dz}$$

$$\therefore P(z/\underline{x}_2) = \frac{1}{\beta(\alpha_2, n_1\alpha_1+n_2\alpha_2)} \times (z)^{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2} \times (z)^{\alpha_2-1}$$

وهذه الدالة هي دالة بيتا للمتغير العشوائي z بمعالم $(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, \alpha_2)$ ، وبالتالي لتحديد متوسط قيمة المطالبة المتوقعة العام القادم من خلال:

$$E(x_{n+1}) = E\left[(T_1 + T_2)(\frac{1}{z} - 1)\right]$$

$$E(x_{n+1}) = (T_1 + T_2)\left[E(\frac{1}{z}) - 1\right]$$

(4/10) العزوم الخاصة بالتوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات

(1/4/10) العزوم الأربعة حول الصفر للمتغير العشوائي قيم المطالبات

حيث أن z متغير عشوائي يتفق مع توزيع بيتا، فان دالة توليد العزوم حول الصفر لدالة توزيع بيتا هي:

$$M'_r(\frac{1}{z})^r = \frac{\left(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + r, \alpha_2\right)}{\beta\left(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, \alpha_2\right)}$$

حيث $(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, \alpha_2)$ معالم التوزيع و $r = 1,2,3,4$ ويمكن الحصول على المقدار $E(\frac{1}{z})^r$ بالتعويض في المعادلة التالية إسماعيل(2005):

$$\therefore M'_r = E(\frac{1}{z})^r = \frac{\beta\left(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 - r, \alpha_2\right)}{\beta\left(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, \alpha_2\right)}$$

$$E(\frac{1}{z})^1 = \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 - 1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2 - 1)} \times \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)} = 1.0105389566$$

$$E(\frac{1}{z})^2 = \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 - 2)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2 - 2)} \times \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)} = 1.0221212249$$

$$E(\frac{1}{z})^3 = \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 - 3)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2 - 3)} \times \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)} = 1.034960082$$

$$E(\frac{1}{z})^4 = \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 - 4)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2 - 4)} \times \frac{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_2)}{\Gamma(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)}$$
$$= 1.049339664$$

وبالتالي فإن العزوم الأربعة الأولي حول الصفر تكون كالتالي:

$$M_1'x = E(x_{n+1}) = (T_1 + T_2)\left[E(\frac{1}{z}) - 1\right] = 1144.2168837114407851$$

$$M_2'x = (T_1 + T_2)^2\left[E(\frac{1}{z})^2 - 2E(\frac{1}{z}) + 1\right] = 12298028.705083970813$$

$$M_3'x = (T_1 + T_2)^3\left[E(\frac{1}{z})^3 - 3E(\frac{1}{z})^2 + 3E(\frac{1}{z}) - 1\right]$$
$$= 272946962173.486976$$

$$M_4'x = (T_1 + T_2)^4\left[E(\frac{1}{z})^4 - 4E(\frac{1}{z})^3 + 6E(\frac{1}{z})^2 - 4E(\frac{1}{z}) + 1\right]$$
$$= 9845174619039314.2672$$

(2/4/10) العزوم الأربعة حول المتوسط" العزوم المركزية" للمتغير العشوائي قيم المطالبات.

العزوم المركزية من الرتبة (r)وهي العزوم حول المتوسط ونحصل عليها من العلاقة

$$M_r = E(x - m)^r$$

وباستخدام العلاقة بين العزوم المركزية " حول المتوسط" والعزوم حول الصفر البلقيني وآخرون (2018)؛ Johnson et al.,(2005):

$$M_1(x) = zero$$
$$M_2(x) = M_2' - (M_1')^2$$
$$M_3(x) = M_3' - 3M_2'M_1' + 2(M_1')^3$$
$$M_4(x) = M_4' - 4M_3'M_1' + 6M_2'(M_1')^2 - 3(M_1')^4$$

وباستخدام برنامج *PTC Mathcad Prime 6.* نحصل علي البيانات الآتية:

$$M_1(x) = zero$$
$$M_2(x) = 10988796.428113650008$$
$$M_3(x) = 233728217283.33072559$$
$$M_4(x) = 8687396118410345.215$$

(5/10) العزوم المركبة للتوزيعين المتقطع والمستمر

باستخدام عزوم توزيع ثنائي الحدين السالب وتوزيع جاما يمكن التعويض في المعادلات الآتية للوصول إلى دالة قيم المطالبات الإجمالية

$$M_1(S) = \mu(x) \times \mu(N)$$
$$M_2(S) = \Big((\mu(x))^{\mathbf{2}} \times \mu_2(N)\Big) + \ \big((\mu_2(x)) \times \mu(N)\big)$$
$$M_3(S) = \Big((\mu(x))^{\mathbf{3}} \times \mu_3(N)\Big) + \ \big((\mu_3(x)) \times \mu(N)\big) \\ + 3\big(\mu(x)\big) \times \mu_2(N)\mu_2(x)$$
$$M_4(S) = \Big((\mu(x))^{\mathbf{4}} \times \mu_4(N)\Big) + \ \Big(\big(\mu_4(x)\big) \times \mu(N)\Big) \\ +\big(4\mu(x) \times \mu_3(x) \times \mu_2(N)\big) \\ +6((\mu(x))^{\mathbf{2}}) \times \big(\mu_2(x)\big) \times \Big[\big(\mu(N) \times \mu_2(N) + \mu_3(N)\big)\Big] \\ +3(\big(\mu_2(x)\big)^2) \times [(\mu(N))^{\mathbf{2}} - \mu(N) + \mu_2(N)]$$

وبالتالي فإن قيم العزوم الإجمالية هي" القيم بالألف جنيه"**:**

$$M_1(S) = 80318.19804$$
$$M_2(S) = 863287875.2$$
$$M_3(S) = 1.91604E + 13$$
$$M_4(S) = 2.92692E + 18$$

(6/10) حساب السعر الصافي

يتمثل السعر الصافي في العزم الأول لدالة اجمالي قيم المطالبات الإجمالية $M_1(S)$ على مجموع مبالغ التأمين وذلك قبل الأخذ في الحسبان انحرافات قيم المطالبات الفعلية عن المتوقعة وهو يساوى:

$$\text{السعر الصافي الخام} = \frac{80318198}{14261356927.8} \ = \ 0.005631876$$

ويتم تحديد شكل التوزيع الخاص بدالة قيم المطالبات الإجمالية من خلال

1- حساب معاملي الالتواء والتفرطح

$$\beta_1 = \frac{(M_3(S))^2}{(M_2(S))^3} = \frac{3.67122E + 26}{6.43379E + 26} \ = 0.57061482$$
$$\beta_2 = \frac{M_4(S)}{(M_2(S))^2} = \frac{2.92692E + 18}{7.45266E + 17} \ = 3.927345057$$

2- حساب معامل بيرسون بالتعويض في المعادلة التفاضلية لكارل بيرسون

$$K = \frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4[(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-3\beta_1)]}$$

$$K = \quad 3.423718732$$

وحيث أن قيمة معامل بيرسون أكبر من الواحد الصحيح فإن البيانات في هذه الحالة قد تم توفيقها مع توزيع بيرسون من النوع السادس، ودالة كثافة الاحتمال pdf له تكون على الشكل الآتي:

$$y = F(x) = y_0(x-a)^{q_2}(x)^{-q_1}$$

وتكون نقطة الأصل قبل بداية المنحني بمقدار a.

ويتم حساب دالة كثافة الاحتمال كما يلي: Elderton & Johnson (1969)

$$r = \frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{6+3\beta_1-2\beta_2} = 98.990630$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{M_2} \times \sqrt{(\beta_1(r+2)^2 + 16(r+1)} = 905609.986$$

ويتم إيجاد قيمة q_2 و $-q_1$ من المعادلة:

$$\frac{r-2}{2} \pm \frac{r(r+2)}{2} \times \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_1(r+2)^2+16(r+1)}}$$

$$q_2 = 8.3310513120754914 4571$$

$$q_1 = 109.321682184030235339$$

$$y_0 = \frac{\mathrm{N} \times \mathrm{a}^{q_1-q_2-1}\,\Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1-q_2-1)\Gamma(q_2+1)}$$

$$y_0 = 0.876329498216390864907 \times 10^{613}$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال الخاصة بتوزيع مجموع الخسائر السنوية:

$$y = 0.876329498216390864907 \times 10^{613}(x-905609.986)^{8.33105131207549144571}(x)^{-109.321682184030235339}$$

(7/10) تقدير أقصي خسارة إجمالية سنوية محتملة (*MPY*).

لتقدير أقصي خسارة اجمالية سنوية محتملة *maximum probable yearly aggregate loss* تم استخدام طريقة (بومان – شنتون) التقريبية من خلال التعويض في المعادلة: عثمان (2006):

$$MPY = M_1(S) + \left[z_{\propto}(\sqrt{\beta_1},\beta_2) \times \sqrt{M_2(S)}\right]$$

حيث :

$M_1(S)$: العزم الأول لدالة إجمالي الخسارة " المتوسط"

$z_{\propto}(\sqrt{\beta_1}, \beta_2)$: الدرجة المعيارية وتم حسابها بمستوي معنوية 1% باستخدام المعادلة:

$$z_{\propto}(\sqrt{\beta_1}, \beta_2) = \frac{\sum_i^{10} a_i\left(\sqrt{\beta_1}\right)^{g_i}(\beta_2)^{h_i}}{\sum_i^{10} b_i\left(\sqrt{\beta_1}\right)^{g_i}(\beta_2)^{h_i}} = \frac{51.2988675118901}{17.970836109468}$$

$$= 2.85456209156919$$

$$MPY = 80318.19804 + \left[2.85456209156919 \times \sqrt{863287875.2}\right]$$

$$= 164190.258966505$$

وللحصول على سعر التأمين الصافي يتم قسمة ناتج المعادلة السابقة علي إجمالي مبالغ التأمين:

السعر الصافي النهائي $= \frac{164190258.966505}{14261356927.8} = 0.0115129478771017$

(8/10) حساب سعر التأمين بناء على البيانات الفعلية:

السعر الصافي = $\dfrac{\text{اجمالى المطالبات الفعلية}}{\text{اجمالي مبالغ التأمين}}$

السعر الصافي $= \frac{102160479.7}{14261356927.8} = 0.007163447$

(9/10) السعر التجاري

يتحدد القسط التجاري بإضافة العمولات والمصاريف الإدارية وهامش الربح الى القسط الصافي.

السعر التجاري= $\dfrac{\text{سعر التأمين الصافى}}{1-(\text{نسبة المصروفات العمومية و الادارية و العمولات+نسبة هامش الربح})}$

السعر التجاري $= \frac{0.0115129478771017}{1-(0.05 + 0.2388)} = 0.0161880594447437$

(11) النتائج:

1- ان بيانات عدد المطالبات والتي تم الحصول عليها من سجلات ودفاتر شركات التأمين محل الدراسة تتبع توزيع بواسون بمعلمات:

$$\theta = 0.0298266827891979$$

2- تم تحديد دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات وهي دالة ثنائي الحدين السالب بمعالم $\left(T_1 + T_2, \frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+1}\right)$ وهذه الدالة علي الشكل:

$$P\left(y_{n+1}/\underline{y}_2\right) = \binom{y_{n+1} + T_1 + T_2 - 1}{y_{n+1}} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + 1}\right)^{T_1+T_2} \left(\frac{1}{n_1 + n_2 + 1}\right)^{y_{n+1}}$$

3- ان بيانات حجم الخسائر تتبع توزيع جاما بمعالم:

$$\boldsymbol{\beta} = 0.0000880449090985803$$

$$\boldsymbol{\alpha} = 0.130937057382416$$

4- تم تحديد دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات وهي علي الشكل

$$\therefore \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{x}_{n+1}/\underline{\boldsymbol{x}}_2\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{\alpha}_2)} \times \left(\frac{\boldsymbol{x}_{n+1}}{(\boldsymbol{x}_{n+1} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)}\right)^{\boldsymbol{\alpha}_2 - \mathbf{1}} \times \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}_{n+1} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)} \times \left(\frac{(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)}{(\boldsymbol{x}_{n+1} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)}\right)^{\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{\alpha}_2}$$

وهو توزيع غير معروف فتم عمل تحويله لهذا التوزيع ليتشابه مع دالة بيتا بمعالم $(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, \alpha_2)$ وهذه الدالة علي الشكل:

$$\therefore P\left(z/\underline{x}_2\right) = \frac{1}{\beta(\alpha_2, n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)} \times (z)^{n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2} \times (z)^{\alpha_2 - 1}$$

5- بإيجاد العزوم المركزية الخاصة بالتوزيع المنفصل لعدد المطالبات والتوزيع المتصل لقيم المطالبات تم الوصول الى العزوم المركزية الأربعة حول المتوسط لمجموع قيم المطالبات وهي:

$$M_1(S) = 80318.19804$$
$$M_2(S) = 863287875.2$$
$$M_3(S) = 1.91604E + 13$$
$$M_4(S) = 2.92692E + 18$$

6- إن قيمة معامل بيرسون تساوى 3.423718732 وهي أكبر من الواحد وبالتالي فإن التوزيع المركب يكون من النوع السادس لمنحنيات بيرسون وتم التوصل الى شكل النموذج الذي يمكن من خلاله التنبؤ بأجمالي قيم المطالبات وهو على الشكل التالي:

$$\mathrm{y} = 0.876329498216390864907 \times 10^{613}(x - 905609.986)^{8.33105131207549144571}(x)^{-109.321682184030235339}$$

7- سعر التأمين الصافي يساوى 0.0115129478771017

8- سعر التأمين التجاري يساوى *0.0161880594447437*
9- ان سعر تأمين أجسام السفن " اللنشات " المطبق في السوق المصري أقل من السعر العادل.
10- الحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة = 164190258.966505

(12) التوصيات:

- على شركات التأمين تعديل الأسعار المطبقة حالياً لتأمين أجسام السفن " اللنشات" وذلك لتحقيق العدالة في حساب القسط التأميني.
- علي شركات التأمين المصرية الاعتماد على أسلوب التحليل البيزي للبيانات في تقدير أسعار التأمين ليس فقط في فرع أجسام السفن، بل في كافة فروع التأمين، وذلك لدقة النتائج المتحصل عليها نتيجة التطبيق.
- ضرورة اجراء المزيد من الأبحاث التي يمكن ان تساعد متخذ القرار في مجال التنبؤ بإجمالي المطالبات في التأمين البحري بصفة عامة وتأمين أجسام السفن بصفة خاصة.
- علي شركات التأمين العاملة في السوق المصري اتاحة البيانات بشكل أكبر أمام الباحثين حيث ما زال هناك صعوبة شديدة في الحصول على البيانات خاصة فرع أجسام السفن.

(13) المراجع:

1. أحمد، ممدوح حمزة. (1990). *استخدام التوزيعات الاحتمالية في تسعير التأمين مع التطبيق على تأمين السطو/* محلات تجارية [رسالة دكتوراه غير منشورة]. جامعة القاهرة.
2. اسماعيل، عماد عبد الجليل. (2005). *تسعير وثيقة التأمين الشاملة للفنادق والمطاعم العائمة* [رسالة دكتوراه غير منشورة]. جامعة القاهرة.
3. إسماعيل، عماد عبد الجليل.(2011). *استخدام التحليل البيزي لتقدير الحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة*. مجلة الدراسات المالية والتجارية، جامعة بني سويف.
4. بخيت، على سيد. (2004). *استخدام النموذج البيزي التجريبي في التنبؤ بمعدلات الخسارة للتأمينات الهندسية*. مجلة كلية التجارة للبحوث العلمية، جامعة أسيوط، 146- 177.
5. البلقينى، محمد توفيق إسماعيل، واصف، جمال عبد الباقي، البرقاوي، محمد أحمد فؤاد عبده. (2018). *تسعير أخطار نقل البضائع بالسكك الحديدية باستخدام النماذج الاحتمالية المركبة*. المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، 42(3)، 174 - 201.
6. جلول، عطية محمد. (2013). *تقدير معدلات الخسارة في تأمين الممتلكات والمسئولية باستخدام أسلوب التحليل البيزي التجريبي بالتطبيق على السوق المصرية*. المجلة العربية للإدارة، المنظمة العربية للتنمية الإدارية، 33(1)،163-180.
7. حافظ، محمد محمد السيد. (2015). *ترشيد سياسات الاكتتاب والتسعير في التأمين البحري بضائع باستخدام الأساليب الكمية* [رسالة دكتوراه غير منشورة]. جامعة بني سويف.
8. الخواجة، حامد عبد القوي محمد. (2014). *استخدام النموذج البيزي في التنبؤ بمعدلات الخسارة في سوق التأمين السعودي*. مجلة البحوث المالية والتجارية، (4)، 316- 334.

9. الديب، علي السيد. (1986). *دراسة تحليلية لعوامل ارتفاع معدل الخسارة في تأمين أجسام السفن عن العمليات المباشرة في السوق المصري* [رسالة ماجستير غير منشورة]. جامعة القاهرة.
10. الديب، علي السيد. (1996). *استخدام التوزيعات الاحتمالية (منحنيات بيرسون) في تقدير الحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة التي تتعرض لها شركة التأمين.* المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة.
11. الزكي، مها محمود ابراهيم. (2018). *تقدير إجمالي قيمة مطالبات التأمين التكميلي للسيارات في ضوء التقلبات في معدل الخسارة* [رسالة ماجستير غير منشورة]. جامعة المنصورة.
12. سالم، محمود سيد أحمد. (2015). *رياضيات التأمينات العامة النماذج الرياضية والإحصائية وتطبيقاتها* (ط. الأولى).
13. سليمان، أسامة ربيع أمين. (2009). *تسعير تأمين الممتلكات والمسئوليات باستخدام النماذج المالية في الفكر الاكتواري الحديث*[رسالة دكتوراه غير منشورة]. جامعة المنوفية.
14. سليمان، أسامة ربيع أمين. (2014). *الدورات الإكتتابية في سوق تأمين الممتلكات والمسؤولية في مصر*: دراسة كمية مقارنة. مجلة الباحث، (14)، 12- 24.
15. سليمان، أسامة ربيع أمين. (2015). *نظرية الخطر وإدارة الخسائر.* دار الخولي للطباعة.
16. سيف، طارق جمعة. (2008). *تأمين النقل الدولي البحري – الجوي – البري – النهري* (ط. الأولى). دار الفكر الجامعي الإسكندرية.
17. الصياد، جلال مصطفي. (1993). *الاستدلال الإحصائي.* دار المريخ للنشر.
18. الطويل، مجدي. (2000). *الاحتمالات النظرية والتطبيق* (ط. الأولى). دار النشر للجامعات.
19. عاشور، سمير، سالم، سامية. (2011) *مقدمة في الإحصاء التحليلي* (ط. الرابعة).
20. عبد الحميد، عبد الحميد مصطفى، محمد، أحمد محمد فرحان، علي، (2020). *نموذج كمي لتقدير القسط الصافي لتأمين السيارات بالتطبيق على الشركة التعاونية للتامين التعاوني بالمملكة العربية السعودية*. المجلة العلمية للبحوث التجارية، 7(1)، 107 - 149.
21. عبد الظاهر، أشرف سيد. (2017). *تسعير وثائق التأمين المركبة بالتطبيق على تأمينات الممتلكات في سوق التأمين المصري.* مجلة الدراسات المالية والتجارية، (3)، 67-99.
22. عثمان، شريف محمد محسن. (2006). *تسعير تأمين السيارات التكميلي بالتطبيق على سيارات الميكروباص* [رسالة ماجستير غير منشورة]. جامعة المنوفية.
23. عثمان، شريف محمد محسن. (2017). *تسعير تأمين أجسام السفن في مصر "دراسة تطبيقية على الفنادق والمطاعم العائمة* [رسالة دكتوراه غير منشورة]. جامعة المنوفية.
24. عثمان، محمد عبدالمولى، الخواجة، حامد عبد القوي محمد، علي، محمد المهدي محمد، سالم، محمود سيد أحمد. (2008). *تسعير أخطار الشركات الصناعية دراسة تطبيقية*. مجلة التجارة والتمويل، (1)، 113 – 162.

25. غيطان، عبد الحميد ربيع. (2004 أ). *نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية الجزء الأول* (ط. الأولى). دار الكتب الأكاديمية.
26. غيطان، عبد الحميد ربيع. (2004 ب). *نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية الجزء الثاني* (ط. الأولى). دار الكتب الأكاديمية.
27. مشعال، محمود عبدالعال محمد. (2015). *استخدام التوزيعات الاحتمالية المركبة فى تسعير وثيقة تأمين جميع الاخطار المستقلة الصناعية*. مجلة التجارة والتمويل، (3)، 286 - 355.
28. مشعال، محمود عبدالعال محمد، الخواجة، حامد عبد القوي محمد، البرقاوي. (2017). *استخدام التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة في تقديرات توزيعات الخسارة لتأمين الوحدات البحرية: دراسة تطبيقية*. مجلة البحوث المالية والتجارية، (2)، 316 – 346.
29. Ahmad, Z., Mahmoudi, E., & Hamedani, G. G. (2019). *A family of loss distributions with an application to the vehicle insurance loss data*. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research.
30. Aiuppa, T. A. (1988). *Evaluation of Pearson curves as an approximation of the maximum probable annual aggregate loss*. Journal of Risk and Insurance, 425-441.
31. Bouver, H., & Bargmann, R. E. (1974). *Tables of the Standardized Percentage Points of the Pearson System of Curves in Terms of Beta 1 and Beta 2*. GEORGIA UNIV ATHENS DEPT OF STATISTICS AND COMPUTER SCIENCE.
32. Bowman, K. O., & Shenton, L. R. (1979). *Approximate percentage points for Pearson distributions*. Biometrika, 147-151.
33. Cummins, J. D., Dionne, G., McDonald, J. B., & Pritchett, B. M. (1990). *Applications of the GB2 family of distributions in modeling insurance loss processes*. Insurance: Mathematics and Economics, 9(4), 257-272.
34. Davenport, J. M., & Herring, T. A. (1979). *On the use of curve fitting to model the error of the Cornish-Fisher expansion of the pearson type-VI distribution: The error of the Cornish-Fisher expansion of the pearson type-VI distribution. Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 8(4), 311-333.
35. Elderton, W. P., & Johnson, N. L. (1969). *Systems of frequency curves*.
36. Eling, M. (2012). *Fitting insurance claims to skewed distributions: Are the skew-normal and skew-student good models*?. Insurance: Mathematics and Economics, 51(2), 239-248.

37. Goffard, P. O., Jammalamadaka, S. R., & Meintanis, S. (2019). *Goodness-of-fit tests for compound distributions with applications in insurance*.
38. Heckman, P. E., & Meyers, G. G. (1983). *The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions. In Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 70, No. 133-134, pp. 49-66). Casualty Actuarial Society.
39. Henderson, R. (1907). *Frequency-Curves and Moments*. Journal of the Institute of Actuaries, 41(3), 429-442.
40. Hewitt, C. C., & Lefkowitz, B. (1979). *Methods for fitting distributions to insurance loss data*. In Proceedings of the casualty actuarial society (Vol. 66, No. 125-126, pp. 139-160).
41. Hossack, I. B., Pollard, J. H., & Zehnwirth, B. (1999). *Introductory statistics with applications in general insurance*. Cambridge University Press.
42. Johnson, N. L., Kemp, A. W., & Kotz, S. (2005*). Univariate discrete distributions* (Vol. 444). John Wiley & Sons.
43. Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous univariate distributions, volume 2* (Vol. 289). John wiley & sons.
44. Johnson, N. L., Nixon, E., Amos, D. E., & Pearson, E. S. (1963). *Table of Percentage Points of Pearson Curves, for Given \beta_1 and \beta_2, Expressed in Standard Measure*. Biometrika, 50(3/4), 459-498.
45. Klugman, S. A., & Parsa, R. (1999). *Fitting bivariate loss distributions with copulas*. Insurance: mathematics and economics, 24(1-2), 139-148.
46. Krishnamoorthy, K. (2016*). Handbook of statistical distributions with applications*. CRC Press
47. Lamm-Tennant, J., Starks, L. T., & Stokes, L. (1992). *An empirical Bayes approach to estimating loss ratios. Journal of Risk and Insurance*, 426-442.
48. Lau, H. S. (1984). *An effective approach for estimating the aggregate loss of an insurance portfolio. Journal of Risk and Insurance*, 20-30.