مجلة التجارة والتمويل

https://caf.journals.ekb.eg/

كلية التجارة – جامعة طنطا

العدد : الثالث

سبتمبر 2023

الجزء الثانى

تقدير معالم توزيع Exponential Lomax باستخدام طرق المعاينة المرتبة المختلفة

اعداد

أحمد حلمي أحمد القزاز

المدرس المساعد بقسم الإحصاء والرياضة والتأمين

كلية التجارة – جامعة دمنهور

الأستاذ الدكتور

عبد الرؤوف عبد الرحمن عبد الواحد

أستاذ الإحصاء – كلية التجارة – جامعة طنطا

الأستاذ الدكتور

نصر إبراهيم رشوان نصر أبو زيد

أستاذ ورئيس قسم الإحصاء والرياضة والتأمين –كلية التجارة – جامعة طنطا

المستخلص

يُقدم هذا البحث بعض الخصائص الإحصائية لتوزيع Exponential Lomax وهي دالة البقاء والدالة التراكمية لدالة الخطر ودالة العزوم والدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة والعزوم غير التامة الإحصاءات المرتبة ومقياس ريني إنتروبي. كما يستعرض هذا البحث تقدير معالم توزيع Exponential Lomax باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم ML والعزوم الخطية L-Moments في حالات مختلفة من طرق المعاينة وهي المعاينة العشوائية البسيطة SRS ومعاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطاً MRSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS. وقد توصل البحث الي ان المقدرات الناتجة من استخدام طرق المعاينة المرتبة RSS،MRSS، NRSS أكثر كفاءة من الناتجة من طريقة المعاينة العشوائية البسيطة SRS، وذلك من خلال دراسة محاكاة والتطبيق على بيانات حقيقية وذلك بالاعتماد على متوسط مربعات الاخطاءMSE.

الكلمات المفتاحية: معاينة المجموعة المرتبة RSS، معاينة المجموعة المرتبة وسيطاً MRSS، معاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS، المعاينة العشوائية البسيطة SRS، الإمكان الأعظم ML، العزوم الخطية L-Moments.

Abstract:

This paper, aims to study some of the statistical properties of the Exponential Lomax distribution, which are the survival function, Cumulative Hazard Function, Moment Function, Moment Generating Function, Characteristic Function, Incomplete Moments, Order Statistics, and Rényi Entropy measure. In this paper, unknown parameters of Exponential Lomax distribution were estimated using ML and L-moments methods based on SRS, RSS, MRSS, PRSS and NRSS techniques. In general, estimates based on NRSS, PRSS, MRSS, and RSS techniques are more efficient than SRS estimators, through a simulation study and application on real data, depending on the mean squares errors (MSE).

١– مقدمة

تهدف المعاينة الإحصائية الي تقدير معالم المجتمع المجهولة، وذلك من خلال سحب عينة تمثل مفردات هذا المجتمع مما يوفر الوقت والجهد والمال. توجد عدة طرق مختلفة لسحب العينة، والسبب في تعدد طرق السحب هو اننا نحاول اختيار الطريقة المثلي التي تجعل العينة ممثلة للمجتمع، بالإضافة الي حجم المعلومات التي يمكن الحصول عليها من العينة ودرجة مأمونية هذه المعلومات، والتي تختلف من طريقة الي اخري. فمثلا نلجأ الي استخدام أسلوب المعاينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample (SRS)، عندما يكون المجتمع المحسوب منه العينة مجتمع متجانس. بينما نلجأ الي استخدام أسلوب المعاينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample، عندما يكون المجتمع المحسوب منه العينة مجتمع غير متجانس وأمكن تقسيم مفرداته الي طبقات متجانسة فيما بينها. اما في حالة إذا أردنا الحصول على نتائج أكثر دقة وكفاءة وبأقل التكاليف، فيتم استخدام طريقة معاينة المجموعة المرتبة.

اقترح (McIntyre,1951) أسلوب جديد من أساليب المعاينة يسمي بمعاينة المجموعة المرتبة Ranked Set Sampling (RSS)، وذلك لتحسين كفاءة التقديرات الإحصائية، حيث قام باقتراح طريقة المجموعة المرتبة لتقدير انتاج حقول الرعي في استراليا. فهو أسلوب غير مكلف وفعال ادي الي زيادة الدقة في التقدير وذلك دون الاحتياج الي زيادة حجم العينة اللازمة للتقدير. وقد بين (Halls and Dell,1966) ان متوسط عينة RSS هو مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع وله تباين اقل مقارنة بمقدر SRS ولكن دون تقديم أي اثبات رياضي لذلك. وقد ثبت رياضيا بالبرهان (Takahasi and Wakimoto,1968) ان متوسط عينة RSS هو مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع وله تباين اقل مقارنه بمقدر SRS، وذلك إذا كان ترتيب الوحدات يتم بصورة كاملة، أي دون أخطاء في ترتيب وحدات المجموعة من الأدنى الي الأعلى. وقد توصل (Dell and Clutter,1972) الي ان مقدر RSS لمتوسط المجتمع أكثر كفاءة من مقدر SRS، ولكن مع اسقاط الشرط الذي يفترض كون الوحدات داخل المجموعة ترتب بصورة كاملة، أي سمحا للخطأ في ترتيب الوحدات داخل المجموعة أو العينة من الأصغر الي الاكبر وذلك حتى لو كان هناك أخطاء في الترتيب بالإضافة الي

ان RSS تستخدم حجم عينة اقل لحساب هذا التقدير. سميت هذه الطريقة بهذا الاسم لأنها تتضمن ترتيب لمفردات العينة المحسوبة من المجتمع المستهدف، ومعيار الترتيب في هذه الطريقة قد يعتمد على الفحص المرئي للقائم بالمعاينة او يعتمد على الخاصية محل الدراسة. وتعتبر فعالية معاينة المجموعة المرتبة RSS معرضة للنقصان بسبب الخطأ الذي قد يحدث في ترتيب وحدات العينة. فقد تم اقتراح تعديلات كثيرة للحصول على نتائج أفضل. استعرض (Samawi et al,1996) أسلوب معاينة المجموعة المرتبة باستخدام القيم المتطرفة Extreme Ranked Set Sampling (ERSS) لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع. قدم (Muttlak,1997) طريقة معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً واستخدمها أيضا في تقدير متوسط المجتمع (Median Ranked Set Sampling (MRSS، حيث تعد طريقة معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً من الطرق الفاعلة في تقليل الأخطاء في عملية الأخطاء في عملية ترتيب الوحدات داخل المجموعات. استعرض (Al-Saleh and Al-kadiri.2000) أسلوب معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة (Double Ranked Set Sampling (DRSS، حيث وجد ان مقدر متوسط المجتمع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة أكثر كفاءة من مقدر متوسط المجتمع عند استخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة او أسلوب المعاينة العشوائية عند أي حجم عينة. قدم (Samawi and Tawalbeh,2002) أسلوب معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً المزدوجة Double Median Ranked Set Sampling (DMRSS). حيث بين ان مقدر متوسط المجتمع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً المزدوجة أكثر كفاءة من مقدر متوسط المجتمع عند استخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً. اقترح (Muttlak,2003a) طريقة أخذ العينات المرتبة ذات التصنيف المئوي (Percentile Ranked Set Sampling (PRSS، لاستخدامها في تقدير متوسط المجتمع. حيث أوضح ان مقدر متوسط المجتمع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف المئوي أكثر كفاءة من مقدر متوسط المجتمع عند استخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً. اضاف (Muttlak,2003b) طريقة لاختيار العينات المرتبة ذات التصنيف الربيعي (Quartile Ranked Set Sampling (QRSS لاستخدامها في تقدير متوسط المجتمع. حيث أوضح ان مقدر متوسط المجتمع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة ذات

التصنيف الربيعي أكثر كفاءة من مقدر متوسط المجتمع عند استخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً. عرض (Rashwan,2010) طريقة معاينة المجموعة المرتبة باستخدام العُشيرات (CRSS) Decile Ranked Set Sampling لتقدير متوسط المجتمع، حيث أوضح ان مقدر متوسط المجتمع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة باستخدام العُشيرات أكثر كفاءة من مقدر متوسط المجتمع عند استخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة او أسلوب المعاينة العشوائية. استعرض (Zamanzade and Al-Omari,2016) طريقة جديد تسمي معاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الحديث Neoteric Ranked Set Sampling (NRSS) لتقدير الوسط الحسابي والتباين للمجتمع. حيث وجد ان مقدر متوسط المجتمع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الحديثة أكثر كفاءة من مقدر متوسط المجتمع عند استخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة او أسلوب المعاينة العشوائية عند نفس حجم العينة. اقترح (Hassan et al,2018) أسلوب معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة بالاعتماد على الوسيط Median Double Ranked Set Sampling (MDRSS) لتقدير متوسط المجتمع، حيث أوضحت ان مقدر متوسط المجتمع باستخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة بالاعتماد على الوسيط أكثر كفاءة من مقدر متوسط المجتمع عند استخدام أسلوب معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً وأسلوب معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة.

قدم Fisher طريقة عامة للتقدير عام ١٩٢٠ تسمي طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method. تعتبر طريقة الإمكان الأعظم إحدى اهم وأكثر الطرق انتشارا في الإحصاء لتقدير معالم التوزيع الاحتمالي الاحصائي. إذا كانت $X = (X_1, X_2, .., X_n)$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه الاحتمالي $f(x;\theta)$ ، فانه يمكن تعريف دالة الإمكان لهذه العينة على انها التوزيع المشترك لمفردات العينة. تستخدم طريقة الإمكان الاعظم في إيجاد تقدير مثل $\hat{\theta}$ للمعلمة θ والذي يجعل دالة الإمكان L في نهايتها العظمي. فاذا كان $\hat{\theta}$ دالة في مفردات العينة التي تجعل L في نهايتها العظمي عندئذ يقال ان $\hat{\theta}$ هو تقدير الإمكان الأعظم (MLE) Maximum Likelihood Estimation الي المعلمة θ .

عرف (Hosking,1990) طريقة العزوم الخطية L-moment بأنها عبارة عن توليفة خطية من العزوم الاحتمالية المرجحة Probability weighted Moment او توليفة خطية من القيمة المتوقعة للإحصاء الترتيبي، ومن هذه العزوم يمكن الحصول على العزم الأول والذي يمثل متوسط المجتمع، العزم الثاني والذي يعتبر كبديل للانحراف المعياري للمجتمع، وتستخدم العزوم الخطية لوصف شكل دالة كثافة الاحتمال.

تعدد الدراسات السابقة ذات الصلة بموضوع الدراسة الحالية من قبل العديد من الباحثين، فقد ناقش (Hussian,2014) طريقة لتقدير معالم الشكل والقياس لتوزيع Kumaraswamy بطريقتي الإمكان الأعظم ML وطريقة بييز Bayesian بالاعتماد على اسلوبي المعاينة العشوائية البسيطة SRS والمعاينة المجموعة المرتبة RSS بالاعتماد على دراسة محاكاة. استعرض (Samuh and Qtait,2015) طريقة لتقدير معالم المجهولة لتوزيع Exponentiated Exponential بطريقة الإمكان الأعظم ML بالاعتماد على اسلوبي المعاينة المجموعة المرتبة RSS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة بالاعتماد على الوسيط MRSS بالاعتماد على دراسة محاكاة. تناول (Khamnei and Mayan,2016) طريقة لتقدير معالم الشكل والقياس لتوزيع Exponentiated Gumbel بطريقة الإمكان الأعظم ML بالاعتماد على اسلوبي المعاينة العشوائية البسيطة SRS والمعاينة المجموعة المرتبة RSS بالاعتماد على دراسة محاكاة. استخدم (Dey et al ,2016) طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معالم توزيع Rayleigh بالاعتماد على عدة طرق معاينة وهي معاينة العشوائية البسيطة SRS ومعاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة بالاعتماد على القيم المتطرفة ERSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS. اشار (Esemen and Gurler,2018)

الي طريقة لتقدير معالم توزيع Generalized Rayleigh المجهولة باستخدام أربعة طرق وهي طريقة المعاينة العشوائية البسيطة SRS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة RSS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة بالاعتماد على القيم المتطرفة ERSS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة بالاعتماد على الوسيط MRSS باستخدام طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معالم ذلك التوزيع. ناقش (Qian et al,2019) طريقة لتقدير معلمة القياس scale ومعلمة الشكل shape لتوزيع باريتو $\text{Pareto}(\theta, \alpha)$ في ثلاث حالات، وذلك عندما تكون أحدهما معلوم

او كلاهما غير معلوم باستخدام طريقة معاينة المجموعة المرتبة RSS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة بالاعتماد على القيم المتطرفة ERSS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة بالاعتماد على الوسيط MRSS. عرض (Joukar et al,2019) طريقة لتقدير مقدر نقطة ومقدر فترة لتوزيع Exponential-Poisson باستخدام ثلاث طرق وهي طريقة المعاينة العشوائية البسيطة SRS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة RSS وطريقة معاينة المجموعة المرتبة بالاعتماد على القيمة العظمى Maximum Ranked Set Sampling، وذلك في حالة عدم تساوي احجام العينات باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم ML وطريقة بييز Bayesian في تقدير معالم ذلك التوزيع. قدر (Sabry and Shaaban,2020) معالم توزيع Inverse Weibull باستخدام طريقة الإمكان الأعظم بالاعتماد على معاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الحديث NRSS ومعاينة المجموعة المرتبة المزدوجة ذات التصنيف الحديث DNRSS. قارن (Shaaban and Yahya,2020) بين معاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الحديثNRSS عند تقدير معالم توزيع Exponentiated Gumbel بالاعتماد على دراسة محاكاة. قدرت Hassan et al,2021) معالم توزيع Gamma/Gompertz باستخدام طريقة العزوم الخطية باستخدام المعاينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample (SRS) ومعاينة المجموعة المرتبة Ranked Set Sampling (RSS) ومعاينة المجموعة المرتبة باستخدام الوسيط Median Ranked Set Sampling (MRSS) ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف المئوي(Percentile Ranked Set sampling (PRSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الحديث Neoteric ranked set sampling (NRSS).استعرض (Rashwan and Tawfic,2022) تقدير معالم توزيع Exponentiated Pareto باستخدام طريقة الإمكان الاعظم باستخدام المعاينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample (SRS) ومعاينة المجموعة المرتبة Ranked Set Sampling (RSS) ومعاينة المجموعة المرتبة باستخدام الوسيط Median Ranked Set Sampling (MRSS) .

تُقدم هذه الدراسة بعض الخصائص الإحصائية لتوزيع Exponential Lomax وهي دالة البقاء والدالة التراكمية لدالة الخطر ودالة العزوم والدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة والعزوم غير التامة والإحصاءات المرتبة ومقياس ريني إنتروبي. وتستعرض هذه الدراسة تقدير معالم توزيع Exponential Lomax باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم ML والعزوم الخطية L-Moments في حالات مختلفة من طرق المعاينة وهي المعاينة العشوائية البسيطة SRS ومعاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطاً MRSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS.

٢- الخصائص الإحصائية لتوزيع Exponential Lomax

قدم (EL-Bassiouny et al,2015) توزيع Exponential Lomax، وقام بدراسة شكل التوزيع والخصائص الإحصائية للتوزيع وهي دالة الكسيرات ودالة الخطر ومعكوس دالة الخطر والعزوم المركزية والانحراف المتوسط عن الوسط والوسيط للتوزيع، بالإضافة الي تقدير معالم ذلك التوزيع باستخدام طريقة الإمكان الأعظم.

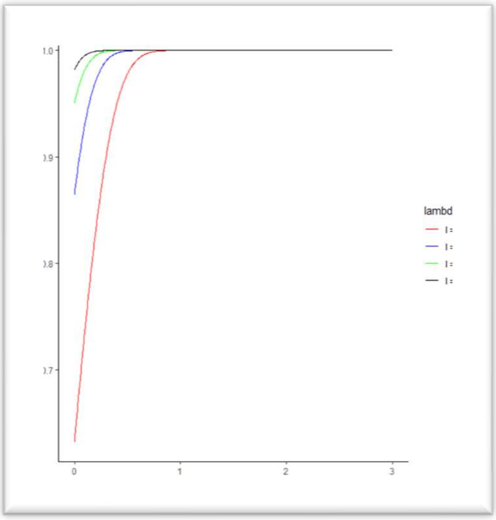
يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية لتوزيع Exponential Lomax على الصورة:

$$G(x;\ \lambda\,,\theta\,,\beta) = 1 - e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}} \qquad (1)$$

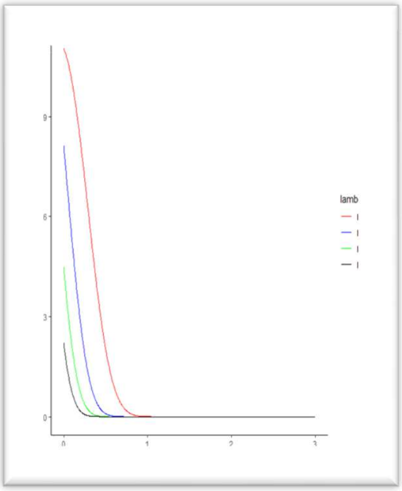
يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال لتوزيع Exponential Lomax على الصورة التالية:

$$g(x;\ \lambda\,,\theta\,,\beta) = \frac{\lambda\,\theta}{\beta}\ e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}} \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1} ,x \geq -\beta, \theta, \beta, \lambda > 0 \qquad (2)$$

وتأخذ شكل دالتي كثافة الاحتمال والتوزيع التراكمي لتوزيع Exponential Lomax عند قيم مختلفة من λ وثبات قيم $\theta = 6$ ، $\beta = 2$.



شكل دالة التوزيع التراكمي للتوزيع



شكل دالة كثافة الاحتمال للتوزيع

دالة الصلاحية/البقاء $(\boldsymbol{Reliability\ (Survival)\ Function})$:

إذا كان لدينا x متغير عشوائي متصل يعبر عن زمن الحياة life time، له دالة توزيع تراكمي $G(x)$ عند الفترة من $[0,\infty)$. فيمكن كتابة دالة الصلاحية/البقاء لتوزيع Exponential Lomax على الصورة التالي:

$$R(x) = P(X \geq x) = 1 - G(x) = e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta}} \qquad (3)$$

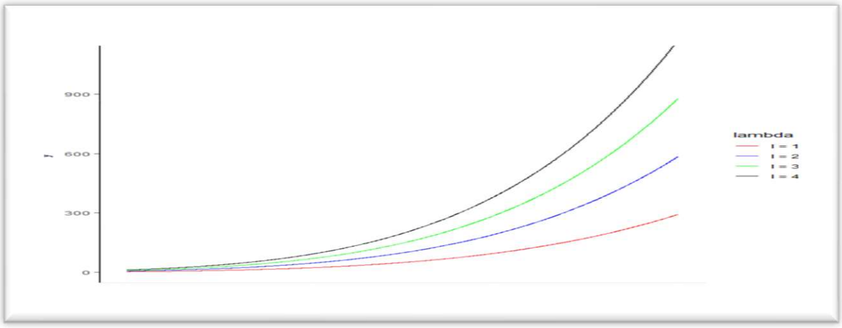
دالة الخطر $(\boldsymbol{Hazard\ function})$:

ويقصد بها الاحتمال الشرطي للفشل في الفترة $(x, x + \delta x)$ بشرط عدم وجود فشل حتى الزمن x.

وتأخذ دالة الخطر لتوزيع Exponential Lomax الصورة التالية:

$$h(x) = \frac{g(x)}{R(x)} = \frac{\lambda\,\theta}{\beta}\ \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta+1} \qquad \textbf{(4)}$$

يوضح الشكل التالي دالة الخطر لتوزيع Exponential Lomax، وذلك عند قيم مختلفة من λ وثبات قيم $\theta = 6$ ، $\beta = 2$



شكل (٥-٢) يصف دالة الخطر للتوزيع عند قيم مختلفة من λ

وتأخذ دالة معكوس دالة الخطر (Reversed Hazard Function) للتوزيع الصورة التالية:

$$r(x) = \frac{g(x)}{G(x)} = \frac{\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\ e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta}}\ \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta+1}}{1 - e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta}}} \qquad (5)$$

بينما تأخذ دالة الخطر التراكمية (Cumulative Hazard Function) للتوزيع الصورة التالية:

$$H(x) = -Ln\ R(x) = \lambda\ \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta} \qquad (6)$$

دالة العزوم (Moments Function):

العزوم ما هي الا ثوابت تحدد خصائص كثافة احتمال المتغير المتصل، وتُمكننا من التعرف على خصائص التوزيعات الإحصائية عن طريق مقاييس إحصائية مثل الوسط الحسابي والتباين ومعاملي الالتواء والتفرطح. ويمكن إيجاد دالة العزوم لتوزيع Exponential Lomax على الصورة التالية:

ويمكن إيجاد دالة العزوم لتوزيع Exponential Lomax على الصورة التالية:

$$\because E[X^k] = \int_{-\beta}^{\infty} x^k \, g(x) \, dx$$

$$E[X^k] = \int_{-\beta}^{\infty} x^k \, \frac{\lambda \, \theta}{\beta} \; e^{-\lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta}} \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta+1} \; dx$$

افترض ان

$$y = \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\theta\lambda}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta+1} \quad \therefore dx = \frac{dy}{\frac{\theta\lambda}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta+1}}$$

$$y = \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta} \quad \therefore \frac{y}{\lambda} = \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta} \quad \therefore x = \beta\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 1\right); \; 0 < y < \infty$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\beta\left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 1\right)\right)^k \frac{\lambda \, \theta}{\beta} \; e^{-\lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta}} \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta+1} \frac{dy}{\frac{\theta\lambda}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{-\theta+1}}$$

$$= \beta^k \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 1\right)^k e^{-y} \, dy$$

$$\because \left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 1\right)^k = \sum_{z=0}^{k} (-1)^z \binom{k}{z} \left(\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{k-z} = \sum_{z=0}^{k} (-1)^z \binom{k}{z} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{k-z}{\theta}}$$

$$= \beta^k \sum_{z=0}^{k} (-1)^z \binom{k}{z} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{k-z}{\theta}} e^{-\lambda \, y} \, dy$$

$$E[X^k] = \frac{\beta^k}{\lambda^{\frac{k-z}{\theta}}} \sum_{z=0}^{k} (-1)^z \binom{k}{z} \int_0^\infty y^{\frac{k-z}{\theta}} \; e^{-y}\, dy$$

$$E[X^k] = \sum_{z=0}^{k} \frac{(-1)^z \binom{k}{z} \beta^k}{\lambda^{\frac{k-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k-z}{\theta} + 1\right) \qquad (7)$$

حيث

$\Gamma(.)$: دالة جاما الكاملة

وبناء على ذلك فان متوسط هذا التوزيع هو

$$E[X] = \sum_{z=0}^{1} \frac{(-1)^z \binom{1}{z} \beta}{\lambda^{\frac{1-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{1-z}{\theta} + 1\right) = \frac{\beta}{\lambda^{\frac{1}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) - \beta\Gamma(1)$$

ويمكن حساب تباين هذا التوزيع كالتالي:

$$\therefore var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{z=0}^{2} \frac{(-1)^z \binom{2}{z} \beta^2}{\lambda^{\frac{2-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{2-z}{\theta} + 1\right)$$

$$\therefore var(X) = \sum_{z=0}^{2} \frac{(-1)^z \binom{2}{z} \beta^2}{\lambda^{\frac{2-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{2-z}{\theta} + 1\right) - \left[\sum_{z=0}^{1} \frac{(-1)^z \binom{1}{z} \beta}{\lambda^{\frac{1-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{1-z}{\theta} + 1\right)\right]^2$$

ويمكن حساب معامل الالتواء كالتالي:

$$\text{Coefficient of skewness } = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2\big(E(X)\big)^3}{(var(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$E[X^3] = \sum_{z=0}^{3} \frac{(-1)^z \binom{3}{z} \beta^3}{\lambda^{\frac{3-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{3-z}{\theta} + 1\right)$$

ويمكن حساب معامل التفرطح كالتالي:

$$\textbf{Coefficient of } \boldsymbol{kurtosis} = \frac{\boldsymbol{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)\big(E(X)\big)^2 - 3\big(E(X)\big)^4}}{\boldsymbol{(var(x))^2}}$$

$$\boldsymbol{E[X^4] = \sum_{z=0}^{4} \frac{(-1)^z \binom{4}{z} \beta^4}{\lambda^{\frac{4-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{4-z}{\theta} + 1\right)}$$

حيث

$\Gamma(.)$: دالة جاما الكاملة

الدالة المولدة للعزوم (Moment Generating Function):

ويمكن إيجاد الدالة المولدة للعزوم للتوزيع على الصورة التالية:

$$\because M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\beta}^{\infty} e^{tx}\, g(x)\, dx$$

$$= \int_{-\beta}^{\infty} e^{tx}\, g(x)\, dx$$

$$\because e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!}$$

$$= \int_{-\beta}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!}\, g(x)\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{-\beta}^{\infty} x^k\, g(x)\, dx$$

$$\because \int_{-\beta}^{\infty} x^k\, g(x)\, dx = \sum_{z=0}^{k} \frac{(-1)^z \binom{k}{z} \beta^k}{\lambda^{\frac{k-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k-z}{\theta} + 1\right)$$

$$= \sum_{z=0}^{k} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^z \binom{k}{z} \frac{t^k}{k!} \frac{\beta^k}{\lambda^{\frac{k-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k-z}{\theta} + 1\right)$$

$$M_x(t) = \sum_{z=0}^{k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^z \binom{k}{z} (\beta t)^k}{k!\,\lambda^{\frac{k-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k-z}{\theta} + 1\right) \qquad \textbf{(8)}$$

الدالة المميزة (Characteristic function):

أحيانا، لا تمتلك بعض التوزيعات الاحتمالية دالة مولدة للعزوم بسبب عدم تحقق خاصية التقارب المطلق مما يؤدى الي عدم معرفة الوسط الحسابي والتباين للتوزيع، لذلك يتم الاستعانة بالدالة المميزة، حيث ان لكل توزيع احتمالي دالة مميزة.

ويمكن كتابة الدالة المميزة لتوزيع Exponential Lomax على الصورة التالية:

$$\because \phi(t) = E\left[e^{itx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, g(x)\, dx$$

$$\phi(t) = \int_{-\beta}^{\infty} e^{itx}\, g(x)\, dx$$

$$\because\ e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}$$

$$\phi(t) = \int_{-\beta}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}\, g(x)\, dx$$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int_{-\beta}^{\infty} x^k\, g(x)\, dx$$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \sum_{z=0}^{k} \frac{(-1)^z \binom{k}{z}\, k}{\lambda^{\frac{k-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{k-z}{\theta} + 1\right)$$

$$\phi(t) = \sum_{z=0}^{k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^z \binom{k}{z}\, (it\beta)^k}{k!\ \lambda^{\frac{k-z}{\theta}}} \Gamma\left(\frac{m-z}{\theta} + 1\right) \qquad \textbf{(9)}$$

العزوم غير التامة (Incomplete moments)

يستخدم العزم الأول غير التام First Incomplete Moment في منحنيات Bonferroni and Lorenz curves، والتي تستخدم في مجالات الطب والاقتصاد والتأمين والجغرافيا، كما يشير العزم الأول غير التام الي الانحراف المتوسط عن الوسط والوسيط، بالإضافة الي ان يستخدم للحصول على متوسط وقت الحياة المتبقي ومتوسط زمن انتظار وقت الحياة mean residual life and mean waiting life. يمكن إيجاد دالة العزوم غير التامة للتوزيع على الصورة التالية:

$$M_x(Z) = E(X^k \setminus X < Z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i \binom{k}{i} \beta^k}{\lambda^{\frac{k-i}{\theta}}} \int_0^{\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+z}\right)^{-\theta}} y^{\frac{k-i}{\theta}} e^{-y}\, dy$$

$$M_x(Z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i \binom{k}{i} \beta^k}{\lambda^{\frac{k-i}{\theta}}} \Gamma_{\mathrm{I}}\left(\frac{k-i}{\theta} + 1, \lambda\left(\frac{\beta}{\beta+z}\right)^{-\theta}\right) \qquad (10)$$

حيث

$\Gamma_{\mathrm{I}}(.)$: دالة جاما غير التامة (الناقصة)

الإحصاءات المرتبة (Order Statistics)

افترض ان لدينا عينة عشوائية $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ حجمها n مسحوبة من مجتمع يتبع لتوزيع Exponential Lomax بدالة كثافة احتمال $g(x)$، وان $x_{1;n} \le x_{2;n} \le \dots x_{r;n} \cdots \le x_{n;n}$ هي الإحصاءات المرتبة لهذه العينة.

فان دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات المرتبة على الصورة التالية:

$$g_{r,n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\,[G(x)]^{r-1}\,(1-G(x))^{n-r}\,g(x)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right]^{r-1}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right)^{n-r}\frac{\lambda\theta}{\beta}\;e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right]^{r-1}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right)^{n-r+1}\frac{\lambda\theta}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1}$$

$$\because \left(1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right)^{r-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{r-1}{i}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right)^{i}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\,\frac{\lambda\theta}{\beta}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{r-1}{i}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right)^{n-r+i+1}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\,\frac{\lambda\theta}{\beta}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{r-1}{i}\,e^{-\lambda(n-r+i+1)\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1} \qquad (11)$$

مقياس ريني إنتروبي Rényi Entropy

إذا كان لدينا متغير عشوائي يتبع لتوزيع Exponential Lomax، فان مقياس Rényi Entropy، يمكن كتابته على الصورة التالية (Rényi,1961):

$$I_{x:R}(q) = \frac{1}{1-q}\,ln\left(I_x(q)\right)$$

$$\because I_x(q) = \int_R g^q(x)\,dx\,,\quad q > 0 \; and \; q \neq 1$$

$$I_x(q) = \int_{-\beta}^{\infty} \left(\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\right)^q \left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}}\right)^q \left(\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1}\right)^q dx$$

$$I_x(q) = \left(\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\right)^q \int_{-\beta}^{\infty} e^{-\lambda q\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}} \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{q(-\theta+1)} dx$$

افترض ان

$$y = \lambda q \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta} \therefore x = \beta\left(\left(\frac{y}{\lambda\, q}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 1\right);\ 0 < y < \infty$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\theta\lambda q}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1} \quad \therefore dx = \frac{dy}{\frac{\theta\lambda q}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1}}$$

$$I_x(q) = \left(\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\right)^q \int_{-\beta}^{\infty} e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta}} \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{q(-\theta+1)} \frac{dy}{\frac{\theta\lambda q}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1}}$$

$$I_x(q) = \frac{(\lambda\,\theta)^{q-1}}{q\,\beta^{q-1}} \int_{-\beta}^{\infty} e^{-y}\left(\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{-\theta+1}\right)^{q-1} dy$$

$$I_x(q) = \frac{(\lambda\,\theta)^{q-1}}{q\,\beta^{q-1}} \int_{-\beta}^{\infty} e^{-y}\left(\left(\frac{y}{\lambda q}\right)^{1-\frac{1}{\theta}}\right)^{q-1} dy$$

$$I_x(q) = \frac{(\lambda\,\theta)^{q-1}}{q\,\beta^{q-1}} \int_{-\beta}^{\infty} e^{-y}\left(\left(\frac{y}{\lambda q}\right)^{1-\frac{1}{\theta}}\right)^{q-1} dy$$

$$I_x(q) = \frac{(\lambda\,\theta)^{q-1}}{(\lambda q)^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)(q-1)} q\,\beta^{q-1}} \int_{-\beta}^{\infty} e^{-y} y^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)(q-1)} dy$$

$$I_x(q) = \frac{\lambda^{q-1}\theta^{q-1}}{\lambda^{\frac{q\theta}{\theta}-\frac{q}{\theta}+\frac{1}{\theta}-1} q^{\left(\frac{q\theta}{\theta}-\frac{q}{\theta}+\frac{1}{\theta}\right)}\ \beta^{q-1}} \int_{-\beta}^{\infty} e^{-y} y^{\left(\frac{q\theta}{\theta}-\frac{q}{\theta}+\frac{1}{\theta}\right)-1} dy$$

$$I_x(q) = \frac{\theta^{q-1}}{\lambda^{\left(\frac{1-q}{\theta}\right)} q^{\left(\frac{q\theta-q+1}{\theta}\right)}\ \beta^{q-1}} \int_{-\beta}^{\infty} e^{-y} y^{\left(\frac{q\theta}{\theta}-\frac{q}{\theta}+\frac{1}{\theta}\right)-1} dy$$

$$I_x(q) = \frac{\lambda^{\frac{(q-1)}{\theta}}\ \theta^{q-1}}{\beta^{q-1}\ q^{\frac{q(\theta-1)+1}{\theta}}}\ \Gamma\left(\frac{q\theta-q+}{\theta}\right)$$

$$\because I_{x:R}(q) = \frac{1}{1-q} ln\left(I_x(q)\right)$$

$$I_{x:R}(q) = \frac{-1}{1-q} ln\left(\frac{\lambda^{\frac{(q-1)}{\theta}}\ \theta^{q-1}}{\beta^{q-1}\ q^{\frac{q(\theta-1)+1}{\theta}}}\ \Gamma\left(\frac{q\theta-q+}{\theta}\right)\right) \qquad (12)$$

٣- طرق المعاينة المرتبة Ranked Set Sampling (RSS)

قدم (Balakrishnan and Chen ,1997) خطوات رئيسية لسحب مفردات عينة مجموعة مرتبة كالتالي:

أ- نقوم باختيار عدد n^2 مفردة بطريقة عشوائية من مفردات المجتمع المراد سحب العينة منه.

ب- نقوم بالتقسيم العشوائي لهذه المفردات الي عدد n مجموعة حجم كل منها n مفردة.

جـ - نرتب المفردات داخل كل مجموعة اما بالاعتماد على الفحص المرئي للقائم بالمعاينة أو على أساس المتغير محل الدراسة أو بأي طريقة اخري غير مكلفة.

يتم اختيار عينة مرتبة RSS كالتالي:

نختار من المجموعة الاولي المرتبة المفردة التي تقابل الرتبة الاولي الأقل $X_{(1)1}$ ، ونختار من المجموعة الثانية المرتبة المفردة التي تقابل الرتبة الثانية $X_{(2)2}$ وهكذا تستمر العملية حتى نصل الي المفردة الأخيرة وهي المفردة التي تقابل الرتبة الأكبر في المجموعة وهي $X_{(m)m}$ ، وبالتالي سوف نحصل على عينة حجمها n مفردة. وبتكرار سحب العينة m من المرات بنفس الخطوات ينتج لنا عينة RSS حجمها nm مفردة.

ويمكن كتابة دالة التوزيع التراكمي لمفردات لهذه العينة على الصورة التالية:

$$F_n\left(x_{(i)j}\right) = \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} \left[F\left(x_{(i)j}\right)\right]^r \left(1 - F\left(x_{(i)j}\right)\right)^{n-r} \qquad (13)$$

ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال لمفردات لهذه العينة على الصورة التالية:

$$f_n\left(x_{(i)j}\right) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \left[F\left(x_{(i)j}\right)\right]^{i-1} \left(1 - F\left(x_{(i)j}\right)\right)^{n-i} f\left(x_{(i)j}\right) \qquad (14)$$

حيث

$$i = 1,2..,n\,;\; j = 1,2,...,m\,;\; -\infty < x_{(i)j} < \infty$$

٤- معاينة المجموعة المرتبة باستخدام الوسيط Median Ranked Set Sampling (MRSS)

قدم (Muttlak,1997) طريقة معاينة المجموعة المرتبة باستخدام الوسيط. وقد استخدام هذه الطريقة لتقدير متوسط المجتمع وذلك من خلال الخطوات التالية:

أ- نقوم باختيار عدد n^2 مفردة بطريقة عشوائية من مفردات المجتمع المراد سحب العينة منه.

ب- نقوم بالتقسيم العشوائي لهذه المفردات الي عدد n مجموعة حجم كل منها n مفردة.

جـ - نرتب المفردات داخل كل مجموعة اما بالاعتماد على الفحص المرئي للقائم بالمعاينة او على أساس المتغير محل الدراسة أو باي طريقة أخري غير مكلفة.

د- إذا كان حجم المجموعة فردي، نقوم باختيار المفردة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ من كل المجموعات المرتبة.

هـ - إذا كان حجم العينة عدد زوجي، نقوم بتقسيم المجموعات الي جزئيين متساويين عدد كل منها $\frac{n}{2}$ مجموعة مرتبة، نختار المفردة التي ترتيبها $\frac{n}{2}$ من الجزء الأول، ونختار المفردة التي ترتيبها $\frac{n+2}{2}$ من الجزء الثاني.

و- إذا قمنا بتكرار هذه العملية عدد m من المرات، فإننا سوف نحصل على عينة $MRSS$ حجمها nm مفردة.

ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال لمفردات لهذه العينة (Sabry and Shaaban ,2020)، إذا كان حجم العينة زوجي على الصورة التالية:

$$f_n(x_{(i)j}) = \frac{n\,!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\,\left(\frac{n}{2}\right)!}\left[F\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n-2}{2}}\left(1-F\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n}{2}} f\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right) \times \frac{n\,!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\,\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left[F\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n}{2}} \left(1-F\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n-2}{2}} f\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right) \tag{15}$$

ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال لمفردات لهذه العينة، إذا كان حجم العينة فردى على الصورة التالية:

$$f_{\mathrm{n}}(x_{(i)j}) = \left[\frac{\mathrm{n}\,!}{\left[\left(\frac{\mathrm{n}-1}{2}\right)!\right]^2}\left[F\left(x_{\left(\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{\mathrm{n}-1}{2}}\left(1-F\left(x_{\left(\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{\mathrm{n}-1}{2}} f\left(x_{\left(\frac{\mathrm{n}+1}{2}\right)j}\right)\right] \tag{16}$$

٥- معاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديدة Neoteric Ranked Set sampling (NRSS)

اقترح كلا من (Zamanzade and Al-Omari,2016) طريقة معاينة جديدة تسمي Neoteric Ranked Set sampling بدلا من طريقة معاينة المجموعة المرتبة Ranked Set sampling، حيث تبين ان مقدري الوسط الحسابي والتباين لمعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديد أكثر كفاءة من مقدرات معاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة العشوائية البسيطة SRS عند نفس حجم العينة، وذلك بالتطبيق على معالم عدة توزيعات مثل التوزيع المنتظم والتوزيع الاسي والتوزيع اللوجيستي والتوزيع الطبيعي وتوزيع بيتا وغيرها من التوزيعات.

خطوات سحب عينة مرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS:

أ- نقوم باختيار عدد n^2 مفردة بطريقة عشوائية من مفردات المجتمع المراد سحب العينة منه.

ب- نرتب تلك المفردات اما بالاعتماد على الفحص المرئي للقائم بالمعاينة او على أساس المتغير محل الدراسة أو باي طريقة أخري غير مكلفة.

جـ - إذا كان حجم العينة المراد اختياره n فردي، نختار المفردة التي ترتيبها $\left(\frac{n+1}{2}+(i-1)n\right)$.

د- إذا كان حجم العينة المراد اختياره n زوجي، نختار المفردة التي ترتيبها $(l+(i-1)k)$ ، فإذا كانت رقم المفردة i عدد زوجي فيتم التعويض بـ $l=\frac{n}{2}$، أما إذا كانت رقم المفردة i عدد فردى فيتم التعويض بـ $l=\frac{n+2}{2}$.

هـ - إذا قمنا بتكرار هذه العملية عدد r من المرات، فإننا سوف نحصل على عينة $NRSS$ حجمها nm مفردة.

ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال لمفردات عينة $NRSS$ على الصورة التالية:

$$f_n(x_{(i)j}) = \frac{n^2!}{[k(i)-k(i-1)-1]!}\left[F(x_{k(i)j}) - F(x_{k(i-1)j})\right]^{k(i)-k(i-1)-1} f(x_{k(i)j}) \quad (17)$$

حيث

$$k(i) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} + (i-1)n & \text{عدد فردي } n \\ \frac{n+2}{2} + (i-1)n & \text{عدد زوجي و } i \text{ عدد فردي } n \\ \frac{n}{2} + (i-1)n & \text{عدد زوجي و } i \text{ عدد زوجي } n \end{cases} \quad , i = 1, 2, \dots n$$

حيث

$$k(0) = 0, k(n+1) = n^2 + 1, , and\ x_{k(0)} \cong -\infty, x_{k(i+1)} \cong \infty$$

٦- طرق التقدير

أ- تقدير معالم التوزيع باستخدام طريقة الإمكان الأعظم بالاعتماد على المعاينة العشوائية البسيطة SRS

إذا كانت $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ عينة عشوائية مستقلة مسحوبة من مجتمع يتبع لتوزيع Exponential Lomax، فانه يمكن تعريف دالة الإمكان لهذه العينة على الصورة التالية:

$$L = \prod_{i=1}^{n} g\ (x_i;\ \lambda, \theta, \beta)$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda\,\theta}{\beta} \quad e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)^{-\theta}} \left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)^{-\theta+1} \right)$$

وبأخذ لوغاريتم ln لطرفي المعادلة السابقة ينتج أن

$$ln\ L = n\ ln\left(\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)^{-\theta} - (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)$$

$$ln\ L = n\ ln\,\lambda + n\ ln\,\theta - n\ ln\,\beta - \sum_{i=1}^{n} \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)^{-\theta} - (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)$$

وبإيجاد المشتقات الجزئية الاولي للمعالم θ،λ فقط حيث ان قيمة β تساوى اقل قيمة من قيم x

$$\frac{\partial ln}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)^{-\theta} \tag{18}$$

$$\frac{\partial ln}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right)^{-\theta} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_i}\right) \tag{19}$$

بحل المعادلتين ١٨، ١٩، وذلك بمساواة التفاضلات الجزئية بالصفر، فنحصل على المقدرين $\hat{\theta}$ ، $\hat{\lambda}$ ، ونظرا لان المعادلات غير خطية فإننا نلجأ الي الطرق العددية التكرارية numerical iteration مثل طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson لحل هذه المعادلات. اما بالنسبة للمعلمة β فلا يمكن تقديرها من خلال استخدام التفاضلات الجزئية لان قيم x تعتمد على قيمة β حيث $(x \geq -\beta)$، استناد الي انه إذا كان لدينا مقدرين $y_1 = min(x_1, x_2, ..x_n)$ ، $y_2 = max(x_1, x_2, ..x_n)$ ، فان مقدر طريقة الإمكان الأعظم لـ β داخل الفترة $[-y_1, \infty)$ والذي يجعل دالة الإمكان أكبر ما يمكن. وبناء عليه فان قيمة β المقدرة تكون اقل قيمة في هذه الفترة وهي $(-y_1)$.

ب- تقدير معالم التوزيع باستخدام طريقة الإمكان الأعظم بالاعتماد على معاينة المجموعة المرتبة RSS

إذا كان لدينا $X_{(i)j}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$ عينة مجموعة مرتبة مستقلة مسحوبة من مجتمع يتبع لتوزيع Exponential Lomax، حجمها mn ، حيث تشير m الي عدد الدورات (cycles)، وتشير n الي حجم المجموعة (set size)، حيث ان $X_{(i)j}$ تتكون من i^{th} من الإحصاءات المرتبة. افتراض ان فان دالة التوزيع الاحتمالي لهذا للإحصاء المرتبة $X_{(i)j}$ تعرف كالتالي:

$$\boldsymbol{g_n(x_{(i)j}) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \left[G(x_{(i)j})\right]^{i-1} \left(1 - G(x_{(i)j})\right)^{n-i} g(x_{(i)j})}$$

$$\boldsymbol{= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{i-1} \left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{n-i+1} \frac{\lambda\,\theta}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta+1}}$$

وبالتالي تكون دالة الإمكان الأعظم لدالة التوزيع الاحتمالي للإحصاء المرتبة $X_{(i)j}$ لتوزيع Exponential Lomax

$$L = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} g_n \left(x_{(i)j};\ \lambda\,, \theta\,, \beta\right)$$

$$L = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{n\,!}{(i-1)!\,(n-i)!} \frac{\lambda\,\theta}{\beta} \left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}} \right)^{n-i+1} \left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta+1} \left[1 - e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{i-1} \right]$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل علي

$$\boldsymbol{lnL = mnln\frac{n\,!}{(i-1)!\,(n-i)!} + mnln\lambda + mnln\theta - mnln\beta + (i - 1) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} ln\left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}}\right) - (n - i + 1) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta} + (-\theta + 1) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)}$$

وبإيجاد المشتقات الجزئية الاولي لدالة لوغاريتم الإمكان الأعظم بالنسبة لـ للمعالم θ،λ فقط

$$\boldsymbol{\frac{\partial lnL}{\partial\lambda} = \frac{mn}{\lambda} + (i-1) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}} \left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}}{1 - e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}}} \right) - (n - i + 1) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta} \quad (20)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial Lln}{\partial\theta} = \frac{mn}{\theta} - (i - 1\,) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}} \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)}{1 - e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta}}} \right) + (n - i + 1) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda \left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right)^{-\theta} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{\beta + x_{(i)j}}\right) \quad (21)}$$

بحل المعادلتين ٢٠، ٢١، وذلك بمساواة التفاضلات الجزئية بالصفر، فنحصل على المقدرين $\hat{\theta}$، $\hat{\lambda}$ ، ونظرا لان المعادلات غير خطية فإننا نلجأ الي الطرق العددية التكرارية numerical iteration مثل طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson لحل هذه المعادلات. اما بالنسبة للمعلمة β فلا يمكن تقديرها من خلال استخدام التفاضلات الجزئية

لان قيم x تعتمد على قيمة β حيث $(x \geq -\beta)$، استناد الي انه إذا كان لدينا مقدرين $y_1 = min(x_1, x_2, ..x_n)$ ، $y_2 = max(x_1, x_2, ..x_n)$ ، فان مقدر طريقة الإمكان الأعظم لـ β داخل الفترة $[-y_1 ، \infty)$ والذي يجعل دالة الإمكان أكبر ما يمكن. وبناء عليه فان قيمة β المقدرة تكون اقل قيمة في هذه الفترة وهي $(-y_1)$.

جـ - تقدير معالم التوزيع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة باستخدام الوسيط MRSS

إذا كان حجم العينة فردي(odd)

إذا كان لدينا $X_{(i)j}, i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots m$ عينة مجموعة مرتبة وسيطاً مستقلة مسحوبة من مجتمع يتبع لتوزيع Exponential Lomax، حجمها mn ، حيث تشير m الي عدد الدورات (cycles)، وتشير n الي حجم المجموعة (set size)، حيث ان $X_{(i)j}$ تتكون من i^{th} من الإحصاءات المرتبة. فان دالة التوزيع الاحتمالي لهذا للإحصاء المرتبة $X_{(i)j}$ تعرف كالتالي:

$$\boldsymbol{g_n(x_{(i)j}) = \left[\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\left[G\left(x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n-1}{2}}\left(1-G\left(x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n-1}{2}} g\left(x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}\right)\right]}$$

فانه يمكن تعريف دالة الإمكان لهذه العينة على انها التوزيع المشترك لمفردات العينة كالتالي:

$$\boldsymbol{L_{MRSS_{odd}} = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!} g\left(x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}\right)\left[G\left(x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n-1}{2}}\left(1-G\left(x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]}$$

$$\boldsymbol{= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}\frac{\lambda\theta}{\beta}\; e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta+1}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{\frac{n-1}{2}}\right]}$$

$$\boldsymbol{= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}\frac{\lambda\theta}{\beta}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta+1}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{\frac{n-1}{2}}\right]}$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل علي

$$LnL_{MRSS_{odd}} = Ln\left[\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}\right] + mnln\lambda + mnln\theta - mnln\beta +$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} Ln\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right] -$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta} + (-\theta+1)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)$$

وبإيجاد المشتقات الجزئية الاولي لدالة لوغاريتم الإمكان الأعظم بالنسبة لـ للمعالم θ،λ فقط

$$\frac{\partial lnL}{\partial\lambda} = \frac{mn}{\lambda} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}{1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}}\right) - \left(\frac{n+1}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta} \qquad (22)$$

$$\frac{\partial Lln}{\partial\theta} = \frac{mn}{\theta} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta} ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)}{1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}}\right) +$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right)^{-\theta} ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)j}}\right) \qquad (23)$$

بحل المعادلتين ٢٢، ٢٣، وذلك بمساواة التفاضلات الجزئية بالصفر، فنحصل على المقدرين $\hat{\theta}$ ، $\hat{\lambda}$ ، ونظرا لان المعادلات غير خطية فإننا نلجأ الي الطرق العددية التكرارية numerical iteration مثل طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson لحل هذه المعادلات. اما بالنسبة للمعلمة β فلا يمكن تقديرها من خلال استخدام التفاضلات الجزئية لان قيم x تعتمد على قيمة β حيث $(x \geq -\beta)$، استناد الي انه إذا كان لدينا مقدرين $y_1 = min(x_1, x_2, .. x_n)$ ، $y_2 = max(x_1, x_2, .. x_n)$ ، فان مقدر طريقة الإمكان الأعظم

لـ β داخل الفترة $[-y_1،\infty)$ والذي يجعل دالة الإمكان أكبر ما يمكن. وبناء عليه فان قيمة β المقدرة تكون اقل قيمة في هذه الفترة وهي $(-y_1)$.

إذا كان حجم العينة زوجي

إذا كان لدينا $X_{(i)j}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$ عينة مجموعة مرتبة وسيطاً مستقلة مسحوبة من مجتمع يتبع لتوزيع Exponential Lomax، حجمها mn ، حيث تشير m الي عدد الدورات (cycles)، وتشير n الي حجم المجموعة (set size)، حيث ان $X_{(i)j}$ تتكون من i^{th} من الإحصاءات المرتبة. فان دالة التوزيع الاحتمالي لهذا للإحصاء المرتبة $X_{(i)j}$ تعرف كالتالي:

$$g_n(x_{(i)j}) = \left[\frac{n\,!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\left[G\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n-2}{2}}\left(1-G\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n}{2}} g\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right] \times$$

$$\left[\frac{n\,!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left[G\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n}{2}}\left(1-G\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n-2}{2}} g\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right]$$

فانه يمكن تعريف دالة الإمكان لهذه العينة على انها التوزيع المشترك لمفردات العينة كالتالي:

$$L_{MRSS_{even}} = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{n\,!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\left[G\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n-2}{2}}\left(1-G\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n}{2}} g\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}\right)\right] \times$$

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}\left[\frac{n\,!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left[G\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right]^{\frac{n}{2}}\left(1-G\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right)^{\frac{n-2}{2}} g\left(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}\right)\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{n\,!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\, e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta+1}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{\frac{n-2}{2}}\right]$$

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\left[\frac{n\,!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\, e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta+1}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{n!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\frac{\lambda\theta}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta+1}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{\frac{n+2}{2}}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{\frac{n-2}{2}}\right]\times$$

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\left[\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\frac{\lambda\theta}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta+1}\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right)^{\frac{n}{2}}\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{\frac{n}{2}}\right]$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل علي

$$= Ln\left[\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\right]+\frac{mn}{2}ln\lambda+\frac{mn}{2}ln\theta-\frac{mn}{2}ln\beta+(-\theta+1)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)-$$

$$\left(\frac{n+2}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}+\left(\frac{n-2}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}Ln\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]+$$

$$Ln\left[\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\frac{n!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\right]+mnln\lambda+mnln\theta-mnln\beta+(-\theta+1)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)-$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}+\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}Ln\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\right]$$

وبإيجاد المشتقات الجزئية الاولي لدالة لوغاريتم الإمكان الأعظم بالنسبة لـ للمعالم $\boldsymbol{\theta}$،$\boldsymbol{\lambda}$ فقط

$$\frac{\partial lnL}{\partial\lambda}=\frac{mn}{2\lambda}-\left(\frac{n+2}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}+\left(\frac{n-2}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}{1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}}\right)+\frac{mn}{\lambda}-$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}+\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}{1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}}\right) \qquad (24)$$

$$\frac{\partial Lln}{\partial\theta}=\frac{mn}{2\theta}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)-\left(\frac{n+2}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)-\left(\frac{n-2}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)}{1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}}\right)+\frac{mn}{\theta}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)-\left(\frac{n}{2}+1\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=\frac{n+2}{2}}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}ln\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)}{1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)j}}\right)^{-\theta}}}\right) \quad (25)$$

بحل المعادلتين ٢٤، ٢٥، وذلك بمساواة التفاضلات الجزئية بالصفر، فنحصل على المقدرين $\hat{\theta}$، $\hat{\lambda}$ ، ونظرا لان المعادلات غير خطية فإننا نلجأ الي الطرق العددية التكرارية numerical iteration مثل طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson لحل هذه المعادلات. اما بالنسبة للمعلمة β فلا يمكن تقديرها من خلال استخدام التفاضلات الجزئية لان قيم x تعتمد على قيمة β حيث $(x \geq -\beta)$، استناد الي انه إذا كان لدينا مقدرين $y_1 = min(x_1, x_2, .. x_n)$ ، $y_2 = max(x_1, x_2, .. x_n)$ ، فان مقدر طريقة الإمكان الأعظم لـ β داخل الفترة $[-y_1, \infty)$ والذي يجعل دالة الإمكان أكبر ما يمكن. وبناء عليه فان قيمة β المقدرة تكون اقل قيمة في هذه الفترة وهي $(-y_1)$.

د – تقدير معالم التوزيع باستخدام معاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديدة (NRSS)

إذا كان لدينا $X_{(i)j}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$ عينة مجموعة مرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS مستقلة مسحوبة من مجتمع يتبع لتوزيع Exponential Lomax، حجمها mn ، حيث تشير m الي عدد الدورات (cycles)، وتشير n الي حجم المجموعة (set size)، حيث ان $X_{(i)j}$ تتكون من i^{th} من الإحصاءات المرتبة. فان دالة التوزيع الاحتمالي لهذا للإحصاء المرتبة $X_{(i)j}$ تعرف كالتالي:

$$g_n(x_{(i)j}) = \frac{n^2!}{[k(i)-k(i-1)-1]!}g(x_{k(i)j}) \times [G(x_{k(i)j}) - G(x_{k(i-1)j})]^{k(i)-k(i-1)-1}$$

فانه يمكن تعريف دالة الإمكان لهذه العينة على انها التوزيع المشترك لمفردات العينة كالتالي:

$$L_{NRSS}=\prod_{j=1}^{m}\left[\prod_{i=1}^{n+1}\frac{n^2!}{[k(i)-k(i-1)-1]!}\times\prod_{i=1}^{n}g(x_{k(i)j})\times\prod_{i=1}^{n+1}\left[G(x_{k(i)j})-G(x_{k(i-1)j})\right]^{k(i)-k(i-1)-1}\right]$$

$$L_{NRSS}=\prod_{j=1}^{m}\left[\prod_{i=1}^{n+1}\frac{n^2!}{[k(i)-k(i-1)-1]!}\times\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\;e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta+1}\right)\times\prod_{i=1}^{n+1}\left[\left(1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}\right)-\left(1-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}}\right)\right]^{k(i)-k(i-1)-1}\right]$$

$$L_{NRSS}=\prod_{j=1}^{m}\left[\prod_{i=1}^{n+1}\frac{n^2!}{[k(i)-k(i-1)-1]!}\times\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda\,\theta}{\beta}\;e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta+1}\right)\times\prod_{i=1}^{n+1}\left[e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}}-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}\right]^{k(i)-k(i-1)-1}\right]$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل علي

$$LnL_{NRSS}=Ln\left[\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n+1}\frac{n^2!}{[k(i)-k(i-1)-1]!}\right]+mnln\lambda+mnln\theta-mnln\beta-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}+(-\theta+1)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n+1}(k(i)-k(i-1)-1)ln\left(e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}}-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}\right)$$

وبإيجاد المشتقات الجزئية الاولي لدالة لوغاريتم الإمكان الأعظم بالنسبة لـ للمعالم θ، λ فقط

$$\frac{\partial lnL}{\partial\lambda}=\frac{mn}{\lambda}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}-(k(i)-k(i-1)-1)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}}-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}}\right)$$

(26)

$$\frac{\partial Lln}{\partial\theta}=\frac{mn}{\theta}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)-(k(i)-k(i-1)-1)\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}ln\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}ln\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)}{e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i-1)j}}\right)^{-\theta}}-e^{-\lambda\left(\frac{\beta}{\beta+x_{k(i)j}}\right)^{-\theta}}}\right) \quad (27)$$

بحل المعادلتين ٢٦، ٢٧، وذلك بمساواة التفاضلات الجزئية بالصفر، فنحصل على المقدرين $\hat{\theta}$ ، $\hat{\lambda}$ ، ونظرا لان المعادلات غير خطية فإننا نلجأ الي الطرق العددية التكرارية numerical iteration مثل طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson لحل هذه المعادلات. اما بالنسبة للمعلمة β فلا يمكن تقديرها من خلال استخدام التفاضلات الجزئية لان قيم x تعتمد على قيمة β حيث $(x \geq -\beta)$، استناد الي انه إذا كان لدينا مقدرين $y_1 = min(x_1, x_2, .. x_n)$ ، $y_2 = max(x_1, x_2, .. x_n)$ ، فان مقدر طريقة الإمكان الأعظم لـ β داخل الفترة $[-y_1،\infty)$ والذي يجعل دالة الإمكان أكبر ما يمكن. وبناء عليه فان قيمة β المقدرة تكون اقل قيمة في هذه الفترة وهي $(-y_1)$.

هـ – تقدير معالم التوزيع باستخدام طريقة العزوم الخطية L-moment

العزوم الخطية للمجتمع (Population Linear Moments)

إذا كان لدينا متغير عشوائي X ذات قيمة حقيقية يتبع لتوزيع Exponential Lomax وله دالة توزيع تراكمي $G(x)$ ، ودالة الجزئيات $Q(p)$ ، وان $\left(X_{(1:n)} \leq X_{(2:n)} \leq \cdots \leq X_{(n:n)}\right)$ هي الإحصاءات المرتبة لعينة مستقلة حجمها n لبيانات المتغير العشوائي X

يمكن صياغة العزوم الخطية للمجتمع كالتالي (Hosking,1999):

$$\lambda_r = r^{-1}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}E(X_{r-k:r}) \;\; ; r = 1,2,3, \dots,$$

حيث

λ_r : الدالة الخطية لتوقع الإحصاءات المرتبة.

$Q(p)$: ترمز لدالة الكُسيرات quantile حيث $p \in (0,1)$.

$X_{r-k:r}$: ترمز الي الإحصاء المرتب رقم $r-k$ لعينة مستقلة حجمها r مأخوذة من توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X.

$E(X_{r-k:r})$: ترمز للقيمة المتوقعة للإحصاء المرتبة $r-k$ لعينة حجمها r ، ويمكن الحصول على القيمة المتوقعة كالتالي:

$$\because E(X_{r-k:r}) = \int_{-\beta}^{\infty} x \frac{r!}{(r-k-1)!\,(k)!} \left(G(x)\right)^{r-k-1} \left(1-G(x)\right)^{k} g(x)\, dx$$

$$E(X_{r-k:r}) = \frac{\beta\, r!}{(r-k-1)!k!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+m} \binom{1}{s} \binom{r-k-1}{m} \left(\lambda(k+m+1)\right)^{\frac{s-1}{\theta}} \Gamma\left(\frac{1-s}{\theta}+1\right)$$

$$\lambda_r = r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k:r})$$

$$\lambda_r = \frac{\beta \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+m+k} \binom{r-1}{k} \binom{1}{s} \binom{r-k-1}{m} (r-1)! \left(\lambda(k+m+1)\right)^{\frac{s-1}{\theta}} \Gamma\left(\frac{1-s}{\theta}+1\right)}{(r-k-1)!k!}$$

$$\lambda_1 = \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+m} \binom{1}{s} \left(\lambda(m+1)\right)^{\frac{s-1}{\theta}} \Gamma\left(\frac{1-s}{\theta}+1\right) \qquad (28)$$

$$\lambda_2 = \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+m} \binom{1}{s} \left(\lambda(m+1)\right)^{\frac{s-1}{\theta}} \Gamma\left(\frac{1-s}{\theta}+1\right) + \frac{\beta}{24} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+m+1} \binom{1}{s} \binom{4}{m} \left(\lambda(m+2)\right)^{\frac{s-1}{\theta}} \Gamma\left(\frac{1-s}{\theta}+1\right) \qquad (29)$$

العزوم الخطية للعينة (Sample Linear Moments)

إذا كان لدينا متغير عشوائي X ذات قيمة حقيقية يتبع لتوزيع Exponential Lomax وله دالة توزيع تراكمي $G(x)$ ، ودالة الكُسيرات $Q(p)$ ، وان $(x_{1:n} < \cdots < x_{(j)} < \cdots \le x_{(n)})$ هي الإحصاء المرتبة لعينة حجمها n مسحوبة من توزيع احتمالي للمتغير X، فيمكن تعريف العزوم الخطية l_r للعينة كالتالي(Asquith,2014) :

$$l_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r-k-1} \binom{n-i}{k}}{\binom{n}{r}} \right] x_{i:n}$$

$$l_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i:n} = \bar{x} \qquad (30)$$

$$l_2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (2i-1-n) x_{i:n} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (i-1) x_{i:n} - \bar{x} \qquad (31)$$

وبمساواة عزوم المجتمع (٢٨، ٢٩) بعزوم العينة (٣٠، ٣١) يمكننا الحصول على تقديرات لمعلمات التوزيع

$$\overline{x} = \hat{\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+m}\binom{1}{s}\left(\hat{\lambda}(m+1)\right)^{\frac{s-1}{\hat{\theta}}}\Gamma\left(\frac{1-s}{\hat{\theta}}+1\right) \quad (32)$$

$$\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(i-1)x_{i:n} - \overline{x} = \hat{\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+m}\binom{1}{s}\left(\hat{\lambda}(m+1)\right)^{\frac{s-1}{\hat{\theta}}}\Gamma\left(\frac{1-s}{\hat{\theta}}+1\right) + \frac{\hat{\beta}}{24}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+m+1}\binom{1}{s}\binom{4}{m}\left(\hat{\lambda}(m+2)\right)^{\frac{1-s}{\hat{\theta}}}\Gamma\left(\frac{1-s}{\hat{\theta}}+1\right) \quad (33)$$

بحل المعادلتين ٣٢، ٣٣ رياضيا، فنحصل على المقدرين $\hat{\theta}$ ، $\hat{\lambda}$ ، ونظرا لان المعادلات غير خطية فإننا نلجأ الي الطرق العددية التكرارية numerical iteration مثل طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson لحل هذه المعادلات. اما بالنسبة للمعلمة β فلا يمكن تقديرها لان قيم x تعتمد على قيمة β حيث $(x \geq -\beta)$، استناد الي انه إذا كان لدينا مقدرين $y_1 = min(x_1, x_2, .. x_n)$ ، $y_2 = max(x_1, x_2, .. x_n)$ ، فان مقدر طريقة الإمكان الأعظم لـ β داخل الفترة $[-y_1،\infty)$ والذي يجعل دالة الإمكان أكبر ما يمكن. وبناء عليه فان قيمة β المقدرة تكون اقل قيمة في هذه الفترة وهي $(-y_1)$. فانه يتم التعويض عن $x_{i:n}$ بمفردات المعاينة العشوائية البسيطة SRS ومفردات معاينة المجموعة المرتبة RSS ومفردات معاينة المجموعة المرتبة وسيطاً MRSS ومفردات معاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS كلا على حدة.

٧- دراسة المحاكاة

نتناول في هذه الجزء دراسة المحاكاة لـ ١٠٠٠ مفردة مسحوبة من مجتمع يتبع لتوزيع Exponential Lomax باستخدام برنامج لغة R package environment 4.3.0، وتم سحب احجام عينات مختلفة n= (١٠، ١٥ ،٢٠، ٢٥، ٣٠) عند عدد دورات مختلفة m= (١،٣)، عند قيم مبدئية اللازمة لتقدير معالم توزيع Exponential Lomax وهي $(\theta = 0.5, \lambda = 0.9, \beta = 0.1)$ لتقدير معالم توزيع Exponential Lomax باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم وطريقة العزوم الخطية من خلال استخدام طرق معاينة مختلفة وهي المعاينة العشوائية البسيطة SRS ومعاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطاً MRSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS. فكانت نتائج الدراسة كالتالي:

جدول (١) يوضح قيم المعالم المقدرة للتوزيع باستخدام طريقة الإمكان الأعظم MLE باستخدام طرق المعاينة المختلفة

NRSS		MRSS		RSS		SRS	طرق المعاينة		
m=1	m=3	m=1	m=3	m=1	m=3		n		
0.4873	0.4591	0.5014	0.5139	0.4898	0.4809	0.4891	١٠	λ	$[\lambda = 0.5, \theta = 0.9, \beta = 0.1]$
0.4546	0.4736	0.5036	0.5082	0.4880	0.4779	0.4703	١٥		
0.4834	0.4855	0.4953	0.5044	0.4823	0.4762	0.4707	٢٠		
0.4525	0.4734	0.4922	0.4997	0.4821	0.4768	0.4693	٢٥		
0.4413	0.4859	0.4743	0.4865	0.4810	0.4762	0.4655	٣٠		
0.9443	0.9677	0.4996	0.5947	0.9566	0.9814	1.0127	١٠	θ	
1.0057	0.9901	0.4843	0.5673	0.9652	0.9872	1.0103	١٥		
0.9713	0.9682	0.4528	0.5352	0.9670	0.9893	1.0133	٢٠		
1.0354	0.9787	0.4458	0.5167	0.9771	0.9932	1.0130	٢٥		
1.0330	0.9851	0.3970	0.4553	0.9803	0.9937	1.0145	٣٠		
0.0942	0.0861	0.0320	0.0478	0.0882	0.0959	0.0890	١٠	β	
0.0967	0.0958	0.0311	0.0432	0.0929	0.0971	0.0926	١٥		
0.0961	0.0976	0.0260	0.0385	0.0946	0.0981	0.0949	٢٠		
0.0955	0.0974	0.0247	0.0350	0.0958	0.0985	0.0960	٢٥		
0.0987	0.0983	0.0160	0.0247	0.0967	0.0988	0.0966	٣٠		

جدول (٢) يوضح قيم متوسطات مربعات الأخطاء للتوزيع باستخدام طريقة الإمكان الأعظم MLE باستخدام طرق المعاينة المختلفة

NRSS		MRSS		RSS		SRS	طرق المعاينة		
m=1	m=3	m=1	m=3	m=1	m=3		n		
0.0002	0.0017	0.0164	0.0033	0.0091	0.0028	0.0288	١٠	λ	$[\lambda = 0.5, \theta = 0.9, \beta = 0.1]$
0.0021	0.0007	0.0084	0.0018	0.0041	0.0016	0.0178	١٥		
0.0003	0.0002	0.0051	0.0013	0.0023	0.0012	0.0130	٢٠		
0.0023	0.0007	0.0041	0.0009	0.0016	0.0009	0.0104	٢٥		
0.0034	0.0002	0.0034	0.0006	0.0013	0.0008	0.0087	٣٠		
0.0020	0.0046	0.1183	0.0632	0.0250	0.0137	0.0410	١٠	θ	
0.0112	0.0081	0.1652	0.0984	0.0166	0.0112	0.0328	١٥		
0.0051	0.0047	0.1768	0.1151	0.0119	0.0103	0.0295	٢٠		
0.0183	0.0062	0.2031	0.1369	0.0110	0.0102	0.0268	٢٥		
0.0177	0.0072	0.2094	0.1501	0.0102	0.0100	0.0240	٣٠		
0.0000	0.0002	0.0040	0.0020	0.0003	0.0000	0.0003	١٠	β	
0.0000	0.0000	0.0049	0.0029	0.0001	0.0000	0.0002	١٥		
0.0000	0.0000	0.0050	0.0034	0.0001	0.0000	0.0001	٢٠		
0.0000	0.0000	0.0056	0.0039	0.0000	0.0000	0.0000	٢٥		
0.0000	0.0000	0.0058	0.0043	0.0000	0.0000	0.0000	٣٠		

جدول (٣) يوضح قيم متوسطات مربعات الأخطاء للتوزيع باستخدام طريقة العزوم الخطية LM باستخدام طرق المعاينة المختلفة

NRSS		MRSS		RSS		SRS	طرق المعاينة		
m=1	m=3	m=1	m=3	m=1	m=3		n		
0.5510	0.4836	0.3536	0.3609	0.5897	0.5284	0.5665	١٠	λ	$[\lambda = 0.5, \theta = 0.9, \beta = 0.1]$
0.5212	0.5119	0.4632	0.4648	0.5602	0.5170	0.5343	١٥		
0.5477	0.5287	0.4044	0.4063	0.5414	0.5118	0.5296	٢٠		
0.5072	0.5091	0.4738	0.4754	0.5340	0.5103	0.5247	٢٥		
0.4919	0.5279	0.4830	0.4851	0.5287	0.5081	0.5172	٣٠		
0.8215	0.8877	0.8978	0.8963	0.7858	0.8616	0.8578	١٠	θ	
0.8584	0.8893	0.9009	0.9007	0.8194	0.8755	0.8736	١٥		
0.8393	0.8644	0.8997	0.9001	0.8356	0.8805	0.8813	٢٠		
0.9056	0.8853	0.9010	0.9008	0.8507	0.8849	0.8862	٢٥		
0.9103	0.8776	0.9008	0.9005	0.8574	0.8873	0.8919	٣٠		
0.0942	0.0861	0.0842	0.0840	0.0882	0.0959	0.0890	١٠	β	
0.0967	0.0958	0.1008	0.1004	0.0929	0.0971	0.0926	١٥		
0.0961	0.0976	0.0899	0.0896	0.0946	0.0981	0.0949	٢٠		
0.0955	0.0974	0.1002	0.1000	0.0958	0.0985	0.0960	٢٥		
0.0987	0.0983	0.0995	0.1000	0.0967	0.0988	0.0966	٣٠		

جدول (٤) يوضح قيم متوسطات مربعات الأخطاء للتوزيع باستخدام طريقة العزوم الخطية LM باستخدام طرق المعاينة المختلفة

NRSS		MRSS		RSS		SRS	طرق المعاينة		
m=1	m=3	m=1	m=3	m=1	m=3		n		
0.0026	0.0003	0.0123	0.0063	0.0241	0.0045	0.0502	١٠	λ	$[\lambda = 0.5, \theta = 0.9, \beta = 0.1]$
0.0005	0.0001	0.0253	0.0210	0.0102	0.0020	0.0274	١٥		
0.0023	0.0008	0.0037	0.0020	0.0051	0.0012	0.0196	٢٠		
0.0001	0.0001	0.0108	0.0093	0.0034	0.0007	0.0151	٢٥		
0.0001	0.0008	0.0021	0.0010	0.0024	0.0005	0.0116	٣٠		
0.0062	0.0002	0.0001	0.0000	0.0406	0.0109	0.0355	١٠	θ	
0.0017	0.0001	0.0003	0.0004	0.0218	0.0058	0.0253	١٥		
0.0037	0.0013	0.0000	0.0000	0.0144	0.0039	0.0196	٢٠		
0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0094	0.0026	0.0163	٢٥		
0.0001	0.0005	0.0000	0.0000	0.0075	0.0021	0.0130	٣٠		
0.0000	0.0002	0.0012	0.0004	0.0003	0.0000	0.0003	١٠	β	
0.0000	0.0000	0.0009	0.0005	0.0001	0.0000	0.0002	١٥		
0.0000	0.0000	0.0008	0.0004	0.0001	0.0000	0.0001	٢٠		
0.0000	0.0000	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	٢٥		
0.0000	0.0000	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	٣٠		

يتبين من الجداول السابقة ان

١- في معظم الأحيان، تقترب قيم مقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم والعزوم الخطية من القيم المبدئية لمقدرات التوزيع عند زيادة احجام العينات المختلفة في جميع طرق المعاينة المختلفة.

٢- في معظم الأحيان، تقترب قيم مقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم والعزوم الخطية من القيم المبدئية لمقدرات التوزيع عند زيادة عدد الدورات m في جميع طرق المعاينة المرتبة المختلفة.

٣- تقترب قيم مقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم والعزوم الخطية من القيم المبدئية لمقدرات التوزيع عند نفس عدد الدورات m في معاينة المجموعة المرتبة RSS.

٤- مقدار التحيز المطلق لمقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقة الإمكان الاعظم في حالة معاينة المجموعة المرتبة RSS اقل مقارنة بطرق المعاينة الأخرى.

٥- مقدار التحيز المطلق لمقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقة العزوم الخطية في حالة معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS اقل مقارنة بطرق المعاينة الأخرى.

٦- قيم متوسطات مربعات الاخطاء لمقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقة الإمكان الاعظم في حالة معاينة المجموعة ذات التصنيف الحديث NRSS أقل مقارنة بأي طريقة معاينة اخري.

٧- قيم متوسطات مربعات الاخطاء لمقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقة العزوم الخطية في حالتي معاينة المجموعة ذات التصنيف الحديث NRSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS أقل مقارنة بمعاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة العشوائية البسيطة SRS.

٨- عند زيادة عدد الدورات، تقترب قيم متوسطات مربعات الاخطاء لمقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم والعزوم الخطية في جميع طرق المعاينة المختلفة من الصفر.

٩- وتستنتج الدراسة الي انه يفضل استخدام معاينة المجموعة ذات التصنيف الحديث NRSS عند التقدير بطريقتي الإمكان الأعظم والعزوم الخطية.

١٠- وتقترح الدراسة الي استخدام معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS عند التقدير باستخدام العزوم الخطية.

١١- وتشير الدراسة الي ان نتائجها تتفق مع نتائج الدراسات السابقة في ان المقدرات الناتجة من استخدام طرق المعاينة المرتبة RSS، MRSS، NRSS أكثر كفاءة من الناتجة من طريقة المعاينة العشوائية البسيطة SRS لان لها اقل متوسط مربعات أخطاء.

٨- الدراسة التطبيقية

قامت هذه الدراسة باستخدام إحدى بيانات تحليل البقاء (Murthy et al,2004). وتتكون هذه البيانات من ١٤٧ مشاهدة، تم جمعها خلال فترة زمنية معينة، وتم تصنيف هذه البيانات الي أوقات فشل للزجاج الامامي للطائرة (failure times for a windshield) وعددها ٨٤، واوقات الخدمة (service times) وعددها ٦٣.

والبيانات التالية تمثل أوقات الفشل للزجاج الامامي للطائرة

٠,٠٤٠ ، ١,٨٦٦ ، ٢,٣٨٥ ، ٣,٤٤٣ ، ٠,٣٠١ ، ١,٨٧٦ ، ٢,٤٨١ ، ٣,٤٦٧ ، ٠,٣٠٩ ، ١,٨٩٩
، ٢,٦١٠ ، ٣,٤٧٨ ، ٠,٥٥٧ ، ١,٩١١ ، ٢,٦٢٥ ، ٣,٥٧٨ ، ٠,٩٤٣ ، ١,٩١٢ ، ٢,٦٣٢ ،
٣,٥٩٥ ، ١,٠٧٠ ، ١,٩١٤ ، ٢,٦٤٦، ٣,٦٩٩ ، ١,١٢٤ ، ١,٩٨١ ، ٢,٦٦١ ، ٣,٧٧٩ ، ١,٢٤٨
، ٢,٠١٠ ، ٢,٦٨٨ ، ٣,٩٢٤ ، ١,٢٨١ ،٢,٠٣٨ ، ٢,٨٢ ، ٣ ، ٤,٠٣٥ ، ١,٢٨١ ، ٢,٠٨٥ ،
٢,٨٩٠ ، ٤,١٢١ ، ١,٣٠٣ ، ٢,٠٨٩ ، ٢,٩٠٢ ، ٤,١٦٧ ،١,٤٣٢ ، ٢,٠٩٧ ، ٢,٩٣٤ ، ٤,٢٤٠
، ١,٤٨٠ ، ٢,١٣٥ ، ٢,٩٦٢ ، ٤,٢٥٥ ، ١,٥٠٥ ، ٢,١٥٤ ، ٢,٩٦٤ ، ٤,٢٧٨ ، ١,٥٠٦ ،
٢,١٩٠ ، ٣,٠٠٠ ، ٤,٣٠٥ ، ١,٥٦٨ ، ٢,١٩٤ ، ٣,١٠٣ ، ٤,٣٧٦ ، ١,٦١٥ ، ٢,٢٢٣ ، ٣,١١٤
، ٤,٤٤٩ ، ١,٦١٩ ، ٢,٢٢٤ ، ٣,١١٧ ، ٤,٤٨٥ ، ١,٦٥٢ ، ٢,٢٢٩ ، ٣,١٦٦ ، ٤,٥٧٠ ،
١,٦٥٢ ، ٢,٣٠٠ ، ٣,٣٤٤ ، ٤,٦٠٢ ، ١,٧٥٧ ، ٢,٣٢٤ ، ٣,٣٧٦ ، ٤,٦٦٣ .

ويتناول هذا الجزء الدراسة التطبيقية لتوزيع Exponential Lomax، وتم سحب احجام عينات مختلفة وهي $(n = 5, 8, 9)$ عند عدد دورات m=1 برنامج لغة R package environment 4.3.0، عند قيم مبدئية اللازمة لتقدير معالم توزيع Exponential Lomax وهي $(\lambda = 0.25, \theta = 0.75, \beta = 0.04)$، وذلك لتقدير معالم توزيع Exponential Lomax باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم وطريقة العزوم الخطية من خلال استخدام طرق معاينة مختلفة وهي المعاينة العشوائية البسيطة SRS ومعاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطاً MRSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الجديد NRSS. فكانت نتائج الدراسة كالتالي:

جدول (٥) يوضح قيم مقدرات معالم التوزيع باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم MLE والعزوم الخطية LM باستخدام طرق المعاينة المختلفة

NRSS		MRSS		RSS		SRS		طرق المعاينة		
MLE	LM	MLE	LM	MLE	LM	MLE	LM	n		
0.0055	0.0001	0.1483	0.0001	0.0106	0.0001	0.0044	0.0024	٥	λ	$[\lambda = 0.5, \theta = 0.9, \beta =$
0.0062	0.0001	0.1901	0.0001	0.0087	0.0002	0.0004	0.0002	٨		
0.0068	0.0001	0.2358	0.0001	0.0057	0.0001	0.0009	0.0005	٩		
1.5551	2.4696	0.4837	2.4682	1.2996	2.4682	1.6634	1.7231	٥	θ	
1.3431	2.2345	0.3542	2.2441	1.1991	2.2435	2.1176	2.2014	٨		
1.2617	2.0693	0.2830	2.0945	1.2603	2.0941	1.7681	1.8076	٩		
0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	٥	β	
0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	٨		
0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040	٩		

جدول (٦) يوضح قيم متوسطات مربعات الأخطاء للتوزيع باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم MLE والعزوم الخطية LM باستخدام طرق المعاينة المختلفة

NRSS		MRSS		RSS		SRS		طرق المعاينة		
MLE	LM	MLE	LM	MLE	LM	MLE	LM	n		
0.0006	0.0014	0.0539	0.0038	0.0032	0.0009	0.0054	0.0018	٥	λ	$[\lambda = 0.5, \theta =$
0.0035	0.0038	0.0347	0.0020	0.0070	0.0034	0.0017	0.0025	٨		
0.0065	0.0065	0.0217	0.0007	0.0001	0.0074	0.0024	0.0064	٩		
0.0179	0.2370	3.3365	0.1049	0.4582	0.3584	0.2077	0.3364	٥	θ	
0.4665	0.1590	3.5814	0.0749	0.1302	0.2174	0.4411	0.1999	٨		
0.3612	0.1584	3.4859	0.0775	0.0194	0.2060	0.6097	0.1602	٩		
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	٥	β	
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	٨		
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	٩		

يتبين من الجدول السابق ان

١- تقترب قيم مقدرات التوزيع باستخدام طريقة العزوم الخطية LM من القيم المبدئية لمقدرات التوزيع في حالة معاينة المجموعة المرتبة وسيطياًMRSS مقارنة بطرق المعاينة الأخرى.
٢- في معظم الأحيان، قيم متوسطات مربعات الاخطاء لمقدرات التوزيع باستخدام طريقة الإمكان الاعظم MLE في حالة معاينة المجموعة ذات التصنيف الحديث NRSS أقل مقارنة بطرق المعاينة الأخرى.
٣- في معظم الأحيان، قيم متوسطات مربعات الاخطاء لمقدرات التوزيع باستخدام طريقة العزوم الخطية LM في حالة معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS اقل مقارنة بطرق المعاينة الأخرى.
٤- وتستنتج الدراسة ان مقدرات التوزيع التي تعتمد على طرق المعاينة المرتبة أكثر كفاءة من المقدرات التي تعتمد على طريقة المعاينة العشوائية البسيطة لان قيم متوسطات مربعات الأخطاء لهذه المقدرات أقل.
٥- يفضل استخدام معاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS عند استخدام طريقة العزوم الخطية LM لان لها اقل قيم متوسطات مربعات للأخطاء مقارنة بالطرق الأخرى، وهذا ما تؤيده الدراسات السابقة ودراسة المحاكاة لهذه الدراسة.

٩- الاستنتاجات

في هذا البحث تم استعراض خصائص توزيع Exponential Lomax وهي دالة البقاء والدالة التراكمية لدالة الخطر ودالة العزوم والدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة والعزوم غير التامة الإحصاءات المرتبة ومقياس ريني إنتروبي، بالإضافة الي تقدير معالم توزيع Exponential Lomax باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم ML والعزوم الخطية L-Moments في حالات مختلفة من طرق المعاينة وهي المعاينة العشوائية البسيطة SRS ومعاينة المجموعة المرتبة RSS ومعاينة المجموعة المرتبة وسيطياً MRSS ومعاينة المجموعة المرتبة ذات التصنيف الحديث NRSS. وقد توصل البحث الي ما يلي:

١) يفضل استخدام معاينة المجموعة ذات التصنيف الجديد NRSS عند التقدير بطريقتي الإمكان الأعظم والعزوم الخطية.
٢) يفضل استخدام معاينة المجموعة المرتبة وسيطا MRSS عند التقدير باستخدام العزوم الخطية.
٣) مقدرات الناتجة من استخدام طرق المعاينة المرتبة RSS، MRSS، NRSS أكثر كفاءة من الناتجة من طريقة المعاينة العشوائية البسيطة SRS.

المراجع:

1. Al-Saleh, M.F and Al-Kadiri, M. (2000). "Double Ranked Set Sampling". **Statistics & Probability Letters**. 48, 205-212.
2. Asquith, W. H. (2014). "Parameter Estimation for the 4-Parameter Asymmetric Exponential Power distribution by The Method of L-moments using R". **Computational Statistics and Data Analysis**. 71,(955-970).
3. Balakrishnan, N and Chen, W. W. (1997). "**CRC Handbook of Tables for Order Statistics from Inverse Gaussian Distributions with Applications**". CRC Press, Boca Raton.
4. Dell, T.R and Clutter, J.L. (1972). "Ranked Set Sampling Theory with Order Statistics Background". **International Biometric Society**. 28(2),575-555.
5. Dey, S; Salehi, M and Ahmadi, J. (2016). "Rayleigh Distribution Revisited via Ranked Set Sampling". **Metron**.75,69-85.
6. El-Bassiouny, A. H; Abdo, N.F and Shahen, H.S. (2015). "Exponential Lomax Distribution". **International Journal of Computer Applications**.121(13).
7. Esemen, M and Gurler, S. (201٨). "Parameter Estimation of Generalized Rayleigh Distribution Based on Ranked Set Sample". **Journal of Statistical Computation and Simulation**.88(4).
8. Halls, L. K and Dell, T. R. (1966). "Trial of Ranked Set sampling for Forage Yields". **Mathematics- Forest Science**. 12, 22-6.
9. Hassan, N. M; Rady, E. A and Rashwan, N. I. (2018). "Median Double Ranked Set Sampling Method". **Journal of Advances in Mathematics.** 14, 7503-7511.
10. Hassan, N. M; Rady, E. A and Rashwan, N. I. (2021). "L-Moments Method to estimate Gamma/Gompertz Distribution based on Ranked Set Sampling Designs". **Journal of Mathematical and Computational Science**.11(6),8221-8239.

11. Hosking, J. R. (1990). “L-Moments: Analysis and Estimation of Distributions Using Linear Combinations of Order Statistics”. **Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)** . 52(1), 105-124.
12. Hosking, J. R. (1999). “L-Moments and their Applications in the Analysis of Financial Data**”. International Business Machines Corporation. Research Division**. Research report.
13. Hussian, M. A. (2014). “Bayesian and Maximum Likelihood Estimation for Kumaraswamy Distribution Based on Ranked Set Sampling”. **American Journal of Mathematics and Statistics.** 4, 30-37.
14. Joukar, A; Ramezani, M and MirMostafaee, S. M. T. K. (2019). “Parameter Estimation for the Exponential-Poisson Distribution Based on Ranked Set Samples”. **Communications in Statistics - Theory and Methods.**
15. Khamnei, H. J and Mayan, S.R. (2016). “Comparison of Parameter Estimation in the Exponentiated Gumbel Distribution Based on Ranked Set Sampling and Simple Random Sampling”. **Journal of Mathematics and Statistical Science**. 2016, 490-497.
16. McIntyre, G. A. (1951). “A Method for Unbiased Selective Sampling, Using Ranked Sets”. **Australian Journal of Agricultural Research** . 3(4), 385-390.
17. Murthy, D. N. P; Xie, M. and Jiang, R. (2004). “**Weibull Models**”. John Wiley and Sons.
18. Muttlak, H.A. (1997). “Median Ranked Set Sampling. **Journal of Applied Statistical Sciences**. 6, 245-255.
19. Muttlak, H.A. (2003a). “Investigating the use of Quartile Ranked Set Samples for Estimating the Population Means”. **Applied Mathematics and Computation**. 146, 437-443.
20. Muttlak, H.A. (2003b). “Modified ranked set sampling methods”. **Pakistan Journal of Statistics**. 19 (3), 315-323.

21. Qian, W; Chen, W and He, X. (2019). “Parameter Estimation for the Pareto Distribution Based on Ranked Set Sampling”. **Statistical Papers**. 62,395–417.
22. Rashwan, N.I. (2010). “Decile Ranked Set Sampling”. **Scientific Journal- Commerce and Finance, Tanta University**. 30, 69-83.
23. Rashwan, N. I and Tawfic, M. (2022). “Estimation of Parameters of The Exponentiated Pareto Distribution using Ranked Set Sampling”. **The Scientific Journal of Commerce and Finance, Tanta University**.42(2),130-142.
24. Rényi, A (1961). “On Measures of Entropy and Information”. **Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**. 547-561.
25. Sabry, M. A. and Shaaban, M. (2020). “Dependent Ranked Set Sampling Designs for Parametric Estimation with Applications”. **Annals of Data Science** .7, 357-371.
26. Samawi, H. M; Ahmed, M.S and Abu Dayyeh, W. (1996). “Estimating the Population Mean Using Extreme Ranked Set Sampling”. **Biometrical Journal**. 38(5), 577–586.
27. Samawi, H.M and Tawalbeh, E.M. (2002). “Double Median Ranked Set Sampling, Comparison to other Double Ranked Set Samples for Mean and Ratio Estimators”. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**. 1, 428-442.
28. Samuh, M. H and Qtait, A. (2015). “Estimation for the Parameters of the Exponentiated Exponential Distribution Using a Median Ranked Set Sampling”. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**. 14(1), 215-237.
29. Sabry, M.A and Shaaban, M. (2020). “Dependent Ranked Set Sampling Designs for Parametric Estimation with Applications”. **Annals of Data Science**.7(2),357-371.
30. Shaaban, M and Yahya, M. (2020). Comparison Between Dependent and Independent Ranked Set Sampling Designs for

Parametric Estimation with Applications. **Annals of Data Science**.10,167-182.

31. Takahasi, K. and Wakimoto, K. (1968). “On Unbiased Estimates of The Population Mean Based on the Sample Stratified by Means of Ordering”. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**. 20, 1-31.
32. Zamanzade, E and Al-Omari, A.I. (2016). “New Ranked Set Sampling for Estimating the Population Mean and Variance”. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**. 45(6), 1891-1905.