



مجلة البحوث المالية والتجارية

المجلد (23) - العدد الرابع - أكتوبر 2022



تطبيق انحدار الكابل المنحني على درجات الحرارة العظمى اليومية في
القاهرة خلال عام 2021

Bent-cable Regression Applied to the Daily Maximum Temperature in Cairo Through 2021

سمر احمد حلمي عبد الغني

مدرس

قسم الإحصاء والرياضيات والتأمين

كلية التجارة - جامعة بورسعيد

رابط المجلة: <https://jsst.journals.ekb.eg/>



الملخص

سوف نستخدم الانحدار المسمى الكابل المنحني **Bent-cable** لتحليل درجات الحرارة العظمى اليومية في القاهرة خلال عام 2021 والتي تظهر تغيرات حادة في معامل الانحدار. يتكون نموذج انحدار الكابل المنحني من جزأين خطيين يرتبطان بجزء منحني من الدرجة الثانية. وانحدار الكابل المنحني هو تطوير للانحدار المعروف بالقطع الخطية **broken piecewise-linear model** والتي تتميز بانعطاف حاد ولذلك تعرف بنموذج العصا المكسورة. وأهم معلمات نموذج الكابل المنحني هو تقدير منطقة الانتقال **transition period**. تم تطبيق انحدار الكابل المنحني على درجات الحرارة في مصر نظرا لزيادة أهمية دراسة التغيرات المناخية التي تؤثر بشكل مباشر على الزراعة والسياحة حيث تقوم الدراسة على سجلات درجات الحرارة العظمى اليومية في القاهرة خلال عام 2021 لإظهار الانتقالات العادية والحادة في عينة محدودة. وتم عرض تنبؤات درجات الحرارة لعام 2022 مقارنة بتلك التي قدمها موقع **accuweather** على الانترنت وتلك المحسوبة بنموذج العصا المكسورة. وتم عرض المتطلبات العملية للنموذج لضمان دقة تقدير منطقة الانتقال إذا كانت لا تساوي صفر (كما في حالة العصا المكسورة). تحت هذه الشروط أظهرت تقديرات المربعات الصغرى أنها (أ) متسقة وكذلك (ب) تتقارب إلى توزيع معتدل، لذلك تم استخدام المربعات الصغرى لتقدير معلمات نموذج الكابل المنحني. وقد أظهرت مقارنة نتائج الكابل المنحني مع نتائج العصا المكسورة أنهما تتفقان في المرحلتين الأولى والثالثة، الاختلاف يكون في المرحلة الوسطى أي مرحلة معادلة الدرجة الثانية. وقد أظهرت تنبؤات الكابل المنحني قريبا من البيانات الفعلية للأيام الأولى من 2022 وكانت أقرب من تنبؤات **accuweather**.

للكلمات الدالة: انحدار الكابل المنحني **Bent cable regression** - منطقة الانتقال **transition period** - التنبؤ - درجات الحرارة .



Abstract:

In this paper the so-called bent-cable model is used to describe the daily maximum temperature in Cairo, Egypt through 2021 which exhibit a potentially sharp change in slope. The model comprises two linear segments, joined smoothly by a quadratic bend. The class of bent cables includes, as a limiting case, the popular piecewise-linear model (with a sharp kink), otherwise known as the broken stick. Associated with bent-cable regression is the estimation of the bend width parameter, through which the abruptness of the underlying transition may be assessed. Due to the importance of studying the climate changes, we present worked the recorded maximum temperature in Cairo to demonstrate the regularity and irregularity of bent-cable regression encountered in finite-sample settings. We also presented the projections of the bent-cable for 2022 compared to those of accuweather and broken stick projections. Practical conditions on the design are given to ensure regularity of the full bent-cable estimation problem, if the underlying bend segment has non-zero width. Under such conditions, the least-squares estimators are shown (i) to be consistent, and (ii) to asymptotically follow a multivariate normal distribution. Hence the least-squares estimators are used to analysis the considered data. The results of the bent cable were compared to the results of the broken stick model. The comparison showed that the two models coincide in the first and third phases, the difference happens only in the second phase (the quadratic part).

Keywords: bent-cable - change point - transition period- maximum likelihood estimators - Köppen climate classification - temprature



مقدمة:

يستخدم النموذج المعروف بنموذج القطع الخطية piecewise-linear model لدراسة الأرصاء الجوية واكتشاف التقلبات الحادة في درجات الحرارة وكذلك في الدراسات البيولوجية لتقدير بداية الانتقالات (Barrowman, N. J., Myers, R. A. (2000) هذه الانتقالات الحادة يتطلب الأمر دراستها في حالتها الهيكلية. على سبيل المثال لدراسة العلاقة بين وفرة السمك وزمن بداية قتلها. طبيعي سيحاول مدير مصايد الأسماك استخدام تاريخ بداية الانتقال لتكوين فكرة عن الأسباب الحقيقية لتناقص أعداد الأسماك. وهكذا وفي مجالات أخرى مثل مجال علم وظائف الأعضاء غالبا ما يلجأ الباحثون إلى نموذج العصا المكسورة لاستنتاج بداية الانتقالات الحادة بالرغم من أنه نادرا ما توجد نظرية تبرر هذه الحدة. Brown, C. C. (1987). لتقييم طبيعة الانتقال استخدم أسلوب لا معلمي عرض في دراسة (Routledge, R. D. (1994) غالبا كأداة استكشافية خاصة إذا كنا لم نتحقق بعد من شدة الانحدار والآن نعرض أسلوب معلمي لدراسة استخدام نموذج مرن قدمه Tishler and Zang Tishler, (1981) وهو المعروف باسم الكابل المنحني "bent-cable" وهذه التسمية ترجع إلى نعومة منطقة الانتقال مقارنة بالانتقال الحاد في هذه المنطقة في نموذج العصا المكسورة. ويمكن اعتبار الكابل المنحني تطوير لنموذج العصا المكسورة. ففي نموذج الكابل المنحني إذا تقلصت منطقة الانتقال إلى صفر فإننا نعود إلى نموذج العصا المكسورة كما هو واضح في شكل (1)

شكل (1)



نموذجي الكابل المنحني والعصا المكسورة

نموذج الكابل المنحني (الخط المصمت) ونموذج العصا المكسورة (الخط المنقط). خارج الجزء المنحني (فترة الانتقال) فإن النموذجين يشتركان في القطاعين الخطيين الداخل incoming والخارج



outgoing. وهكذا فإن نموذج العصا المكسورة هو نموذج كابل منحنى ولكن فترة الانتقال تنتقل إلى الصفر وتصبح نقطة تغير حادة.

في الأصل تم تطوير نظام الكابل المنحنى للتغلب على مشكلة عدم وجود مشتقة أولى لنظام العصا المكسورة Tishler, A. (1981) and Zang, I. حيث يحدث انحناء صوري phoney لمنطقة بعرض غير صفري ليحل محل التغير المفاجئ. وهذه كانت طريقة حسابية إذ أن حساب التفاضل يوفر استقرار حسابي في خطوات التقدير. وعند تحقق تقارب رقمي فإن الانحناء الصوري يتم تجاهله وإذا تحقق الانتقال التدريجي في دالة الانحدار فإن فترة الانتقال تعتبر جزء من معلمات النموذج

والتقييم الفعلي للتغيرات المفاجئة بواسطة فترة ثقة غير مناسب لاختبار فرض المفاجأة مقابل منحنى لدرجة الثانية.

نموذج الكابل المنحنى بدلا من نموذج العصا المكسورة اقترحه Seber, G. (1989) and Wild, C. ولكنهما ومخترعي النموذج لم يقدموا له نظرية تقدير. وطريقة الكابل المنحنى كما قدمها Chiu et al. (2006) توفر إطار نموذج انحدار لتحليل نقطة التحول التي تحقق التحول بين مرحلتين خطيتين، والنموذج دقيق وجذاب نظرا لبساطته ومرونته وإمكانية تفسير نتائجه

وقد قدم Chiu (2006) et al. إطار عمل لنظرية الكابل المنحنى الجديدة وذلك بدلا من التعامل مع عدد كبير من المجاهيل فإننا نركز انتباهنا على المعلمات الأساسية لنموذج الكابل المنحنى وهما معامل انحدار صفر وواحد للمرحلة الخطية الداخلة والخارجة على التوالي ومركز ونصف عرض الانحناء هما المعلمتين المجهولتين فقط. وفرض ضروري أن الأخطاء العشوائية تتبع توزيع طبيعي بتباين ثابت ومعروف وذلك لضمان ثبات التقديرات على الرغم من عدم وجود المشتقة الجزئية الأولى للتغاير ومعلمات النموذج الأخرى. هذه الشروط العملية تكون دليل عند جمع البيانات الفعلية.

تحت مثل هذه الشروط فإن تقديرات الإمكان الأعظم maximum likelihood estimators (MLE's) تكون :

1 - متسقة consistent سواء وجد أو لم يوجد منطقة طوي في نموذج الكابل المنحنى.



2 - تتقارب إلى توزيع معتدل متعدد multivariate normal إذا وجد منطقة طوي غير صفيرية في نموذج الكابل المنحني. وفي هذه الحالة اختبار نسبة الإمكان الأعظم تتقارب إلى توزيع كا² بدرجتين حرية

2 - نموذج الكابل المنحني

دالة الانحدار للمتغير التابع x هي :

$$f(x; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 q(x; \tau, \gamma),$$

حيث :

$$q(x; \tau, \gamma) = \frac{(x - \tau + \gamma)^2}{4\gamma} 1\{|x - \tau| \leq \gamma\} + (x - \tau) 1\{x - \tau > \gamma\} \quad (1)$$

وهو نموذج الكابل المنحني bent-cable الأساسي

وإذا أخذنا في الاعتبار المشاهدات $\{(x_i, Y_i)\} i=1, \dots, n$ المتولدة من نموذج الكابل المنحني فإن نموذج الانحدار يكون:

$$Y_i = q(x_i; \theta_0) + \varepsilon_i, \text{ where } \varepsilon_i \text{ are iid. } \sim N(0, \sigma^2) \text{ for a known } \sigma^2 \quad (2)$$

والدالة q هي دالة الكابل المنحني الأساسية، و $\theta_0 = (\tau_0, \gamma_0)$ هي معلمات النموذج

y_i هي مشاهدة المتغير التابع عند الزمن $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$;

$I(A)$ دالة مؤشر = 1 إذا كان (A) صحيحا وتساوي صفر عدا ذلك

β_0 and β_1 الجزء المقطوع ومعامل الانحدار على التوالي للجزء الخطي الداخل

$\beta_1 + \beta_2$ معامل انحدار الجزء الخطي الخارج

τ and γ مركز ونصف عرض على التوالي لمنطقة الانتقال

ε_i الخطأ العشوائي

ولإجراء تقدير المعلمات التي تقع في الفراغ غير المحدود $\Omega = (-\infty, M] \times [0, \infty)$ للمعلمة

θ_0 ونطاق الانحدار المفتوح $X = R$ open regression domain وتكون M حد أعلى محدود

لقيم τ -values والحد الأدنى لقيم γ -values بالطبع صفر (عندها يؤول الكابل المنحني إلى

عصا مكسورة). أي كابل منحني أساسي $q(x; \theta)$ for $\theta \in \Omega$ هو نموذج مرشح لتقدير θ_0

حيث نبحت خلال فئة من الكابل المنحني الأساسي مقابل فئة النماذج ذات الثلاث مراحل كما في



Feder, P. I. (1975) وهذا يسمح بمرونة أكثر من Gallant in Gallant, A. R. (1974) وكذلك Gallant, A. R. (1975) أو Ivanov, A. V. (1997). بالإضافة إلى الحد الأعلى غير المحدود لنطاق τ -space فشروط الانتظام الوحيدة تكون على النقاط x_1, \dots, x_n . والأهمية العملية لهذه الشروط أنها تشير إلى تصميم يتطلب من الباحث من جمع بيانات المتغير المستقل X بطريقة صحيحة وموثوق فيها حتى يمكن الوصول إلى تقديرات دقيقة للمعاملات

3 - مقدر الإمكان الأعظم (MLE) Maximum Likelihood Estimator

بأخطاء $\hat{\theta}_n$ تتبع توزيع معتدل فإن تقدير الإمكان الأعظم MLE للخطأ θ_0 يتساوى تماما مع تقدير المربعات الصغرى. وبالذات فإن لوغاريتم الإمكان الأعظم للخطأ $\theta \in \Omega$ هو :

$$l_n(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [Y_i - q(x_i; \theta)]^2 + \text{constant} \quad (3)$$

والتي تكون خطية في مجموع مربعات الخطأ. وإذا أخرجت عينة ما عدد من القيم التي تعظم دالة لوغاريتم الإمكان الأعظم، نختار $\hat{\theta}_n$ بالتتابع كما يلي:

- (أ) اختيار القيمة (القيم) ذات أقل متجه معياري
- (ب) الإبقاء على القيمة (القيم) ذات أقل قيم γ -value
- (ج) وعند الضرورة اختيار القيمة (القيم) ذات قيم τ -value

4 - متطلبات الكابل المنحني الأساسي

Given $\delta > 0$ and sequence $\xi_n \downarrow 0$,

$$c_0(\delta) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum 1 \{ |x_i - \tau_0| \leq \gamma_0 + \delta \}$$

$$c_-(\delta) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum 1 \{ |x_i - \tau_0| \leq \gamma_0 - \delta \}$$

$$c_+(\delta) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum 1 \{ x_i \geq \tau_0 + \gamma_0 + \delta \}$$

$$\zeta(\xi_n) = \frac{1}{n} \sum 1 \{ ||x_i - \tau_0| - \gamma_0| \leq \xi_n \}$$

The regularity conditions on the design are

[A₁] If $\gamma_0 = 0$, then $\forall \delta > 0, c_0 > 0$

[A₂] If $\gamma_0 > 0$, then $\exists \delta_1 > 0$ such that $c_-^* \equiv c_-(\delta_1) > 0$



- [B] For $\gamma_0 \geq 0$, $\exists \delta_{11} > 0$ such that $c_+^* \equiv c_+ (\delta_{11}) > 0$
 [C] If $\gamma_0 > 0$, then $\forall \xi_n \downarrow 0, \zeta(\xi_n) \rightarrow 0$
 [D] If $\gamma_0 > 0$, then $x_i \neq \tau_0 \pm \gamma_0 \forall i = 1, \dots, n$

وعملياً فإن الشروط من [A] إلى [D] عبارة عن دليل لتصميم التجربة، ولدقة تقدير معاملات نموذج الكابل المنحني يجب وجود عدد من المشاهدات داخل منطقة التغير $[\tau_0 - \gamma_0, \tau_0 + \gamma_0]$ أي منطقة الانحناء وذلك إذا كان $0 < \gamma_0$ (الشرط [A₂]) ومن جميع النقط المجاورة لنقطة الانقلاب τ_0 إذا كان $0 = \gamma_0$ (الشرط [A₁]) يضاف إلى ذلك لابد من وجود مشاهدات في منطقة الخروج الخطية (الشرط [B]). ولما كانت معاملات النموذج الحقيقية مجهولة فإن الباحث بخبرته يجب أن يقترح مجموعة من القيم التي يحتمل إلى حد كبير أن تكون داخل النموذج. والشرط [C] يمنع تراكم قيم كثيرة في نقاط الاتصال في نموذج الكابل المنحني المقترح. أما الشرط [D] فيستخدم لتفادي المشاكل الفنية في تعريف دالة معلومات فيشر Fisher Information Function ولكن يمكن حذفه لتفادي التعقيدات الحسابية. وبعيدا عن الفنيات فمن المقبول - في حالة المتغيرات المفسرة المستمرة - نستبعد القيمة المساوية لقيمة الاتصال المفسرة

5 - نموذج الكابل المنحني ذو المعلمة الواحدة

نفرض أن موضع الانحناء τ_0 معروف،
 نفرض أن موقع منطقة الانحناء معروف، خذ $0 = \tau_0$ فإن نموذج الكابل المنحني الأساسي سيكون:

$$q(x; \gamma_0) = \frac{(x + \gamma_0)^2}{4\gamma_0} 1\{|x| \leq \gamma_0\} + x 1\{x > \gamma_0\} \quad (3)$$

على نطاق الانحدار $R = x$ وفراغ المعلمات $\Omega =]0, \infty[$ ومرة أخرى نعتبر تقدير الإمكان الأعظم للمعلمة γ_0 من مجموعة المشاهدات $\{(x_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ الناتجة من المعادلة (1)

والحقيقة المتشابكة "kinked truth" عندما يكون المجهول γ_0 يساوي صفر لأنه أحد حدي الفراغ Ω وهذا نموذج غير معرف "unidentified model" بالمعنى الذي قدمه Feder, P. (1975) حيث يكون قطاع نموذج الانحدار مفقودا. وبمثال تطبيقي اظهر "فيدر" في هذا البحث أن تقدير الإمكان الأعظم لا يؤول إلى توزيع طبيعي إذا كان النموذج غير المعرف ويجب ملاحظة أنه لما كان $0 = \gamma_0$ هي قيمة على حد الفراغ Ω ، فإن تقارب الجذر التكميبي الذي قدمه Kim, J., Pollard, D. (1990) لا ينطبق في هذه الحالة

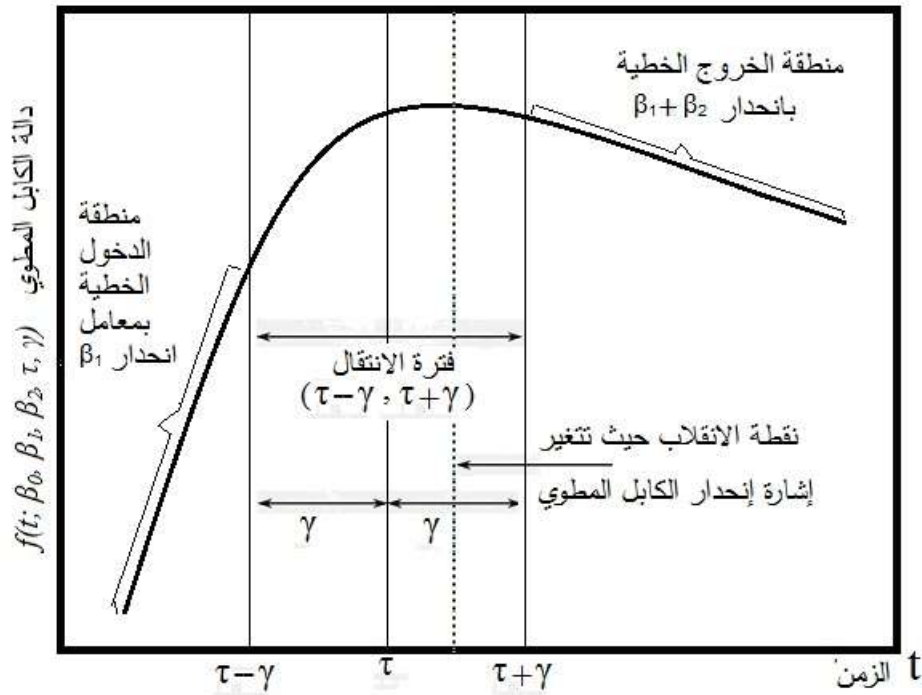


وفي هذا النموذج فترة الانتقال تبدأ عند الزمن $\tau - \gamma$ وتنتهي عند الزمن $\tau + \gamma$ ونقطة الانقلاب $\tau - \gamma - \frac{2\beta_1\gamma}{\beta_2}$ حيث تتغير إشارة معامل انحدار الكابل المنحني (Chiu (2010) and Lockhart

شكل (2)

عرض بياني لدالة الكابل المنحني

$$f(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau, \gamma) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 q(t; \tau, \gamma)$$



نموذج الكابل المنحني يتضمن منطقة انتقال منحنية تمثلها دالة من الدرجة الثانية (معادلة (1)) وعمليا فإن دالة الدرجة الثانية من الكابل المنحني قد تؤدي إلى فترة انتقال $[\tau_1, \tau_2]$ والتي قد تكون أطول أو أقصر من اللازم لوصف منطقة الانتقال بدقة

6 - دراسة حالة

مناخ مصر

طبقا لنظام كوبن Köppen على موقع (<https://www.midat.org>) فإن مناخ مصر أساسا صحراوي حار (BWh) وهو مناخ جاف جداً في البلاد كلها عدا منطقة سواحل البحر المتوسط



الشمالية التي تتلقى بعض الأمطار في فصل الشتاء . وبالإضافة إلى ندرة الأمطار في مصر فإن درجة الحرارة تكون عالية في فصل الصيف ولكنها تكون لطيفة على السواحل الشمالية

الرياح السائدة

الرياح الشمالية الغربية القادمة من البحر المتوسط تهب باستمرار على السواحل الشمالية بدون أي عوائق جبلية وهكذا تعتبر درجة الحرارة معتدلة طوال العام. فدرجة الحرارة في فصل الشتاء تتراوح من 9.5 إلى 23 درجة مئوية وفي فصل الصيف تتراوح درجة الحرارة من 17 إلى 32 درجة مئوية. ودرجات الحرارة معتدلة على السواحل الشمالية بسبب الرياح الشمالية الغربية القادمة من البحر المتوسط إلا أن تأثيرها لا يصل إلى داخل البلاد حيث تكون درجة الحرارة مرتفعة جدا في مصر الوسطى والعليا خاصة في الصيف حيث تصل درجة الحرارة إلى 40 درجة مئوية كما في أسوان والأقصر وأسيوط وسوهاج التي تقع في الصحراء المصرية

أهمية دراسة المناخ

مناخ مصر، وخاصة درجة الحرارة اليومية لها تأثير كبير على نشاطين رئيسيين في مصر هما السياحة والزراعة، فأماكن كثيرة في مصر هي منتجعات صيفية بينما أماكن أخرى منتجعات شتوية وفي الحالتين تكون درجة الحرارة اليومية ذات أهمية كبرى. أما بالنسبة للزراعة فإن المحاصيل الزراعية تتأثر بدرجات الحرارة العالية أو المنخفضة. إذن دراسة درجات الحرارة ذات أهمية كبرى سواء مناخيا أو إحصائيا، وباستخدام الطرق الإحصائية التقليدية أو الحديثة نستطيع أن نبحث ونقدر التغيرات المناخية المحتملة ونكشف عن عدم التأكد في فهمنا الحالي للعمليات المناخية ونماذجها.

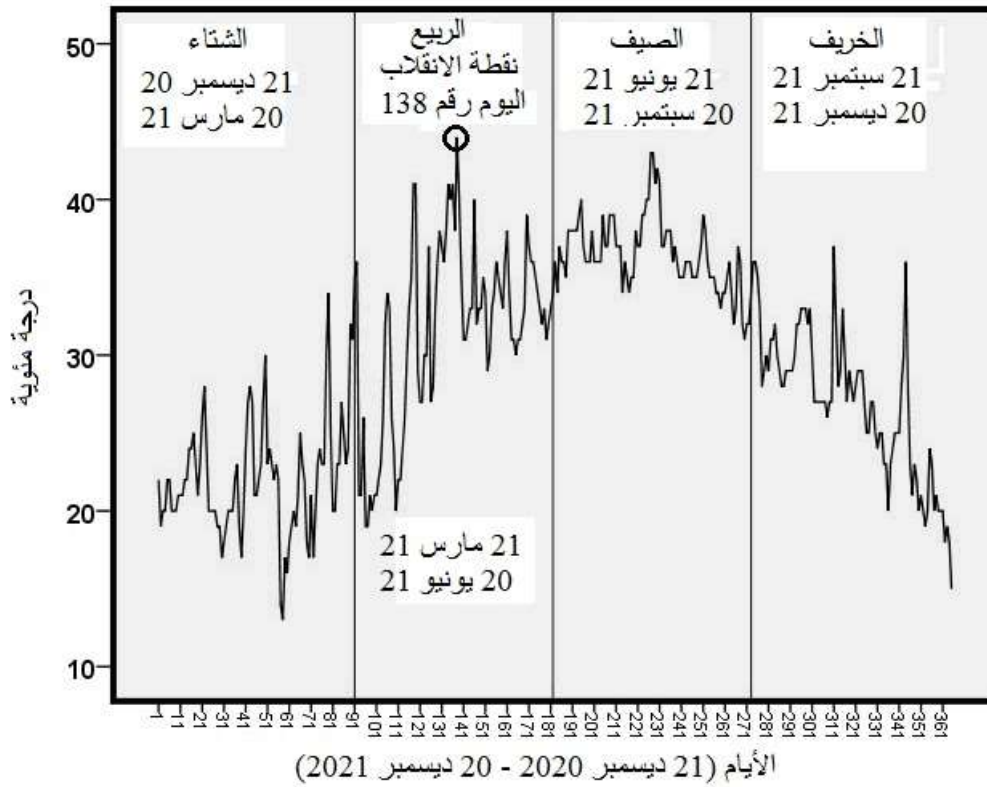
وقد تم تجميع درجات الحرارة اليومية لفصول لسنة 2021 الأربعة من موقع www.https://accuweather.com وكذلك تنبؤات لسنة 2022 والتي يحسبها كمتوسط درجات الحرارة في السنوات الثلاث السابقة وذلك لمقارنتها بالتنبؤات الناتجة من نموذج الكابل المنحني



يوضح شكل (3) التالي درجة الحرارة اليومية العظمى خلال الفصول الأربعة لعام 2021

شكل (3)

درجات الحرارة العظمى اليومية في القاهرة خلال فصول 2021 الأربعة



7 - الاختبارات الإحصائية

باستخدام برنامج SPSS-20 سوف نجري الاختبارات الإحصائية اللازمة فاختبار العشوائية لبيانات 2021 تظهر أنها غير عشوائية كما يوضحها جدول (1) التالي

جدول (1)

اختبار العشوائية

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The sequence of values defined by Temp of 2021 ≤ 30.00 and > 30.00 is random.	One-Sample Runs Test	.000	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

ويظهر اختبار كولموجروف - سميرنوف لبيانات 2021 أنها لا تتبع توزيع طبيعي



جدول (2)

اختبار كولموجروف - سميرنوف للاعتدالية

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Temp of 2021 is normal with mean 29.26 and standard deviation 6.91.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.000	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

الاختبارات الإحصائية السابقة أظهرت أن البيانات غير عشوائية ولا تتبع توزيع إحصائي طبيعي

8 - تقديرات الكابل المنحني

وكما سبق وعرضنا في شكل (3) فإن نموذج الكابل المنحني الأساسي يتكون من ثلاث مراحل

المرحلة الأولى Phase I:

الدالة الخطية الداخلة وهي من بداية البيانات من الناحية اليسرى حتى بداية فترة الانتقال

جدول (4)

الدالة الخطية الداخلة

Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1 (Constant)	19.391	.834		23.247	.000
T	.063	.012	.435	5.250	.000

a. Dependent Variable: Y

$$\hat{Y}_1 = 19.391 + 0.063 t_1$$

المرحلة الثانية Phase II:

فترة الانتقال وهي دالة من الدرجة الثانية حيث تتصل الدالتين الداخلة والخارجة

جدول (5)

دالة الدرجة الثانية لفترة الانتقال

Model Summary and Parameter Estimates

Dependent Variable: Y

Equation	Model Summary					Parameter Estimates		
	R Square	F	df1	df2	Sig.	B0	β1	β2
Quadratic	.125	10.763	2	151	.000	32.396	.094	-.001-

The independent variable is t.



وتقدير دالة فترة الانتقال هو

$$\hat{Y}_2 = 32.396 + 0.094 t - 0.001 t^2$$

المرحلة الثالثة Phase III:

الدالة الخطية الخارجة وهي من نهاية فترة الانتقال حتى نهاية البيانات

جدول (6)
الدالة الخطية الخارجة

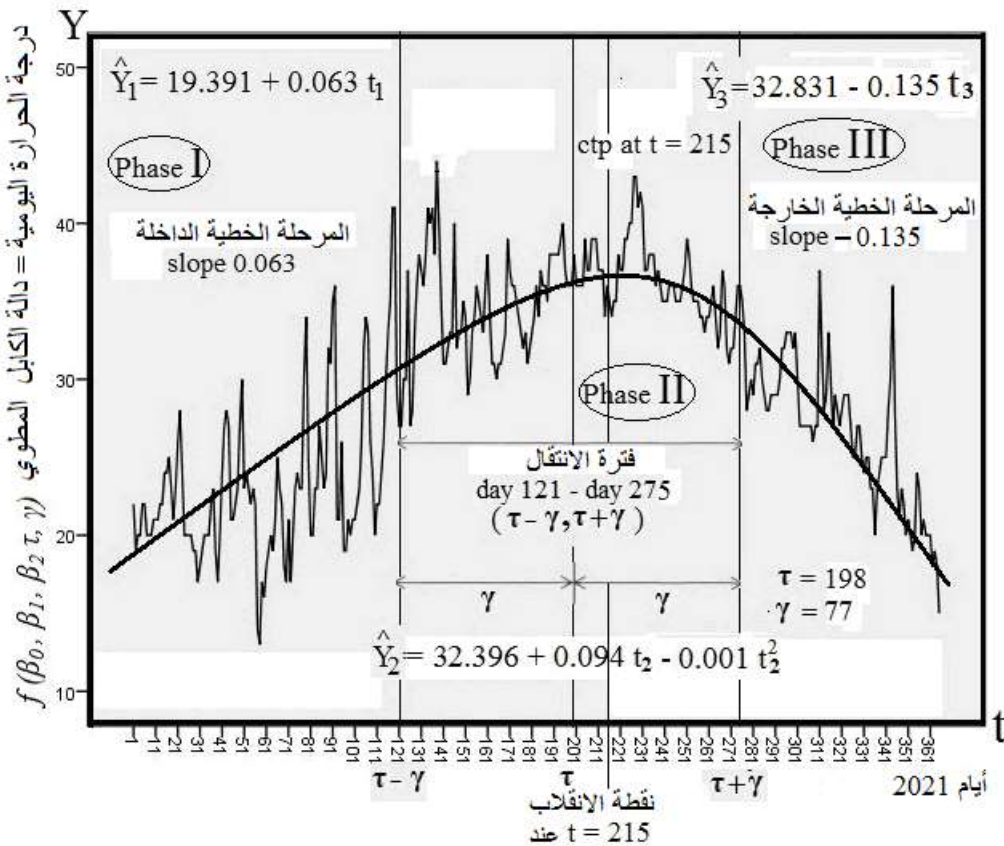
Coefficients ^a						
Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	
	B	Std. Error	Beta			
1	(Constant)	32.831	.609		53.887	.000
	T	-.135	.012	-.778	-11.630	.000

a. Dependent Variable: Y

$$\hat{Y}_3 = 32.831 - 0.135 t_3$$

شكل (4)

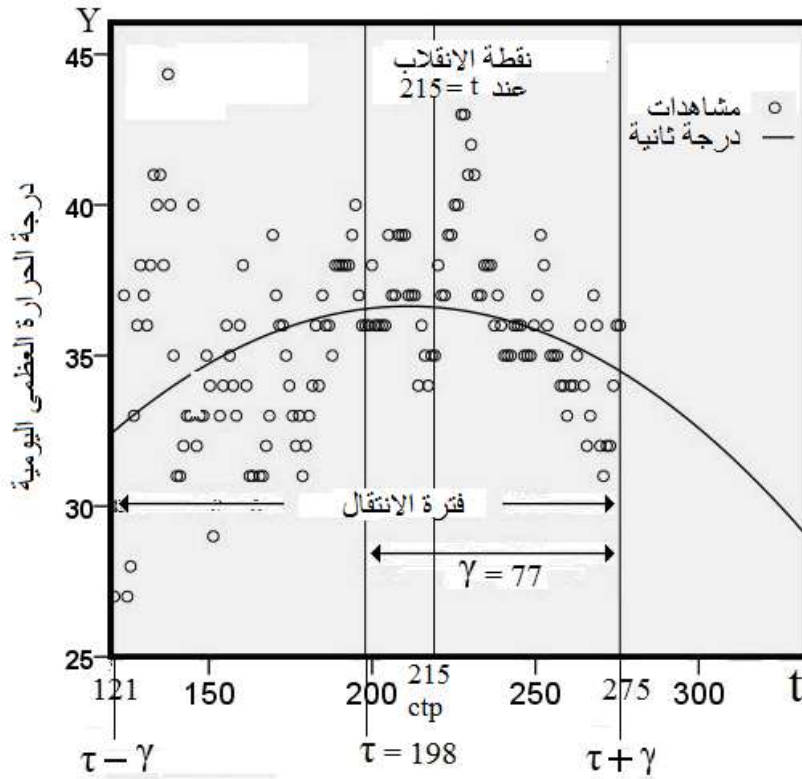
المراحل الثلاثة لنموذج الكابل المنحني





شكل (5)

تقدير دالة الدرجة الثانية لفترة الانتقال



نقطة الانقلاب **critical change point (ctp)** تحدث عندما يكون انحدار دالة الدرجة الثانية يساوي صفر نوجد دالة الميل بأخذ المشتقة الأولى لدالة فترة الانتقال ونساويها بالصفر

$$\frac{d(32.396 + 0.094t - 0.001t^2)}{dt} = 0.094 - 0.002t$$

إذن

$$0.094 - 0.002t = 0 \Rightarrow t = 47$$

وهي منتصف فترة الانتقال فيكون نقطة الانقلاب عند

$$ctp = 2t + \tau - \gamma = 47 + 198 - 77 = 215$$

9 - تنبؤات 2022

يتكون نموذج الكابل المنحني من ثلاث معادلات هي:

1 - مرحلة الدخول الخطية من اليوم 1 حتى اليوم 120

$$\hat{Y}_1 = 19.391 + 0.063 t_1$$

2 - دالة من الدرجة الثانية تمثل فترة انتقال من اليوم 121 حتى اليوم 275

$$\hat{Y}_2 = 32.396 + 0.094 t_2 - 0.001 t_2^2$$



3 - مرحلة الخروج الخطية من اليوم 276 حتى اليوم 365

$$\hat{Y}_3 = 32.831 - 0.012 t_3$$

يوضح الجدول (7) التالي تنبؤات الكابل المنحني لدرجات الحرارة في القاهرة خلال 2022 مقارنة بتلك المنشورة بواسطة <https://accuweather.com>

جدول (7)

تنبؤات درجات الحرارة العظمى في القاهرة خلال 2022

تنبؤات P2 = accuweather

تنبؤات الكابل المنحني P1 =

Phase I				Phase II				Phase III			
day	P1	P2	P1-P2	day	P1	P2	P1-P2	day	P1	P2	P1-P2
1	19.5	22	- 2.5	121	32.5	27	5.5	276	32.7	35	- 2.3
20	20.7	23	- 2.3	140	33.9	35	- 1.1	280	32.1	30	2.1
40	22.0	20	2.0	160	34.6	36	- 2.6	300	29.4	33	- 2.6
60	23.2	16	7.2	180	34.4	32	- 2.4	320	26.7	27	- 0.3
80	24.5	25	-0.5	200	33.5	38	- 4.5	340	24.0	25	- 1.0
100	25.7	21	4.7	220	31.8	38	- 6.2	360	21.3	20	1.3
120	27.0	29	- 2	240	29.3	35	- 5.7	365	20.7	15	- 4.3
				260	26.0	34	- 8				
				275	22.9	36	- 3.1				

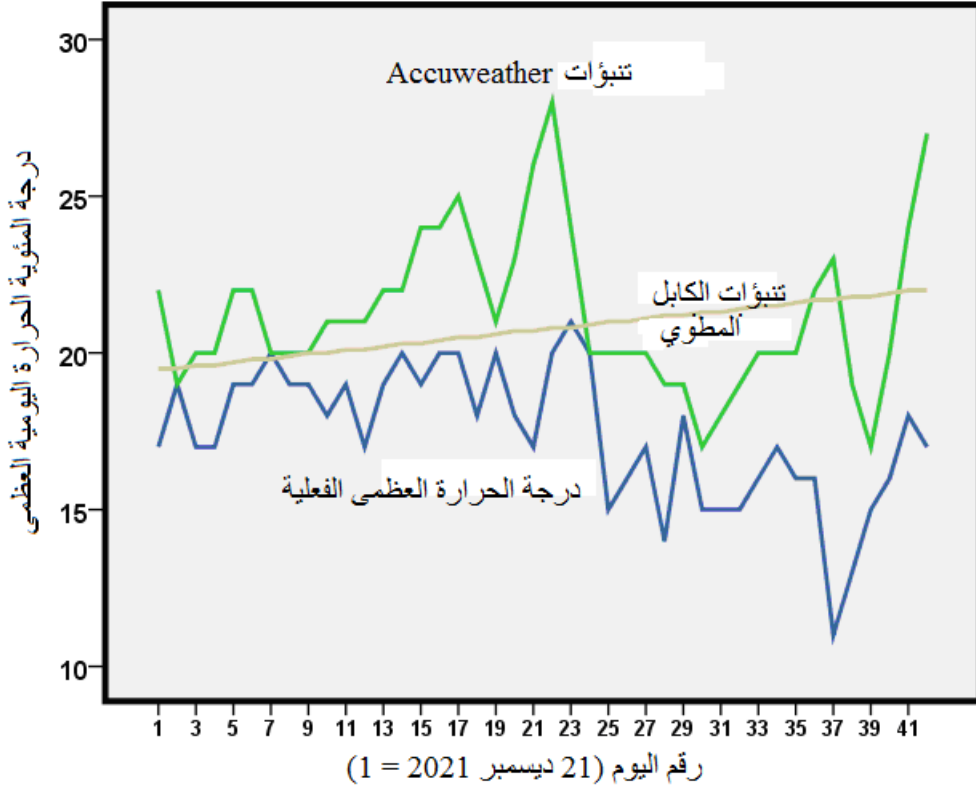
10 - مناقشة

تقوم تنبؤات accuweather على بيانات تاريخية بأخذ متوسط السنوات الثلاث السابقة أي متوسط درجات الحرارة العظمى اليومية في سنوات 2019 و 2021 و 2021 مع الأخذ في الاعتبار أن السنة المناخية تبدأ 21 ديسمبر من السنة حتى 20 ديسمبر من السنة التالية. ولما كانت درجات الحرارة في السنوات الثلاث أعلى من معدلاتها الطبيعية لذلك كان من المنطقي أن تكون تنبؤات accuweather أعلى من البيانات الفعلية المسجلة خلال ال 41 الأولى عام 2022 بينما قامت تنبؤات الكابل المنحني على بيانات 2021 فكانت أقرب إلى الواقع، وفي الواقع فإن كلا من التنبؤات كانت أعلى من البيانات الفعلية لأن السنوات الثلاث السابقة كانت أعلى من معدلاتها الطبيعية



شكل (6)

تنبؤات Accuweather والكابل المنحني مقارنة بالبيانات الفعلية

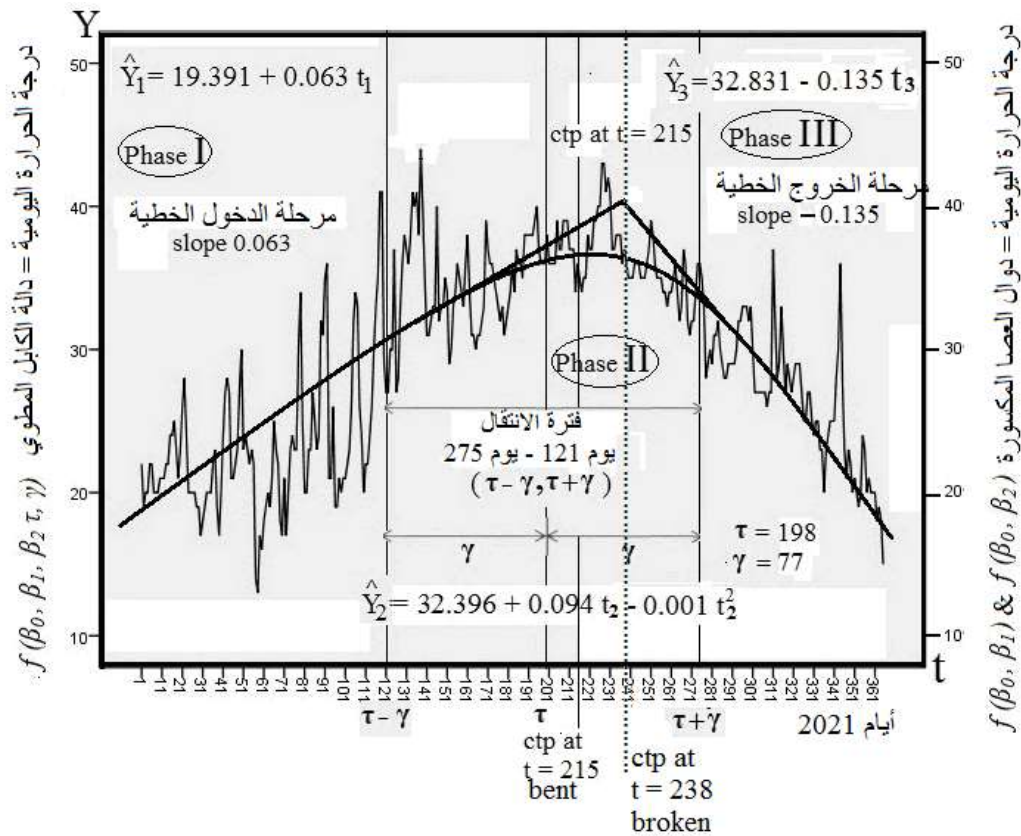


11 - العصا والمكسورة والكابل المنحني

يوضح شكل (7) مرحلتي العصا المكسورة مقارنة بالمراحل الثلاث للكابل المنحني. يلاحظ أنه قبل وبعد فترة الانتقال يتطابق النموذجين، ولكن يحدث الاختلاف في فترة الانتقال فبالنسبة للعصا المكسورة فإن $\gamma = 0$ بينما في الكابل المنحني $\gamma = 77$ ونتيجة لذلك فإن نقطة الانقلاب (CTP) تكون عند اليوم 238 في العصا المكسورة بنما تحدث عند اليوم 215 في نموذج الكابل المنحني ومن ثم فإن تنبؤات العصا المكسورة سوف تختلف عن تنبؤات الكابل المنحني في فترة الانتقال.

شكل (7)

نموذجي العصا المكسورة والكابل المنحني



يلخص الجدول (8) التالي مقارنة التنبؤات الثلاثة حيث يتضح أن تنبؤات العصا المكسورة تكون أعلى من تنبؤات الكابل المنحني في فترة الانتقال

شكل (8)

مقارنة التنبؤات خلال فترة الانتقال

P1 = الكابل P2 = accuweather P3 = العصا

day	P1	P2	P3	P3-P1	P3-P2
121	32.5	27	33.9	1.4	6.9
140	33.9	35	38.8	4.9	3.8
160	34.6	36	37.7	3.1	1.7
180	34.4	32	36.5	2.1	4.5
200	33.5	38	35.3	1.8	- 2.7
220	31.8	38	34.1	2.3	- 3.9
240	29.3	35	32.9	3.6	- 2.1
260	26.0	34	31.7	5.2	- 2.3
275	22.9	36	29.5	6.6	- 6.5

ومن الجدير بالملاحظة أن جميع التنبؤات أعلى من البيانات الفعلية للأيام الأولى من عام 2022 وذلك لأنها مبنية على بيانات عام 2021 التي كانت أعلى من المعدلات الطبيعية.



المراجع:

- Barrowman, N. J., Myers, R. A. (2000). Still more spawner-recruitment curves: the hockey stick and its generalizations. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 57, 665–676.
- Brown, C. C. (1987) in *Toxic Substances and Human Risk: Principles of Data Interpretation* (eds. Tardiff, R. G., Rodrick, J. V.) 237–268. Plenum, New York.
- Chiu, Grace S, (2002), *Bent-Cable Regression for assessing Abruptness of Change*, Ph.D thesis, Simon Fraser University .
- Chiu, Grace S., Lockhart, Richard Arthur (2010) *Bent-Cable Regression with Autoregressive noise*, the *Canadian Journal of Statistics*, Vol 38 N^o 3, 2010, PP 386-407 .
- Chiu, Grace S., Lockhart, Richard Arthur and Routledge, Richard (2006) *Bent-Cable Regression Theory and Applications*, *Journal of the American Statistical Association*, February 2006 <https://www.researchgate.net/publication/4742466>.
- Feder, P. I. (1975). On asymptotic distribution theory in segmented regression problems — identified case. *Ann. Stat.* 3, 49–83.
- Feder, P. I. (1975). The log likelihood ratio in segmented regression. *Ann. Stat.* 3, 84–97.
- Gallant, A. R. (1974). *The Theory of nonlinear regression as it relates to segmented polynomial regressions with estimated join points*. Mimeograph Series No. 925. Institute of Statistics, North Carolina State University, Rayleigh, NC. BIBLIOGRAPHY 132.
- Gallant, A. R. (1975). *Inference for nonlinear models*. Mimeograph Series No. 875. Institute of Statistics , North Carolina State University, Rayleigh, NC.
- Ivanov, A. V. (1997). *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.



Khan, S. A. and Kar ,S. C. (2017) .Generalized bent-cable methodology for changepoint data: a Bayesian approach .Journal of Applied Statistics, pages 1–14.

Kim, J., Pollard, D. (1990). Cube root asymptotics. Ann. Stat. 18, 191–219.

Routledge, R. D. (1994). Least-squares estimation of a convex function with application to threshold estimation. Technical Report. Department of Mathematics and Statistics, Simon Fraser University, Burnaby, BC. 129 BIBLIOGRAPHY 130 .

Seber, G. A. F., Wild, C. J. (1989). Nonlinear Regression. Wiley, New York.

Setu Chandra Kar, (2017). Generalized Bent-Cable Methodology for Changepoint Data: A Bayesian Approach, M.Sc in Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon.

The Köppen Climate Classification. <https://www.midat.org>.

Tishler, A., Zang, I. (1981). A new maximum likelihood algorithm for piecewise regression. J. Amer. Stat. Assoc. 76, 980–987.