فلسفة الهندسة عند جورج بيركلي

مقال في فلسفة الرياضيات

أحمد عصام الدين عبد الجواد*

a1991981@yahoo.com

ملخص

إن فلسفة بيركلي قائمة على إنكار الأفكار المجردة، ولذا فإن موضوع الهندسة لديه هو دراسة الأشكال المدركة حسيًا. ومن ثم، فلا يمكن البرهنة على وجود شيء إلا إذا كان مدركًا أو قابلاً للإدراك حسيًا. وفي ذلك قال بيركلي قولته المأثورة "ما يوجد هو ما يدرك" – والذي يعد نقيض لمبدأ التجريد – فالأشياء لا توجد بفضل إدراكي لها، بل توجد حتى وإن لم أدركها، إذ قد يدركها إنسان آخر حين لا أدركها أنا.

لا ينقسم موضوع الهندسة بشكل لا متناه – من منظور بيركلي – حيث إن قدرة العقل الإنساني لا تمتد لإدراك اللامتناهي، لذا قدم بيركلي فكرة النهاية الصغرى وأشار إلى أن كل الأشكال الهندسية تتركب من مجموعة من النقاط والتي يعدها أجزاء متناهية – أي أصغر شيء ممكن إدراكه – تسمى بالنهايات الصغرى الحسية، والتي من المستحيل أن تكون قابلة للانقسام بشكل لا متناه. ومن ثم، اقترح بيركلي أن تكون النهاية الصغرى الحسية هي أساس الهندسة.

كلمات مفتاحية: جورج بيركلي، الامتداد المدرك، الانقسام اللامتناهي، النهايات الصغرى.

* أستاذ مساعد بكلية الآداب- جامعة السويس

مقدمة

أسهم "جورج بيركلي"[١] بعديد من المؤلفات التي عرض خلالها فلسفته عن الرياضيات بصفة عامة والهندسة بصفة خاصة. ورغم أهمية "جورج بيركلي" بوصفه عالم رياضيات بارز، فإسهاماته الرياضية لم تحظ بعناية البحث من قبل الباحثين العرب – بقدر ما أتيح لنا من معارف – فلا نجد بحثًا علميًأ تناول فلسفة الهندسة عند جورج بيركلي.

من ثم، يناقش البحث الحالي فرضاً أساسياً يعني **بتحليل رؤية جورج بيركلي لطبيعة الهندسة بوصفها فرعًا من فروع الرياضيات** وكان على الباحث عند التحقق من هذا الفرض أن يناقش مجموعة من الفروض الفرعية التي تندرج تحته وتأخذ شكل التساؤلات التالية:

- **ما موضوع الهندسة**
- **هل ينقسم موضوع الهندسة بشكل لا متناه**

في سبيل التحقق من الفرض الرئيس للبحث، والإجابة عما ارتبط به من تساؤلات، اعتمد الباحث كثيرًا وحسبما يتطلب سياق البحث على مؤلفات "جورج بيركلي" بصفة أصلية، بوصفها المصادر الرئيسة للبحث، كما اعتمد الباحث على مؤلفات مجموعة من الكتاب البارعين الذين تناولوا منطق وفلسفة الرياضيات عند "جورج بيركلي" بالتفسير والتأويل.

في السياق نفسه، انتهج الباحث منهجًا تحليليًا بالدرجة الأولى اقتضته طبيعة البحث لبسط وتحليل القضايا، وتقديم تفسيرٍ لها.

ما موضوع الهندسة؟

تتسم العقلية الفلسفية الإنجليزية بوجه عام – وفلسفة بيركلي بوجه خاص – بالإيمان بالواقع الحسي وإنكار الأفكار المجردة.

وبينما أعلنت الرؤى التقليدية بأن الأفكار المجردة هي موضوع البحث الرياضي[٢]، فإن الرياضيات تُعد – من منظور بيركلي – علم يهتم بالموضوعات الحسية، هذه الموضوعات الحسية ليست مهمة في حد ذاتها؛ حيث تتمثل السمة الأساسية للمعرفة الرياضية في عموميتها النابعة من قدرة الموضوعات الحسية على أن تعمل بوصفها علامات signs [٣].

لعل ربط الرياضيات بنظرية العلامات سمح لبيركلي بقبول التقسيم التقليدي للرياضيات إلى هندسة وحساب، وذلك لأنه وجد أنواع مختلفة من الموضوعات الإدراكية التي تعمل بوصفها علامات في الهندسة والحساب، فبينما يتم تفسير الحساب بشكل اسمي – ولهذا فإن موضوعه هو الرموز – فإن الهندسة تتخذ من الامتداد المدرك perceivable extension موضوعا لها[٤]. وليس الامتداد المجرد، حيث يقول بيركلي عن موضوع الهندسة:–

> **لا أتفق مع الرأي القائل بأن موضوع الهندسة هو الامتداد المجرد، حيث تتعامل الهندسة مع الأشكال Figures، ويمثل الشكل نهاية المقدار Magnitude، والامتداد المجرد ليس له مقدار متناه، ويترتب على ذلك أنه ليس له شكل. ومن ثم، فهو لا يعد موضوعًا للهندسة[٥].**

من ثم، رفض بيركلي أن يكون الامتداد المجرد موضوعًا للهندسة، لأن ذلك يتنافى مع إنكاره لوجود الأفكار المجردة – حتى في العقل نفسه فضلًا عن العالم الخارجي – وذلك اتساقًا مع مذهبه الحسي، حيث يقول:-

مهما حاولت بأي جهد فكري فلن أستطيع تصور المعنى المجرد، ومن المستحيل أيضًا أن أكون فكرة مجردة عن الحركة المتميزة للجسم المتحرك لا هي بالسريعة ولا بالبطيئة ولا بالمنحنية ولا بالمستقيمة، وقياسًا على ذلك سائر الأفكار الكلية المجردة[٦].

فالعقل لا يستطيع إدراك الأفكار المجردة دون اللفظ الدال عليها، ولا يعني ذلك أن فلسفة بيركلي عقلانية، حيث إن العقل يبدأ من الفكر، بينما تبدأ فلسفة بيركلي من الواقع وتقوم على مدركات جزئية ندركها بحواسنا. فوجود أي شيء – في نظر بيركلي – مرهون بالإدراك الحسي له[٧]. والذي يتم بصورتين، إما بصورة مباشرة بواسطة الحواس أو بصورة غير مباشرة بواسطة العقل والتأمل Reflection. وهذا ما أكده بقوله:-

إنني لا أنكر وجود أي شيء أدركه بالحواس أو التأمل، حيث إن الأشياء التي أراها بعيني وألمسها بيدي توجد بشكل فعلي، ولا أضعها موضع تساؤل[٨].

يثق بيركلي بالحواس، ولا يساوره أي شك في وجود الأشياء المدركة بالحواس[٩]. فهي أساس إدراك الأشياء ثم يستوعبها العقل[١٠]، فهي لا توجد بمعزل عنه[١١].

يتضح أن تصور بيركلي عن موضوع الهندسة يحكمه آراءه الحسية؛ فهو يشير إلى وجوب استخدام أي من الحواس المساعدة على إدراك الأشياء. فلا يمكن للفرد أن يتخيل أو يؤكد على وجود أشياء لا وجود لها، وبعيدة عن متناول العقل الإنساني، والذي بدوره لا يمكنه أن يتصورها أو يتمثلها لبعدها عن الحقيقة الحسية[١٢].

في السياق نفسه، يشير بيركلي إلى أنه إذا لم تكن الحواس موجودة فلن يكون لدى العقل أي فكر على الإطلاق، ومن الحماقة الاعتقاد بأن أفكار العقل والتأمل سابقة على الأفكار المستنبطة من الحواس[١٣].

من ثم، فوجود الأشياء مرهون بوجود عقل مدرك لها[١٤]؛ فلا وجود لها إلا في العقل. وفي ذلك قال بيركلي قولته المأثورة "ما يوجد هو ما يدرك[١٥] Their *esse is percipi*"[١٦]؛ والذي يعد نقيض لمبدأ التجريد الذي ينكره، ففكرة الإيمان بوجود الأشياء بشكل مستقل عن العقل الانساني تعد نتيجة طبيعية للاعتقاد بالأفكار المجردة.

يتضح مما سبق أن الأشياء لا توجد بفضل إدراكي لها، بل توجد حتى وإن لم أدركها، إذ قد يدركها إنسان آخر حين لا أدركها أنا. وقد أشار بيركلي إلى ذلك المعنى بقوله:-

> **يمكنني القول بوجود المكتب الذي أجلس عليه، وهذا يعني أنني أراه وألمسه، ولو كنت خارج غرفة الدراسة فإنني أقول أنه موجود. معني ذلك إنني لو كنت متواجدًا بغرفة الدراسة فإنني أدركه أو أن شخصًا ما آخر سيدركه** [١٧].

من ثم، فمبدأ "ما يوجد هو ما يدرك" يدل على الإدراك الفعلي الراهن للأشياء، وعلى الإدراك الممكن لها أيضًا.

وبصفته من أنصار الاسمية، فقد تكون هذه الأشياء – لدى بيركلي – مجرد تمثيلات مؤسسة على خبرات مرئية محددة، إلا أنها لا تتسم بالسمات العامة لمجموعات الأشياء الموجودة في الطبيعة (فالفرد لا يستطيع أن يجرد سمة المثلثية من الشيء المكون من ثلاثة أضلاع). فهذه الأسماء – مثل مثلث Triangle – تعمل بوصفها علامات عامة تشير إلى علامات أخرى (وليس لأشياء واقعية)، ولكن هذه مسألة مواضعة، فقد نطلق على شكل ثلاثي الأضلاع مرسوم على ورقة اسم (مثلث)، ولكن نظرًا لأن الامتداد المتناهي يوجد فقط في عقولنا، فإن هذا التمثيل يرتبط فقط بشكل تقريبي بالعلامات التي كونتها مدركاتنا عن أشياء طبيعية أخرى تبدو لنا أنها متشابهة معها. وقد أشار بيركلي إلى أن كل امتداد متناه قد يكون موضوعًا في تفكيرنا، هو عبارة عن فكره توجد فقط في عقولنا[١٨].

فالعقل الإنساني – من منظور بيركلي – ليس قادرًا على تكوين الأفكار والمفاهيم المجردة للأشياء، وليس ثمة أفكار مجردة يستعين بها العقل الإنساني على التفكير في القضايا الفلسفية الشائكة، فالأفكار المجردة مجرد وهم يحول دون إدراك الأشياء على طبيعتها[١٩].

فمن المستحيل لأي فرد – من منظور بيركلي – أن يتجسد في عقله فكرة مجردة عن امتداد مرئي أو شكل دون لون، أو حركة دون الجسم الذي تحدث فيه هذه الحركة، فهذا غير موجود ويعد تجريدًا غير مشروع[٢٠].

بناء عليه، فإن موضوع الهندسة هو علم الامتداد والأشكال المدركة perceivable حسيًا، أو القابلة للإدراك to be perceived حسيًا[٢١]؛ حيث يمكن خلاله وصف أي شكل أو مقدار هندسي عن طريق رؤيته أو لمسه[٢٢]. فالإدراك الحسي للأشياء يتم نتيجة الارتباط المألوف بين الأفكار المرئية والملموسة[٢٣]، والناشيء لدينا من الخبرة وتكرار التجربة[٢٤]، يقول بيركلي:-

> **لا يوحي إدراكي للموضوعات المرئية بأي فكرة أو موضوع من موضوعات اللمس إلا إذا كان لدي خبرة سابقة عن وجود ارتباط مألوف قائم بينهما**[٢٥].

من منظور بيركلي، ليس ثمة ارتباط ضروري بين هذين النوعين من الأفكار، نظرًا لاختلاف طبيعة كل منهما، حيث إنهما متمايزان وغير متجانسين[٢٦]. فما ندركه بحاسة البصر يختلف عما ندركه بحاسة اللمس، وهو ما أشار إليه بقوله:-

> **إن الامتداد، الأشكال، والحركات المدركة عن طريق حاسة البصر تختلف بشكل ملحوظ عن المدركة عن طريق حاسة اللمس والتي قد تحمل المسمى نفسه، كما أنه لا توجد فكرة واحدة أو نوع من أنواع الأفكار مشترك بين الحاستين**[٢٧].

وحيث إننا – كما يشير بيركلي – لا نرى سوى الضوء والألوان بأنواعها وظلالها، إذن فلن نستطيع لمس تلك الألوان[٢٨]. وحيث إنه لا يوجد ارتباط ضروري بين الأفكار المرئية والملموسة – وإنما هو مجرد ارتباط مألوف[٢٩] – يترتب على ذلك في نظر بيركلي أن:-

التنوع في الموضوعات المرئية لا يستتبعه بالضرورة تنوع في الموضوعات الملموسة الموافقة لها، فالصورة التي تم رسمها بألوان عديدة تؤثر على الملمس بطريقة واحدة[٣٠].

يترتب أيضًا على ذلك في نظر بيركلي أنني:-

لا أستطيع استنتاج أن رؤية شيئين تجعلني أشعر بشيئين، إذ كيف لي أن أعرف دون سابق خبرة أن قدمي الإنسان المرئيتين (لأنهما اثنان) يرتبطان بالقدمين الملموستين، أو أن الرأس المرئية (لأنها واحدة) ترتبط بالرأس الملموسة المادية؟[٣١].

من ثم، تشير "قدم الإنسان" أو "رأس الإنسان" إلى مجموعة بعينها من الأفكار الملموسة وأيضا مجموعة بعينها من الأفكار المرئية، ليس لوجود ارتباط ضروري بينهما، وإنما لأننا تعلمنا بالخبرة أنهما يوجدان معًا بانتظام.

في ضوء هذا الانقسام المرئي – الملموس الحاد للأفكار، اتخذ بيركلي منحى جديدًا خلال تأكيده على أن موضوع الهندسة هو:-

الامتداد والأشكال المُدركة عن طريق حاسة اللمس وليس الأشكال المُدركة عن طريق حاسة البصر[٣٢].

من ثم، فإن موضوع الهندسة لدى بيركلي هو الأشكال الملموسة وليس المرئية. ولقد أكد على ذلك بوضوح بقوله:

تعد المقاييس المقررة البوصة inch والقدم feet ... إلخ امتدادات ملموسة وليس مرئية[٣٣].

يتضح مما سبق أن مقولات بيركلي أشارت في البداية إلى أن موضوع الهندسة هو دراسة الأشكال المدركة حسيًا (سواء أكانت مرئية أو ملموسة)، ولكنه في النهاية اقتصر على دراسة الأشكال المدركة الملموسة فقط، وذلك لأن الرؤية تقدم لنا شيئًا متغيرًا باستخدام حاسة البصر.

حيث يًعالج العقل المعلومات التي تجمعها العين، ثم يُقدم إدراكاً لا يتفق مع الموجود الفعلي؛ على سبيل المثال الشيء الذي يبلغ طوله بشكل ملموس ١٥ بوصة، يمكن رؤيته من مسافة بعينها وكأنه يبلغ من الطول بوصة واحدة، فحاسة البصر عاجزة عن إدراك الأشياء على حقيقتها الموضوعية؛ حيث إنها لا تدرك بذاتها المقادير، أو الأشكال في ذاتها، أو تقدير المسافات كما هي في الواقع، حيث إن المسافات مهما كانت قريبة أو بعيدة لا تمثل أكثر من نقطة واحدة من شبكية العين[٣٤].

يوضح بيركلي اختلاف المسافة المرئية عن المسافة الملموسة بعدة طرق مختلفة على النحو التالي[٣٥]:-

(١) إذا كانت البوصة المرئية تتساوى مع البوصة الملموسة، فإنه يترتب على ذلك أن يتساوى اللامتساويات unequals. وهذا يعد منافيًا للعقل. فما المسافة التي ستكون عليها البوصة المرئية كي تتساوى مع البوصة الملموسة؟

(٢) إذا كان الشخص يرى ولكنه لم يُسمح له برؤية أطرافه أو أي شيء يلمسه بعد فإنه سيعلم طول البعض بمجرد النظر إليه، وذلك إذا كانت القدم الملموسة والقدم المرئية هي الفكرة نفسها بالنسبة له.

لكن لماذا تُعد الأشكال الملموسة – وليست الأشكال المرئية – موضوعًا للهندسة؟

يرتبط تفسير ذلك بافتراض بيركلي الذي يشير إلى أن الأشكال المرئية تعد علامات على الأشكال الملموسة، حيث أشار إلى أنه:–

تقتصر مهمة الأشكال المرئية على كونها تمثل للعقل الأشكال الملموسة المحددة التي ترتبط بها(٣٦).

يمكن ذكر أسباب عدم اعتناق الفلاسفة السابقين لهذه النظرية الهندسية – من منظور بيركلي – في أن:–

الانتقال من الأفكار المرئية إلى الملموسة يكون سريع ومفاجئ وغير مُدرك لدرجة أننا قد نفكر فيهما بشكل متكافئ بل ونعدهما موضوعًا مباشرًا للرؤية(٣٧).

ثمة سبب آخر وراء ذلك اللبس العام بين نوعي الأفكار السابق الإشارة لهما وهو أن المسمى نفسه عادة قد ينطبق على كلا النوعين(٣٨).

هنا يشير الباحث إلى مبدأ نظرية بيركلي عن العلامات؛ وهو أن العلامة غالبًا ما تؤخذ بوصفها علامة في حد ذاتها وكذلك على دلالاتها حيث يقول بيركلي:–

لا يمكن القول بأن كلا من المربع الملموس والمربع المرئي من النوع نفسه لمجرد أنهما يحملان المسمى نفسه، ولكن يمكن القول بأن كلًا من المربع الملموس والكلمة (التي تشير إليه) المكونة من أربعة حروف (مربع) من النوع

نفسه لأن كليهما يطلق عليه المسمى نفسه. فقد جرت العادة على تسمية الكلمات المكتوبة والأشياء التي تشير إليها بالمسمى نفسه[٣٩].

يفترض بيركلي أن ثمة علامة مرئية لكل شكل ملموس، وسواء أكان الأمر كذلك أم لا، فما يهمنا هو رؤيته للعلاقة الموجودة بين الأشكال المرئية والملموسة، رغم أنه حاول إظهار أن هذه العلاقة ما هي إلا علاقة علامة بدلالتها، إلا أنه يقر بأن بعض الأشكال المرئية تكون أنسب من غيرها في الإشارة إلى بعض الأشكال الملموسة. ومن ثم، فهو يشير ضمنيًا إلى أن قيامنا بالربط بين الاثنين يعتمد على ما هو أكثر من مجرد خبرتنا بتزامن وجودهما معًا. حيث يشير إلى أن المربع المرئي يعد أكثر ملاءمة من الدائرة المرئية – على سبيل المثال – في الإشارة إلى المربع الملموس، وذلك لأن أجزاء المربع المرئي تتوافق مع أجزاء المربع الملموس ولكن الدائرة ليست كذلك[٤٠]. ثم قدم بيركلي ادعاءً عامًا بأنه:-

تحتوي الأشكال المرئية بداخلها على أجزاء مرئية مميزة تتوافق مع الأجزاء الملموسة المميزة للأشكال التي تشير إليها هذه الأشكال المرئية[٤١].

في سياق متصل، يفترض بيركلي أن تكون العلاقة الموجودة في الهندسة بين الأشكال المرئية والأشكال الملموسة متماثلة وغير متغيرة بشكل كلي؛ حيث يقول:-

ثمة اختلاف بين دلالة الأشكال الملموسة التي تشير إليها الأشكال المرئية، ودلالة الأفكار التي تعبر عنها الكلمات،

وبينما تعد الأخيرة متغيرة وغير يقينية، فإن الأولى ثابتة ومتماثلة في كل الأوقات والأماكن، فالمربع المرئي على سبيل المثال يثير في العقل الشكل الملموس نفسه الموجود في أوربا، وكذلك الشكل نفسه الموجود في أمريكا[٤٢].

تقدم هذه الرؤية معيارًا للربط بين الأشكال المرئية والملموسة، حتى إذا لم يتعرض الفرد قبل ذلك لتجربة لاحظ فيها تزامن وجود المربع المرئي مع المربع الملموس، إلا أنه قد يكون لديه أساس ما ليؤكد أن أحدهما (المربع المرئي) يعد علامة على الآخر (المربع الملموس).

ومن ثم، تعامل بيركلي مع الأشكال الهندسية بوصفها علامات على مجموعة الأشكال التي تشير إليها وتمثلها[٤٣]، فالعلامات المستخدمة للهندسة يجب أن تكون في حد ذاتها موضوعات هندسية تمثل موضوعات هندسية أخرى[٤٤].

انتقالا إلى رؤية بيركلي عن طبيعة بعض الموضوعات الهندسية مثل الفراغ Space، فسنلاحظ أنها متسقة مع إنكاره لوجود الفراغ المطلق والفكرة المجردة العامة عن الفراغ. ويؤكد ذلك قائلا:

عند استثارة حركة في أحد أجزاء الجسم وكانت هذه الحركة حرة ودون مقاومة، فعندئذ أقول إن هذا هو الفراغ space، ولكن إذا وجدت مقاومة فعندئذ أقول إن هذا هو الجسم، أما إذا كانت النسبة بين المقاومة والحركة أكبر أو أقل فعندئذ نقول إن الفراغ يكون خاليًا وتامًا أو غير خالص وتام. ولهذا عندما أتحدث عن الفراغ الخالي أو الخالص، فلا يفترض أن كلمة فراغ هنا تشير إلى فكرة لا ترتبط

بالجسم والحركة وإن كنا نعتقد أن كل اسم يعبر عن فكرة مميزة يمكن فصلها عن باقي الأفكار الأخرى(٤٥).

يتضح مما سبق أن تأكيد بيركلي دائمًا على الملموس؛ حيث تعد الأشكال المرئية المحددة علامات على موضوعات الهندسة، والمتمثلة في الأشكال الملموسة المحددة.

في ضوء تلك الدلالة المزدوجة (أي كلمات تشير إلى أشكال مرئية تشير بدورها إلى أشكال ملموسة)، فقد أشار بيركلي إلى أن كلمة "مثلث" هي علامة عامة طالما أنها تشير لأي مثلث مرئي أو ملموس، ولعل تعريف "المثلث" بأنه "سطح Surface يحده ثلاثة خطوط مستقيمة" لا يحدد "ما إذا كان هذا السطح كبيرًا أم صغيرًا، أسود أم أبيض، كما لا يحدد ما إذا كانت أضلاعه طويلة أم قصيرة، متساوية أم غير متساوية، كما لا يحدد الزوايا التي تتقابل عندها الأضلاع، فهذه الحالات تمثل تنوعًا كبيرًا، وبالتالي لا توجد فكرة محددة وثابتة تعمل على تقييد دلالة كلمة مثلث(٤٦).

بناء عليه، فإذا كان الفرد يتعامل مع الأشكال المرئية وليس الأسماء اللفظية، يظل من الممكن – من منظور بيركلي – لشكل مرئي بعينه أن يكون علامة عامة على كل الأشكال الملموسة بل وحتى كل الأشكال المرئية، حيث يمكن لأي فكرة أن تصبح عامة خلال جعلها تشير إلى باقي الأفكار الجزئية من النوع نفسه (٤٧). ومن ثم، يمكن تلخيص معتقد بيركلي الرئيس في تصريحه بأن:-

الفكرة التي تعد في حد ذاتها خاصة، تصبح عامة عندما تمثل أو تشير إلى أشياء خاصة أخرى من النوع نفسه(٤٨).

يمكن لكل الخطوط أو الأشكال المدركة – في مجال الهندسة – أن تمثل كل الخطوط والأشكال المشابهة لها، كما أن المبرهنات التي تثبت عليها يمكن تطبيقها بشكل عام على كل صنف الأشياء الذي تمثله دون افتراض أن المبرهنات تتعامل مع الموضوعات الهندسية المدركة بشكل مباشر[٤٩].

يترتب على ذلك، إن الخط الواحد يمكن أن يمثل مجموعة كاملة من الخطوط، حيث يؤكد بيركلي على المقدرة التمثيلية للخطوط المدركة؛ فأي خط بعينه يمكن أن يمثل ليس فقط باقي الخطوط الواقعية وإنما يفترض أن يمثل أي خط قد يوجد على الإطلاق[٥٠].

ويوضح بيركلي ذلك خلال مثال؛ حيث إنه بفرض أن عالم الهندسة يحاول برهنة منهج انقسام الخط إلى جزأين متساويين، فقام – على سبيل المثال – برسم خط أسود متناه طوله بوصة تقريبًا، هذا الخط الذي يعد في حد ذاته جزءًا خاصًا أصبح من حيث دلالته عام لأنه مستخدم هنا ليمثل كل الخطوط من النوع نفسه أيا كانت، وذلك لأن ما يثبت عليه يثبت على كل الخطوط، أو بمعنى آخر، يثبت على الخط بصفة عامة[٥١].

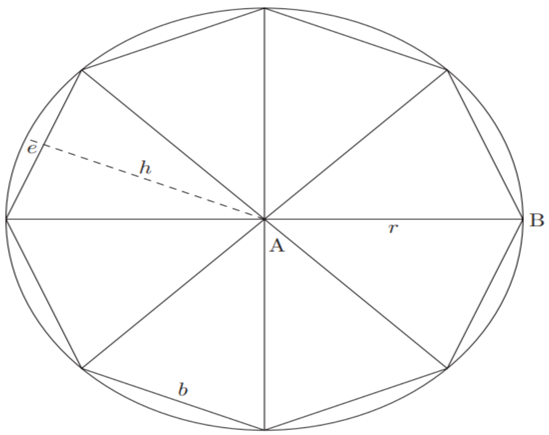
ظلت هذه الرؤية – المبنية على العمومية التمثيلية للمقادير الهندسية المتناهية – محورية في تصور بيركلي عن موضوع الهندسة.

هل ينقسم موضوع الهندسة بشكل لا متناه؟

حددت مبادئ الهندسة الكلاسيكية – كما تمت صياغتها في كتاب العناصر لإقليدس Euclid (٣٠٠ ق.م – ٢٦٥ ق.م) – مجال الهندسة في النظر إلى المقادير الهندسية المتناهية والفروق المتناهية بين تلك المقادير، ولبحث مشكلة ما – بشكل تقليدي – لم يكن ثمة سبيل آخر سوى التعامل مع المقادير الهندسية

على أنها تتركب من عدد لا متناه من الأجزاء اللامتناهية الصغر. فعلى سبيل المثال، المدخل الكلاسيكي لمشكلة حساب مساحة شكل ما (والمعروفة باسم مشكلة التربيع quadrature[٥٢]) يمكن أن ينظر فقط إلى الخطوط المتناهية finite lines، المساحات areas، أو الأحجام الناتجة عن تركيبات من البديهيات المعيارية standard axioms للهندسة الإقليدية[٥٣].

إن هذا التقييد بالمناهج المتناهية يجعل التعامل مع النتائج الأولية مسألة في غاية الصعوبة والتعقيد، كما يجعل من المدخل العام لمشكلة التربيع أمرًا مستحيلًا. ولكن استخدام مناهج الكميات اللامتناهية الصغر infinitesimal methods يمكنه أن يبسط الأمر بشكل ملحوظ، وعلى أساس سهولة هذه المناهج وعموميتها النسبية تم تفضيلها بواسطة علماء الرياضيات في القرن السابع عشر[٥٤]. ويمكن توضيح هذا الأمر خلال الحجة التي تفترض أن ثمة دائرة AB كما في الشكل التالي:-



مركز الدائرة A وطول نصف قطرها r ومحيطها c وسيتم استخدام أفكار الكميات اللامتناهية الصغر لاشتقاق الصياغة πr^2 الخاصة بمساحة الدائرة.

يمكن تقريب مساحة الدائرة خلال النظر إلى مجموعة من المثلثات متساوية الساقين والمرسومة داخل الدائرة، علما بأن الضلع الأكبر لهذه المثلثات طوله r . وإذا نظرنا إلى مجموعة أكبر من هذه المثلثات ذات قاعدة أصغر بشكل متوال سنلاحظ أنها تمثل قيم تقريبية للمساحة بشكل أكبر، وبفرض أن b يشير إلى طول قاعدة ذلك المثلث ويشير h إلى الارتفاع، فإن مساحة كل مثلث ستكون $\frac{1}{2}\ bh$ وإذا فرضنا أن e تمثل الفرق بين h و r فيمكن التعبير عن هذه المساحة بالصيغة الرمزية التالية:

$$\frac{1}{2}\ b(r-e)$$

وإذا فرضنا أن k تمثل عدد المثلثات المستخدمة في القيم التقريبية فإن قيمة c يمكن تقريبها إلى kb، ومن ثم يمكن التعبير عن مساحة الدائرة بالصيغة الرمزية التالية:

$$\frac{1}{2}\ kb(r-e)$$

وقد نميل للاعتقاد بأنه كلما نظرنا إلى مجموعة أكبر لانهائيًا من المثلثات ذات أضلاع لا متناهية الصغر، فإن التقريب السابق سيمهد للتوصل إلى النتيجة التامة.

في الحالة اللانهائية، فإن تقريبنا إلى c (محيط الدائرة) يصبح دقيقًا، وبالتالي يمكن أن تحل c محل kb في معادلة المساحة السابقة، بينما e (الفرق بين r و h) سوف يختفي. وباستبدال kb بـ c، و $(r-e)$ بـ r نحصل على:-

$$\frac{1}{2}\ cr$$

وهي المساحة الصحيحة للدائرة. وحيث تُعرف π بأنها النسبة بين محيط الدائرة وقطرها، وحيث إن قطر الدائرة يساوي $2r$ فإن :-

$$c = 2r$$

ويمكن إعادة كتابة الصياغة الخاصة بمساحة الدائرة بالصيغة الرمزية التالية:-

$$\frac{1}{2}\, rc = \frac{1}{2}\, r\,(2\pi r) = \pi r^2$$

مما سبق يتضح أن هذه الحجة أقصر من البرهان الكلاسيكي الصارم، فضلًا عن كونها تبدو طبيعية وبديهية في الوقت نفسه خلال استخدام مناهج الكميات اللامتناهية الصغر(٥٥). إلا أن بيركلي رفض استخدامها متبعًا تقليدًا ذريًا، ومؤكدًا على أن:-

> **كل امتداد متناه عبارة عن فكرة توجد فقط في عقولنا، وبالتالي فإن كل جزء فيها يكون مدركًا، فإذا لم أستطع إدراك الأجزاء التي لا حصر لها في امتداد متناه انظر إليه، فإن هذه الأجزاء يقينًا لا توجد بداخله. وطالما إنني لا أستطيع إدراك الأجزاء التي لا حصر لها في أي خط أو سطح أو مضلع فأنا أستنتج أنها لا توجد بداخله(٥٦).**

عبر بيركلي بوضوح عن رفضه لتصور الكميات اللامتناهية الصغر. مشيرًا إلى أنه لا يمكن للامتداد المتناهي – بشكل يقيني – أن ينقسم بشكل لا متناه(٥٧).

فمن منظور بيركلي، لا يمكن البرهنة على وجود شيء إلا إذا كان فكرة مدركة حسيًا. ومن ثم، لا يمكن البرهنة على اللامتناهيات، وإذا كان ثمة إمكانًا

على البرهنة على الأعداد وهي مجرد رموز فقط – أي ليست أفكار مدركة حسيًا – إلا أن ثمة اختلافًا بين الأعداد وبين اللامتناهيات التي لا تمثل أفكارا حسية من جهة ولا فائدة منها من جهة أخرى[٥٨].

لهذا، استبعدت عقيدة بيركلي المعرفية استخدام مناهج الكميات اللامتناهية الصغر؛ فالموضوعات المدركة حسيًا ليست متناهية في الطبيعة بالإضافة إلى أن بيركلي قد أصر على أن قدرة العقل الإنساني لا تمتد لإدراك اللامتناهي، فقدراته محدودة ولا يستطيع محدود إدراك ما هو غير محدود. وذلك اتساقًا مع قوله المأثور "ما يوجد هو ما يدرك".

كما أن الكميات اللامتناهية الصغر تعد مستحيلة – من منظور بيركلي – لأنها دقيقة إلى حد بعيد ولا يمكن تخيلها أو إدراكها حسيًا. ومن ثم، فليس لها وجود [٥٩].

من ثم، فنظرًا لعدم وجود فكرة محددة عن اللامتناهي، فإننا مقيدون باستخدام المبادئ الرياضية المتناهية[٦٠].

ومن منظور بيركلي، فإن ثمة مشكلة ناتجة عن استخدام الكميات اللامتناهية الصغر، تتمثل في تقديم رؤية عن ماهيتها، فالكميات اللامتناهية الصغر تتراوح بين شيء ما وبين لا شيء وذلك لأنها تعد مقدارًا أقل من أي كمية (موجبة) يمكن تحديدها كما أنها لا تساوي الصفر. وحيث يستلزم التصور التقليدي عن الدقة أن تتعامل الرياضيات فقط مع الموضوعات التي تُدرك بوضوح، فإن استخدام الكميات اللامتناهية الصغر يستلزم مزيدًا من التبرير حتى يتفق مع قواعد الدقة والمعقولية[٦١].

إن الذين قاموا بتقديم مناهج الكميات اللامتناهية الصغر في رياضيات القرن السابع عشر كانوا على علم بهذه الصعوبات التصورية، كما كانوا يسعون لوضع هذه المناهج داخل مجال المعيار الكلاسيكي للدقة (وإن لم يكن بشكل ناجح) عن طريق القول بأن الكميات اللامتناهية الصغر يمكن جعلها مقبولة بشكل منهجي، أو أن النتائج التي يتم الحصول عليها من استخدام هذه المناهج يمكن الحصول عليها بدونهم[٦٢].

لقد كان بيركلي على علم بالخلافات التي تحيط باستخدام مناهج الكميات اللامتناهية الصغر، لذا كانت أحد اهتماماته الكبرى في فلسفته عن الرياضيات – بصفة عامة – هي إظهار أن الكميات اللامتناهية الصغر غير مقبولة وغير ضرورية في النظرية الرياضية المتطورة[٦٣].

لذا قدم بيركلي فكرة النهاية الصغرى **Minimum** وأشار إلى أن كل امتداد يُعد متناهيًا مكونًا من نقاط **points** أو نهايات صغرى حسية متناهية، وتُعرف النهاية الصغرى بأنها:-

أبسط الأجزاء أو العناصر المكونة للامتداد[٦٤].

من ثم، فمن اليقين لدي بيركلي أن الامتداد المدرك لا يمكن أن ينقسم بشكل لا متناه، فثمة نهاية صغرى لما هو ملموس ونهاية صغرى لما هو مرئي[٦٥]. ومن ثم، سعى بيركلي لتأسيس الهندسة على مذهبه الخاص وهو هندسة النهايات الصغرى الحسية.

كان بيركلي مقتنعا بأن مذهب الأفكار المجردة ينطوي على عديد من المعتقدات الخاطئة عن موضوع الهندسة، حيث يقول:-

الامتداد دون عرض أي الطول غير المرئي وغير الملموس لا يمكن إدراكه وهو خطأ قد وقعنا فيه نتيجة للمذهب التجريدي(٦٦).

وفي السياق نفسه يقول:-

تفترض البراهين الخاصة بالانقسام اللامتناهي للامتداد طولًا دون عرض وهو أمر مناف للعقل(٦٧).

يرفض بيركلي الادعاء الذي يشير إلى أن إمكانية إدراك الخط بعد تجريد العرض من الطول، ويقول بأن مذهب الأفكار المجردة قد أدى إلى اعتقاد خاطئ بأن ثمة طولًا لا عرض له؛ أي طول غير مرئي وغير ملموس. والنتيجة المترتبة على ذلك هو سوء فهم موضوع الهندسة(٦٨).

فضلاً عن افتراض المذهب التجريدي للانقسام غير المتناهي خلال عدم قصرهم للهندسة على ما هو حسي فقط. بالطبع ثمة نهاية لعدد الانقسامات التي يمكن إجراؤها في أي خط مرسوم خلال عملية البرهنة الهندسية – من منظور بيركلي – غير أن افتراض الانقسام اللامتناهي لا يسبب مشكلة بالنسبة للتجريديين؛ وذلك لأنهم ينظرون للخطوط على أنها مجرد تمثيل مادي لموضوعات هندسية صادقة مجردة من الخبرة العادية بحيث لا تعاني من مثل تلك القيود المادية(٦٩).

من ثم، اعترض بيركلي على ذلك، حيث أشار إلى أن حقائق الهندسة يتم الحكم عليها وفقًا للحواس؛ حيث يجب استخدام الحواس وليس البرهان للحكم

على الخطوط والأشكال المتناهية، فهذه الأشياء مدركة حسيًا، أما ما يسمى بغير الحسي فقد تمت البرهنة على أنه لا شيء ولا معنى له[٧٠].

حيث تعد الحواس اختبارًا لكل العلاقات الهندسية، وهكذا يعتمد التكافؤ بين الخطوط على عدم قدرتنا على التمييز خلال الإدراك الحسي؛ فالقول بأن ثمة خطوطًا متكافئة لا يعني سوى أن الفرد لاحظ بحواسه أنه لا اختلاف بينهما، أي خطوط لا فروق بينهما[٧١].

في السياق نفسه، يرفض بيركلي الادعاءات القائلة بأن التخيل والفكر البحت تستخدم للحكم على العلاقات الهندسية، حيث يعتمد التخيل فقط على الحواس، ويصدر الأحكام وفقا لما يحصل عليه من الحواس، ولكن نظرا لأن معرفته تأتي في المرتبة الثانية فإنه يعد غير مناسب للحكم والتمييز مثل الحواس. أما بالنسبة للفكر البحت، فيرى بيركلي أنه ليس له اختصاص في الرياضيات؛ وذلك لأنه يهتم فقط بعمليات العقل، في حين أن الخطوط والمثلثات ليس عمليات عقل[٧٢].

يفسر بيركلي ادعاء علماء الرياضيات – مثل جاليليو جاليلي [٧٣] – بأن الخطوط المتناهية تكون قابلة للانقسام بشكل لا متناه خلال إشارته إلى أنه – في الهندسة – لا يمكن البرهنة على الانقسام اللامتناهي للبوصة[٧٤]. يقول بيركلي:–

> **ليس من المقبول أو المبرهن – في الهندسة – أن تكون البوصة قابلة للانقسام بشكل لا متناه[٧٥].**

وفي السياق نفسه، يؤكد بيركلي على أنه:–

إذا قمنا باختبار الأمر بشكل كامل، فسوف نكتشف أننا لا نستطيع إدراك أن البوصة في حد ذاتها تتركب من آلاف الأجزاء أو تنقسم إلى آلاف الأجزاء، ولكننا نستطيع إدراك خطًا آخر أكبر من البوصة ويتم الإشارة إليه خلالها. وبالتالي عندما نقول إن الخط قابل للانقسام بشكل لا متناه، فإننا يجب أن نعني أن الخط هو الذي يعد كبيرًا بشكل لا متناه(٧٦).

بمعنى آخر، إذا قيل إن خطًا متناهيًا ما (مرئي أو ملموس) يحتوي على عدد لا متناه من الأجزاء، أو أنه قد ينقسم بشكل لا متناه، فلا ينبغي أن نفهم كما يقول بيركلي:-

سوى أنه علامة تشير إلى كل الخطوط المتناهية بشكل حيادي مهما كانت كبيرة، وبهذه المقدرة النسبية فإنه يستطيع أن يشير إلى هو أكثر من أي عدد من الأجزاء يمكن تحديده(٧٧).

يتضح مما سبق، استحالة وجود الخط اللامتناهي الصغر، وذلك لأن أي خط مهما كان صغيرا ينبغي أن يكون قابلًا للقسمة إلى أجزاء أصغر منه، ولهذا استنتج بيركلي أنه لا يوجد شيء يسمى خطًا لا متناهي الصغر.

من ثم، ينطوي مذهب بيركلي – الخاص بهندسة النهايات الصغرى – على أن السطح يتركب من عدد محدود من الخطوط، وأن الخطوط تتركب من عدد محدود من النقاط – أو النهايات الصغرى الحسية – والتي تتركب منها كل الأشكال الهندسية، ومن المستحيل أن تكون – النقاط أو النهايات الصغرى

الحسية – قابلة للانقسام بشكل لا متناه لأنه في هذه الحالة سيكون ثمة شيء ما تعجز حواسنا عن إدراكه، وهذا ما عده بيركلي ببساطة تناقضا[٧٨].

من منظور بيركلي، فإن السبب الذي يجعل علماء الرياضيات يعتقدون أن الانقسام اللامتناهي في الهندسة أمر ممكن يكمن في:-

(١) سوء فهم طبيعة البرهان الهندسي ومن الفشل في تمييز الخط المستقيم المستخدم فيه عن الخطوط التي قد يمثلها هذا الخط. حيث يقول:-

ينظر عالم الهندسة للخطوط والأشكال الموجودة في الرسم البياني diagram (والتي يفترض أن تشير إلى عدد لا حصر له من الخطوط والأشكال الأخرى مختلفة الأحجام) على أنها مجردة من مقاديرها، غير أن هذا لا ينطوي على تكوين فكرة مجردة، فهو لا يهتم بما هو المقدار المحدد سواء أكان كبيرًا أو صغيرًا، ولكن ينظر له بوصفه شيئًا حياديًا تمت البرهنة عليه. ويترتب على ذلك أن الخط الموجود في الرسم والذي لا يتعدى طوله البوصة ينبغي التحدث عنه وكأنه يحتوي على عشرة آلاف جزء، ذلك لأنه لا ينظر إليه في حد ذاته ولكن بوصفه كلي، وهذه الكلية تكون في دلالته فقط والتي بها يمثل عدد لا حصر له من الخطوط الأكبر منه، والتي قد تحتوي على عشرة آلاف جزء أو أكثر رغم أنه لا يوجد بها أكثر من بوصة بهذا الشكل. وبهذه الطريقة، تنتقل سمات الخط التي تم التعبير عنها إلى العلامة الممثلة له، وعن طريق الخطأ تنسب هذه السمات إلى العلامة وكأنها طبيعتها الخاصة[٧٩].

(٢) عجز علماء الرياضيات عن ملاحظة أنهم يتعاملون مع علامة، ينبغي عليها أن تظل مميزة عن الأشياء التي تتم الإشارة إليها؛ نظرًا لأنه لا يوجد عدد كبير جدا من الأجزاء. ولكن من الممكن أن يكون ثمة خط يحتوي على ما هو أكثر من هذا العدد، فالخط ذو البوصة الواحدة قد يحتوي على ما هو أكثر من أي عدد يمكن تحديده، ولعل هذا يعد صادقًا ليس بالنسبة للبوصة بشكل مطلق وإنما بالنسبة للأشياء التي تشير إليها البوصة[٨٠].

تشير فرضية الانقسام اللامتناهي إلى أن كل مقدار هندسي، أيا كان نوعه، يمكن تقسيمه إلى مقدارين من النوع نفسه، وهكذا فإن الانقسام اللامتناهي للخط معناه افتراض أن كل خط يمكن تقسيمه إلى خطين، وينطبق الادعاء نفسه على أنواع المقادير الأخرى مثل الأسطح، الزوايا، والمجسمات...إلخ. ويؤكد بيركلي – وفقًا للمبدأ الذي يشير إلى أن موضوع الهندسة هو الامتداد المدرك – على أن ثمة نهاية صغرى حسية لا يمكن للامتداد أن ينقسم بعدها. وهذه النهاية الصغرى الحسية هي نوع من الذرة يرى بيركلي أن كافة أنواع المقادير الهندسية تتركب منها[٨١]. يقول بشأن ذلك إن:–

الهندسة ليست ملمة بكل أفكارنا عن الأشكال وذلك لأنها ليست قابلة للانقسام بشكل لا متناه[٨٢].

إن دلالة فرضية الانقسام اللامتناهي بالنسبة للهندسة التقليدية لا يمكن المبالغة فيها، حيث ظهرت نماذج من هذه الفرضية في المبرهنات الأولية التي تمت البرهنة عليها في الكتاب الأول من "العناصر" لإقليدس، وكان يُعتقد أن هذه المبرهنات تكفي بوصفها أدلة قاطعة على فرضية الانقسام اللامتناهي نفسه[٨٣].

كما تمت الإشارة إلى الانقسام اللامتناهي ضمنيًا في نظرية المقادير غير القابلة للقياس incommensurable magnitudes، وتتمثل المشكلة المعيارية في الهندسة التقليدية في إيجاد النسب بين مقدارين، غير أن هذه النسب لا يمكن التعبير عنها بوصفها نسب بين أعداد صحيحة. ومن الأمثلة الشائعة القطر δ والضلع σ في المربع ولعل النسبة $\delta: \sigma :: \sqrt{2}:1$ غير قادرة – بشكل ملاحظ – على التعبير بوصفها نسبة بين أعداد صحيحة، فإذا كانت فرضية الانقسام اللامتناهي كاذبة، فهذا يعني أن الضلع والقطر يمكن حلهما إلى أجزاء صغيرة، وستكون النسبة بين المقدارين عندئذ تعبر عن النسبة بين عدد الأجزاء في الضلع والفطر، أي نسبة بين أعداد صحيحة[٨٤].

ومن ثم، اقترح بيركلي أن تكون النهاية الصغرى الحسية هي أساس الهندسة، وأن تؤدي الدور الذي أدته النقطة في الهندسة الاقليدية. وليس من الغريب أن تتعارض هندسة بيركلي مع هندسة إقليدس. ويتمثل أصل هذا التعارض في حقيقة أن بيركلي يرى أن الخطوط والأشكال مُركبة من مجموعات متناهية من النهايات الصغرى. بينما الهندسة الاقليدية تستلزم أن تتركب الخطوط والأشكال من عدد لا متناه من النقاط[٨٥].

يترتب على ذلك، أنه ينبغي أن تعد الهندسة علمًا تطبيقيًا عمليًا، وذلك على عكس الجبر الذي يعد بمثابة العلم البحت الوحيد لأنه يتعامل مع العلامات المجردة من أشياء ملموسة. وقد تعد الهندسة تطبيقًا لكل من الحساب والجبر على النقاط – أو النهايات الصغرى الحسية – التي تمثل الواقع الملموس بأكلمة، ويشير بيركلي إلى صعوبة تخيل "النهايات الصغرى" بسبب عدم اعتيادنا على

ملاحظتها بشكل منفصل. فأثناء القراءة، لا نلاحظ عادة كل حرف على حده، ولكن الكلمات والصفحات يمكن تحليلها إلى هذه الحروف الصغيرة[٨٦].

هكذا، تعد الهندسة علمًا تطبيقيًا يتعامل مع المقادير المتناهية التي تتركب من نهايات صغرى غير قابلة للانقسام [٨٧].

إذا تم تبنى ذلك التصور عن الهندسة، يترتب على ذلك – وفقا لما يراه بيركلي – أن كل الخطوط ليست قابلة للتنصيف، ولكن الخطوط التي تتركب من عدد زوجي من النقاط هي التي يمكن تقسيمها إلى نصفين. فإذا كانت النقاط التي يتركب منها الخط عددها فردي (وبافتراض إمكانية التنصيف) فإن خط التنصيف لابد من أن يمر عبر نقطة المنتصف. ولكن علما بأن النقطة غير قابلة للانقسام، فإن الخط بالتالي لا يمكن تنصيفه[٨٨].

إلا أن بيركلي اقترح – لأسباب عملية – إمكانية تقسيم الخطوط غير القابلة للتنصيف (مثل تنصيف خط يتكون من خمس نقاط) إلى جزئيين أحدهما يتكون من ثلاث نقاط والآخر يتكون من نقطتين، ونظرا لأن النهاية الصغرى الحسية ضئيلة وصغيرة جدًا، فلن يكون ثمة اختلاف عملي إذا قلنا إن الخطين متكافئان تقريبا[٨٩].

لعل هذا الاقتراح الذي قدمه بيركلي قد جاء نتيجة لتأثره بمنهج تجاهل الاختلافات neglecting differences الموجود في علم الحساب التحليلي. فإذا كانت الاختلافات التي تمثل شيء ما يمكن التغاضي عنها في ظل ظروف بعينها في الحساب التحليلي، خاصة وأن الأخطاء الناتجة ستكون طفيفة جدا بحيث إنها لن تؤثر على منفعة الهندسة والتي يجب أن نتذكر جيدًا أنها علم تطبيقي عملي[٩٠].

علمًا بأن موضوع الهندسة هو الأشكال المدركة المركبة من نهايات صغرى حسية، متناهية، وغير قابلة للانقسام، فإنه يترتب على ذلك عديد – من منظور بيركلي – من النتائج في الهندسة أولها:–

يمكن تربيع الدوائر Circles وذلك خلال القطر الذي يمر بمنتصفها ويحدد محيطها، فإذا عرفنا المحيط يمكن إيجاد القطر بين w^{ch} & y^{e} حيث لا يوجد أي اختلاف يمكن إدراكه. إن كون الامتداد عبارة عن إدراك، وأن الإدراك غير ملحوظ، فإن هذا يعد تناقضًا، ولا شيء. بل إن استخدام النظارات المعظمة لملاحظة الاختلاف لن يجدي. ففي هذه الحالة y^{e} ثمة اختلاف حقيقي ملحوظ، ولكن ليس بين الأفكار ذاتها، وإنما بين أفكار أخرى مختلفة كليا [٩١].

وثانيها:–

يمكن حساب قطر diagonal مربع ما خلال ضلعه side حيث إن كليهما يحتوي على عدد متناه من النهايات الصغرى الحسية[٩٢].

وثالها:–

لا يمكن أن يكون المربع ضعف لآخر، وبالتالي فإن مبرهنة فيثاغورس كاذبة [٩٣].

إن سبب تلك النتائج هو أنه ينبغي – في الهندسة – أن تحتوي كل هذه الأشكال المدركة المتناهية على عدد صحيح من النهايات الصغرى المدركة.

وبالتالي فإن العلاقات الخاصة بالأشكال المدركة المتناهية يمكن وصفها خلال الأعداد المنطقية والحقيقية فقط، يقول بيركلي في ذلك إنه:-

> **يمكن تحديد أي ضلع من أضلاع المربع في صورة أعداد، لنفرض أنك أخبرتني أن ضلع المربع هو ١٠، فسوف أتساءل هل ١٠ أقدام أو ١٠ بوصات ... إلخ. أم ١٠ نقاط. اذا كانت الإجابة هي الأخيره، فسوف أنكر وجود مثل هذا المربع؛ فمن المستحيل لعشر نقاط أن تكون مربعًا أما إذا كانت الإجابة هي الأولى أي ١٠ أقدام أو ١٠ بوصات، فقم بتحليل هذه العشرة أقدام أو بوصات إلى نقاط وستجد أن العدد الناتج من النقاط لابد بالضرورة أن يكون عددًا مربعًا ويمكن عندئذ بسهولة تحديد ضلعه[٩٤].**

بناء على ما ورد بالفقرة السابقة، فمن المستحيل – من منظور بيركلي – استخدام أعداد غير منطقية في الهندسة ولا يمكن اتخاذها موضوعا لها.

وختاما، أجاب بيركلي على الاعتراض الذي يشير إلى أن اقتصار الهندسة على التعامل فقط مع الأشكال المتناهية يدمر أسس ذلك العلم بقوله:-

> **إن كل ما هو مفيد في الهندسة ويعمل على تعزيز الفائدة في الحياة البشرية يظل كما هو ثابت دون تغيير في ضوء مبادئنا، وعلم الهندسة يعد علمًا تطبيقيًا عمليًا وسيحظى بمكانة مميزة [٩٥].**

خاتمة

يتضح مما سبق أن بيركلي كان لديه فلسفة محددة عن الهندسة، حيث يعد نقده للأفكار المجردة ونظريته عن التعميم التمثيلي بمثابة أساس فلسفته عن الرياضيات بصفة عامة والهندسة بصفة خاصة.

وفيما يتعلق بالسؤال عن طبيعة موضوع الهندسة لدى بيركلي، فقد كان يرى أنه دراسة للأشكال المدركة حسيًا، الملموسة وليست المرئية؛ حيث إن الأشكال المرئية تعد علامات على موضوع الهندسة الرئيس، والمتمثل في الأشكال الملموسة.

يتم الحكم على حقائق الهندسة – من منظور بيركلي – وفقًا للحواس؛ والتي يجب استخدامها للحكم على الخطوط والأشكال الهندسية، والتي نظر إليها من زاوية محددة وهي وجودها الحسي أو القابل للإدراك الحسي. والذي يتم بصورتين، إما بصورة مباشرة بواسطة الحواس، أو بصورة غير مباشرة بواسطة العقل والتأمل.

وفي ذلك قال بيركلي قولته المأثورة "ما يوجد هو ما يدرك" – والذي يعد في نظره نقيض لمبدأ التجريد – فالأشياء لا توجد بفضل إدراكي لها، بل توجد حتى وإن لم أدركها، إذ قد يدركها إنسان آخر حين لا أدركها أنا.

وفيما يتعلق بالسؤال عن إمكانية تقسيم موضوع الهندسة والمتمثل في الأشكال الحسية الملموسة بشكل لا متناه، فقد اتضح أنها تتركب من مجموعات من النقاط والتي يعدها بيركلي أجزاء متناهية الصغر – أي أصغر شيء ممكن إدراكه – تسمى بالنهايات الصغرى الحسية، والتي من المستحيل أن تكون قابلة

للانقسام بشكل لا متناه؛ لأنه في هذه الحالة سيكون ثمة شيء ما تعجز حواسنا عن إدراكه، وهذا ما عده بيركلي ببساطة تناقضًا.

الهوامش

(١) George Berkeley (١٦٨٥ – ١٧٥٣): ولد في مقاطعة كيلكيني Kilkenny بدولة أيرلندا، ودرس في كلية ترينيتي بجامعة دبلن عام ١٧٠٠ حيث حصل على الدرجة الجامعية الأولى عام ١٧٠٤، وبعد تخرّجه بثلاثة أعوام حصل على درجة الماجستير وأصبح زميل في كلية ترينيتي عام ١٧٠٧م . ثم عُين عميد لكاتدرائية ديري عام ١٧٢٤م. ثم تم تنصيبه أسقفًا لكلوين عام ١٧٣٤م، وفي عام ١٧٥٣م توفّي بعد مدة قصيرة من انتقاله إلى مدينة أكسفورد برفقة عائلته. من أهم مؤلفاته:-

- Berkeley, G. (1709): An Essay Towards a New Theory of Vision, Dublin: Aaron Rhames.
- Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, With Prolegomena, and with Annotations, Select, Translated, and Original by: Krauth, C. P. (1881), Philadelphia, J.B. Lippincott & Co.
- Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, Edit By: Luce, A. A. (1944), New York: Thomas Nelson and Sons Limited.
- Berkeley, G.: De Motu and the Analyst, A Modern Edition, with Introductions and Commentary, Edit and translated by: Jesseph, D. M. (1992), Springer Netherlands.
- Berkeley, G. (1734): Three Dialogues between Hylas and Philonous, Edit by: McCormack, T. J. (1906) Chicago: The Open Court Publishing Company.

(٢) كانت الرياضيات في عهد بيركلي هي علم المجردات، وكان كل المفكرين يرون أن موضوعات البحث الرياضي تتمثل في نتاج الفكر البشري والناتجة عن تجريد السمات غير الملائمة، وعلى عكس المذهب الأفلاطوني البحت الذي يرى أن الموضوعات الرياضية تتمثل في مجال لا مادي من الصور، أو النظرية الاسمية التي تنكر على المصطلحات

الرياضية أي إشارة خارج نطاق اللغة، فإن الفلسفة التجريدية ترى أن موضوعات الرياضيات تتمثل في تيار من التصورات الناشئة عن طريق الفكر.

وتعود جذور الفلسفة التجريدية في الرياضيات إلى أرسطو، حيث استخدمها بوصفها بديلًا لنظرية الصور الأفلاطونية وفي رفضه لوجود الموضوعات الرياضية في تيار من الصور، أو أنها بمثابة وسيط بين العالم المادي والمجال الصوري، اضطر أرسطو لتفسير طبيعة الموضوعات الرياضية بشكل يجعلها لا تعتمد بشكل قريب على سمات بعينها في العالم الواقعي.

ومن الواضح أن حقائق الهندسة لا يجب أن تعتمد على وجود موضوعات مادية تجيب بشكل محدد على التعريفات التي يستخدمها الهندسيين، كما يبدو أنه ليس ثمة أمل في تطوير نظرية عن الحساب يتم التعامل فيها مع الأعداد على أنها موضوعات أو أشياء مادية واقعية.

ولقد كانت وسيلة أرسطو للتحايل على هذه الصعوبات هي التصريح بأن موضوعات البحث الرياضي تبدأ بإدراكنا للعالم المادي ولكنها تتولد خلال عملية تجريدية. وثمة بعض الصعوبات المرتبطة بتحديد المقصود بكلمة "تجريد" ولكن هذا يبدو واضحًا في أن التجريد يتمثل في الإزالة العقلية لجوانب بعينها من الأشياء أو الموضوعات الحسية. ولتجريد موقع شجرة – على سبيل المثال – فهذا يعني أن نفكر في الشجرة، ليس بوصفها شجرة داخل حديقة، وإنما ندركها دون الإشارة إلى موقعها أو أي شيء يحيط بها. وفي مجال الرياضيات، يعد تعريف إقليدس للخط على أنه "طول لا اتساع له أو لا عرض له" تجريدا يقوم فيه الفكر بفصل فكرة الطول عن العرض، وهكذا يصبح لدينا موضوع يتلاءم مع علم الهندسة. أنظر في ذلك:-

Jesseph, D. M.: Berkeley’s philosophy of mathematics, in: Winkler, K. P. (2005): The Cambridge Companion to Berkeley, New York: Cambridge University Press, pp. 268 - 269.

(3) Jesseph, D. M.: Op. Cit, p. 277.

(4) Ibid, p. 277.

(5) Berkeley, G.: An Essay Towards a New Theory of Vision, p. 145.

(6) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p.178.

(7) Berkeley, G.: Three Dialogues between Hylas and Philonous, pp.54 – 55.

(8) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p.212.

(9) Berkeley, G.: Three Dialogues between Hylas and Philonous, p. 100.

(10) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p.194 – 195.

(١١) إن ثمرة التين الشوكي – على سبيل المثال – يصل لونها إلى العقل عن طريق البصر، ورائحتها عن طريق الشم، وطعمها عن طريق التذوق، وملمسها عن طريق اللمس، ولو تناول هذه الثمرة شخصًا كفيف البصر فإنه سيدرك كل صفاتها عدا لونها. ومن ثم، ففكرة التين الشوكي ليس لها معنى في الوجود خارج العقل.

(12) Ibid, p. 196.

(13) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 539, p. 187 – 189.

(١٤) أكد بيركلي على هذا التصور في كتابه المحاورات إذ يقول:-

> اسأل البستاني لماذا يعتقد بوجود شجرة الكرز في الحديقة، وسيخبرك لأنه يراها ويلمسها وبكلمة واحدة يدركها بحواسه. ثم اسأله لماذا يعتقد بعدم وجود شجرة البرتقال، وسيخبرك لأنه لا يدركها بحواسه. وعلى ذلك، فالشيء الذي له وجود عنده هو الذي يدركه بحواسه، أما ما لا يدركه فهو غير موجود.

أنظر في ذلك:-

- Berkeley, G.: Three Dialogues between Hylas and Philonous, p. 96.

(15) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p.194 – 195.

(١٦) صاغ بيركلي هذه العبارة باللغة اللاتينية – وليس الإنجليزية – حيث كان ذلك تقليدًا متبعًا لدي كل المفكرين في القرن السابع عشر؛ فقد نشرت مؤلفات عديدة باللغة اللاتينية في تلك الفترة، لعل أبرزها مؤلف إسحاق نيوتن "المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية" Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.

(17) Ibid, p. 195.

(18) Ibid, p. 263.

(19) Ibid, pp. 175 – 176.

(20) Berkeley, G.: An Essay Towards a New Theory of Vision, p. 154.

(21) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, pp. 196 – 198.

(22) Ibid, p.216.

(٢٣) على سبيل المثال؛ يعد لون مرة المانجو (اللون الأصفر) هو الموضوع المدرك بشكل مباشر بواسطة حاسة البصر، إلا أنه من الممكن تخيله عن طريق حاسة السمع (سماع كلمة أصفر) ورغم أن هذا الصوت هو الموضوع المدرك بشكل مباشر عن طريق حاسة السمع (وليس حاسة البصر)، فإنه يوحي للعقل بموضوع البصر.

(24) Berkeley, G.: An Essay Towards a New Theory of Vision, p. 6.

(25) Ibid, p. 125.

(26) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p.217.

(27) Berkeley, G.: An Essay Towards a New Theory of Vision, pp. 150 – 151.

(28) Ibid, p. 125.

(٢٩) في السياق نفسه، أشار بيركلي إلى مشكلة الإدراك غير المباشر للأفكار المركبة خلال المثال التالي بقوله:-

رجل ولد أعمى ثم استطاع الرؤية عندما تقدم به العمر، هذا الرجل عند أول فعل رؤية له لن يضع أفكار الرؤية في المجموعات المميزة نفسها التي يضعها فيها الآخرون، والذين تعلموا من الخبرة ما الأشياء التي تتواجد معا في وقت واحد وربما تجتمع أيضا تحت مسمى واحد.

إن حل تلك المشكلة – من منظور بيركلي – هو أن الروابط بين أفكار الرؤية وأفكار اللمس يمكن أن تتحقق بعد التعرض للخبرة الكافية التي تجعل الأفكار البسيطة لكلا الحاستين تتواجد معًا بانتظام وتندرج تحت مسمى واحد. أنظر في ذلك:-

- Ibid, p. 128.

(30) Ibid, p. 125.

(31) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 227, p. 71.

(32) Ibid, 101, p. 27.

(33) Ibid, 297, p. 97.

(34) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, pp.216 – 217.

(35) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 49, p. 13.

(36) Berkeley, G.: An Essay towards a New Theory of Vision, p. 181.

(37) Ibid, p. 174.

(٣٨) حيث لا تتضمن اللغة العادية كلمات مختلفة لهما، فعلى سبيل المثال نقول القدم الملموسة والقدم المرئية.

(39) Ibid, p. 166.

(40) Ibid, pp. 167 – 168.

(41) Ibid, p. 169.

(42) Ibid, p. 181.

(٤٣) ثمة اختلاف في درجة التجريد الموجودة في كل من الحساب والهندسة؛ فمبرهنات الحساب (رغم كونها تتعلق بموضوعات في العالم) تهتم بأي العلامات التي يمكن تركيبها

بشكل يتوافق مع القواعد الحسابية. وعلى عكس الهندسة، فلا يوجد افتراض مسبق بأن العلامات الحسابية تشبه الأشياء التي تشير إليها وتمثلها. إن عدم وجود التشابه بين العلامة وما تشير إليه يُوجِد عنصر العشوائية أو المواضعة في اختيار العلامات الحسابية. الأمر الذي لا يوجد لدرجة العشوائية والمواضعة نفسها في الهندسة. ولعل الاختلاف ببساطة يمكن عرضه على النحو التالي: فمن وجهة نظر بيركلي نستطيع اختيار ما نشاء من العلامات لتشير للأعداد، بينما لا يوجد هذا المقدار من الحرية في اختيار العلامات في الهندسة. أنظر في ذلك:-

- Jesseph, D. M.: Op. Cit, p. 289.

(44) Jesseph, D. M.: Op. Cit, p. 290.

(45) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, pp. 258 – 259.

(46) Ibid, p. 186.

(47) Ibid, p. 181.

(48) Ibid, p. 181.

(49) Jesseph, D. M.: Op. Cit, p. 282.

(50) Ibid, p. 282.

(51) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p. 181

(٥٢) يعني عملية إنشاء مربع مساحته مساوية لمساحة دائرة أو شكل آخر تحده خطوط (مستقيمات أو منحنيات)؛ وتعد عملية تربيع الدائرة هي أشهر عملية تربيع.

(53) Jesseph, D. M.: Op. Cit, pp. 274 – 275.

(54) Ibid, p. 275.

(55) Ibid, pp. 275 – 276.

(56) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p. 263

(57) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 314, p. 103.

(58) Ibid, 314, p. 103.

(59) Johnston, G. A. (Jan., 1918): Berkeley's Logic of Mathematics, The Monist, Vol. 28, No. 1, p. 40.

(60) Jesseph, D. M.: Op. Cit, p. 278.

(61) Ibid, p. 276.

(62) Ibid, p. 276.

(63) Ibid, p. 276.

(64) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 70, p. 19.

(65) Berkeley, G.: An Essay towards a New Theory of Vision, pp. 59 – 60 .

(66) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 365, p. 117.

(67) Ibid, 21, p. 7

(68) Jesseph, D. M.: Op. Cit, p. 279.

(69) Ibid, p. 279.

(70) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 466, p. 155.

(71) Johnston, G. A.: Op. Cit, p. 26.

(72) Ibid, pp. 26 – 27.

(٧٣) يقدم الباحث عالم الرياضات جاليليو جاليلي Galileo Galilei (١٥٦٤ – ١٦٤٢) بوصفه نموذجًا لعلماء الرياضيات الذين قدموا حجة تؤكد على الانقسام اللامتناهي، حيث قال:-

حيث إن الخطوط وكل الكميات المتصلة قابلة للانقسام إلى أجزاء وهذه الأجزاء بدورها تكون قابلة للانقسام بشكل لا متناه، فكيف يمكن تجنب التوصل لاستنتاج أن هذه الخطوط تتركب من عدد لا متناه من الكميات القابلة للانقسام، وذلك لأن الانقسام والانقسام الفرعي الذي يمكن أن يحدث بشكل لا متناه يفترض أن يكون عدد الأجزاء لامتناهيًا، وإلا فإن الانقسام الفرعي سيصل إلى نهاية ويتوقف، وإذا كانت الأجزاء متناهية من حيث العدد، فيجب أن نستنتج أنها ليست متناهية من حيث الحجم، وذلك لأن العدد اللامتناهي للكميات المتناهية ينتج عنه مقدار غير متناه. وهكذا تكون لدينا كمية متصلة تتركب من عدد لا متناه من الأجزاء غير القابلة للانقسام.

أنظر في ذلك:-

- Galilei, G.: Dialogues Concerning Two New Sciences, Translated from the Italian and Latin Into English By: Crew, H. & De Salvio, A., Introd. By: Favaro, A. (1914), New York: The Macmillan Company, pp. 33 – 34.

(74) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 247, p. 77.

(75) Ibid, 247, p. 77.

(76) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p. 266.

(77) Berkeley, G.: De Motu and the Analyst, A Modern Edition, with Introductions and Commentary, Edit and translated by: Jesseph, D. M. (1992), Springer Netherlands, p. 213.

(78) Johnston, G. A.: Op. Cit, p. 26.

---

(79) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, pp. 264 – 265.

(80) Ibid, p. 265.

(81) Jesseph, D. M.: Op. Cit, pp. 279 – 280.

(82) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 248, p. 77.

(83) Jesseph, D. M.: Op. Cit, p. 280.

(84) Ibid, p. 280.

(85) Ibid, p. 280.

(86) Johnston, G. A.: Op. Cit, pp. 27 – 28.

(87) Ibid, p. 28.

(88) Ibid, p. 28.

(89) Ibid, p. 29.

(90) Ibid, pp. 29 – 30.

(91) Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, 249, p. 77.

(92) Ibid, 258, p. 79.

(93) Ibid, 500, p. 173.

(94) Ibid, 469, p. 157.

(95) Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, p. 267.

مصادر البحث

1. Berkeley, G. (1709): An Essay Towards a New Theory of Vision, Dublin: Aaron Rhames.
2. Berkeley, G.: A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, With Prolegomena, and with Annotations, Select, Translated, and Original by: Krauth, C. P. (1881), Philadelphia, J.B. Lippincott & Co.
3. Berkeley, G.: De Motu and the Analyst, A Modern Edition, with Introductions and Commentary, Edit and translated by: Jesseph, D. M. (1992), Springer Netherlands.
4. Berkeley, G.: Philosophical Commentaries, Edit By: Luce, A. A. (1944), New York: Thomas Nelson and Sons Limited.
5. Berkeley, G. (1734): Three Dialogues between Hylas and Philonous, Edit by: McCormack, T. J. (1906) Chicago: The Open Court Publishing Company.

مراجع البحث

6. Galilei, G.: Dialogues Concerning Two New Sciences, Translated from the Italian and Latin Into English By: Crew, H. & De Salvio, A., Introd. By: Favaro, A. (1914), New York: The Macmillan Company, pp. 33 – 34.
7. Jesseph, D. M.: Berkeley’s philosophy of mathematics, in: Winkler, K. P. (2005): The Cambridge Companion to Berkeley, New York: Cambridge University Press.
8. Johnston, G. A. (Jan., 1918): Berkeley's Logic of Mathematics, The Monist, Vol. 28, No. 1, pp. 25-45.

George Berkeley's philosophy of geometry

An article in the philosophy of mathematics

Abstract

Berkeley's philosophy is based on the denial of abstraction and abstract thought, and consequently, he views object of geometry as the study of forms perceived in a tangible, sensible way. Therefore, the existence of something cannot be proven unless it is tangibly perceptible. In this domain, Berkeley cited his famous statement: "Their *esse is percipi*" - which runs counter to the principle of abstraction - as things do not exist depending on my perception of them, rather, they exist even if I do not perceive them, since another person may perceive them when I do not.

The subject of geometry is not infinitely divided - from Berkeley's perspective - since perceiving the infinite falls beyond the capacity of the human mind. For this reason, Berkeley introduced the idea of Minimum and pointed out that all geometric Figures are composed of a group of points, which Berkeley deems as Minimum - that is, the smallest possible thing, called Minimum sensibile, which are impossible to be infinitely divisible. Hence, Berkeley proposed that the Minimum sensibile end be the basis of geometry.