تقدير نموذج ARMA الدوري (PARMA) مع نموذج GARCH الدوري المختلط (M-PGARCH) بالتطبيق على بيانات سعر صرف الجنية المصري مقابل الدولار الأمريكي

أ.د. مرفت طلعت المحلاوى

استاذ الاحصاء التطبيقى

كلية التجارة – جامعة دمياط

أ.م.د. آمـال السيد مبارك

استاذ الاحصاء التطبيقى المساعد

كلية التجارة – جامعة دمياط

أ.م.د. محمد ابراهيم محمد أحمد

أستاذ الاحصاء الرياضى المساعد

كلية التجارة – جامعة دمياط

طارق يحيى يوسف العربانى

مدرس مساعد – قسم الإحصاء التطبيقي

كلية التجارة – جامعة دمياط

المستخلص:

يهدف البحث الى بناء نموذج الانحدار الذاتي – المتوسط المتحرك الدوري Periodic Autoregressive Moving Average(PARMA) الامثل لنمذجة التقلبات الموسمية في الوسط والانحراف المعياري وهيكل الارتباط، كما يهدف الى تقليل عدد معالم النموذج المُقدر من خلال تقدير المعالم لنموذج PARMA باستخدام تحويلة فورير المتقطعة Discrete Fourier Transform . كذلك تهدف الدراسة الى بناء نموذج GARCH الدوري المختلط (M-PGARCH) Mixture periodic Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedastic لنمذجة التقلبات الدورية من أجل التقاط النمط الدوري في التباين والتغيرات المفاجئة للنظام والتفرطح والانحراف الزائد بالإضافة الى تحسين نموذج PGARCH عن طريق نمذجة k من عمليات التقلب الدورية على التوازي وذلك باستخدام نموذج M-PGARCH. كما يهدف البحث الى تحسين وصف البيانات المالية عن طريق استخدام نموذج PARMA مع نموذج M-PGARCH لالتقاط التقلبات الخطية وغير الخطية وفحص التقلبات الدورية للتباين المشروط وغير المشروط. وقد تم استخدام البيانات التاريخية الشهرية لسعر صرف الجنية المصري مقابل الدولار الامريكي لما لبيانات اسعار الصرف من اهمية كبيرة على الاقتصاد بشكل عام وكذلك لطبيعة تقلباتها الدورية والتي تمثل مشكلة يسعى البحث لحلها. وأشارت النتائج الى أن نموذج M-PGARCH قادر على التقاط التغيرات المفاجئة في التباين بشكل جيد وبشكل أكثر مرونة وأكثر اختزالاً parsimonious. وبالمقارنة بين استخدام نموذج PARMA فقط لوصف البيانات وبين استخدام نموذج PARMA مع نموذج M-PGARCH نلاحظ أن نموذج PARMA كان ينقصه الوصف الدقيق للتغيرات الدورية في البواقي والتي لم تكن ساكنة، خاصة مع البيانات المالية. ان استخدام نموذج M-PGARCH مع نموذج PARMA يمنحه ميزه اضافية وهي القدرة على التقاط تلك التغيرات والتقلبات الدورية في البواقي وهذا ما استطاع نموذج M-PGARCH تطبيقه بشكل جيد وكذلك وصف الخليط الدوري لتلك التقلبات بشكل دقيق مما يسمح لنا بفهم أعمق لطبيعة البيانات المالية المستهدفة.

الكلمات المفتاحية:

الانحدار الذاتي –المتوسط المتحرك الدوري، PARMA، تحويلة فورير المتقطعة، خوارزمية تعظيم التقدير، الانحدار الذاتي الدوري المعمم المشروط بعدم تجانس التباينات، PGARCH، خليط GARCH الدوري، M-PGARCH.

Estimation of the periodic ARMA model (PARMA) with the mixture periodic GARCH model (M-PGARCH) using data of the Egyptian pound exchange rate against the US dollar

Amaal El Sayed Mubarak
Associate Professor of Applied Statistics Faculty of Commerce - Damietta University

Mervat Talaat El Mahalawy
Professor of Applied Statistics Faculty of Commerce - Damietta University

Tarek Yehia Yousef Elorbany
Assistant Lecturer Faculty of Commerce - Damietta University

Mohamed Ibrahim Mohamed Ahmed
Associate Professor of Mathematical Statistics Faculty of Commerce - Damietta University

Abstract:

The research aims to build the optimal Periodic Autoregressive-Moving Average (PARMA) model to model seasonal variations in the mean, standard deviation, correlation structure, model order determination, and parameter estimation of the PARMA model using the Discrete Fourier Transform to reduce the number of parameters in the estimated model. As well as developing the Mixture Periodic GARCH (M-PGARCH) model to capture the periodic variance, sudden changes in the system, kurtosis, and skew, and improving the PGARCH model by modelling k of periodic fluctuations in parallel using the M-PGARCH model, and improving the description of financial data using the PARMA model with the M-PGARCH model to capture linear and nonlinear fluctuations and examine the periodic fluctuations of conditions, Monthly historical data of the exchange rate of the Egyptian pound against the US dollar has been used because of the great importance of exchange rate data on the economy in general as well as the periodic fluctuations of the data, which represent a problem that the search seeks to solve. The results indicated that the M-PGARCH model can capture the phenomenon of sudden changes in variance very well, more flexibly and more parsimoniously, as there are a lot of estimated parameters whose value goes to zero. Comparing the use of the PARMA model only to describe the data with the use of the PARMA model with the M-PGARCH model, we note that the PARMA model needed an accurate description of the periodic changes in the residuals that were not well stationary, especially with the financial data, and hence the use of the M-PGARCH model with the PARMA model gives it the extra advantage of being able to capture those changes and periodic fluctuations in the residuals, and this is what the M-PGARCH model was able to apply well as well as describe the periodic mixture of those fluctuations accurately, which allows us a deeper understanding of the type of the target financial statements.

Keywords: PARMA, Periodic Autoregressive Moving Average, PGARCH, Periodic Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedastic, Expectation Maximization Algorithm, EM Algorithm, Discrete Fourier Transform, DFT, M-PGARCH, Mixture periodic Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedastic.

1- المقدمة

تعد تحركات أسعار الصرف مقابل الدولار الأمريكي عاملاً مهمًا في تشكيل التوقعات في أسواق المال والاقتصاد حيث يتم تسعير حصة كبيرة من الائتمان والتجارة والديون بالدولار. وعادة ما ترتبط التقلبات المفاجئة في أسعار الصرف في الأسواق الناشئة بتدفقات رأس المال الخارجة، وتشديد شروط التمويل، وزيادة عدم الاستقرار المالي. وقد ساهمت السلاسل الزمنية بدور كبير فى نمذجة الكثير من الظواهر الاقتصادية والمالية. حيث يوجد فى الواقع العملي الكثير من نماذج السلاسل الزمنية التي يمكنها تحليل ذلك النوع من البيانات، مثل نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية (ARIMA) ونماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية الموسمية (SARIMA) كما في Hamilton (1994) ونماذج السلاسل الزمنية الدورية PARMA كما في(Franses and Paap (2004 . وتسمح نماذج PARMA لمعالم ARMA بالتغير وذلك بتغير الموسم، كما ان نماذج PARMA تصف بوضوح التقلبات الموسمية في الوسط والانحراف المعيارى وكذلك في هيكل الارتباط الذاتي، وبناء على ذلك فانها تكون مفيدة في توليد نماذج أكثر مصداقية. وظهرت نماذج PARMA في (Gladyshev (1961) and Jones and Brelsford (1967. كما القى كتاب Franses and Paap (2004) نظرة عامة على تلك العائلة من النماذج بشكل جيد، وقد تم تطوير تطبيقات على بيانات تدفقات الأنهار في كتاب Hipel and McLeod (1994). كما تناولت الكثير من التطبيقات العملية نموذج PARMA بالدراسة كما في McLeod(1994) , Anderson et al.(2007) and Bowers et al.(2012) و ذلك بالتطبيق على بيانات التدفقات النهرية أو البيانات المالية أو ما شابهها من بيانات حيث تظهر هذه البيانات عادة تغيرات موسمية في المتوسط والانحراف المعيارى وهيكل الارتباط الذاتي , وهذا ما يجعل نماذج PARMA هي الأنسب للتعامل من تلك البيانات. وكما هو معلوم في التحليل القياسي التقليدي أن تباين حد الخطأ العشوائي يفترض أن يكون ثابتاً عبر الزمن وهو ما يعرف بفرضية ثبات التباين(homoscedasticity assumption) ، ولكن في البيانات المالية والاقتصادية غالبا لا يتحقق هذا الشرط حيث تظهر التقلبات وكذلك إختلافات التباين خلال فترات السلسلة المختلفة. وتعرف فترات التقلب في العرف المالي بفترات المخاطرة أو عدم التأكد، ومعروف في التحليل المالي أن فترات المخاطرة (وهي التقلب الكبير او التباين الكبير) تتركز في فترات معينة ويعقبها فترات أقل تقلبا (أقل تباين) و هي كذلك تتركز في فترات معينة، وهذه الأنماط تعرف لدى المحللين الماليين بفترات الرواج (wild) وفترات الركود.(calm) وعلى ذلك فان تحقق فرضية ثبات التباين في الغالب تكون

غير متحققة. وبالتالي فإنه من الأفضل في هذه الحالة فحص نمط هذا التقلب في تباين البواقى لمعرفة هل هذا التباين يعتمد على سلوكه التاريخي أو الزمني، أي فحص التباين المشروط (conditional variance) لبواقى النموذج تحت الدراسة.

وكان أول من قدم هذه الفكرة (1982)Engl في بحثه حول تقدير تباين التضـــــخم في المملكة المتحدة وقد أدى هذا النوع من النمذجة إلى تحول كبير وظهرت نماذج مختلفة في هذا الإطار منها نموذج (Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedastic) واختصـــاره (GARCH). وقد تم إقتراح العديد من الامتدادات لنمذجه التغيرات فى التباين أو التقلب بشكل عام (وتباين بواقي السلسلة بشكل خاص)، من أجل وصف سلسلة البيانات المالية بشكل حقيقي ووصف التغيرات المفاجئة فى النظام وكذلك وصف التفرطح الزائد وعدم التماثل ودورية التباين العشوائي الشرطي. الا أن معظم الصيغ المقترحة تتعامل مع معالم التقلب الثابتة وبالتالى لا يمكنها تفسير سلوك السلسلة الزمنية التى تعرض تقلب له ارتباط دوري، حيث لا يمكن حســابه باستخدام نماذج الخلط ذات المعالم الثابتة (غير المرنة)، كما أن الكثير من الدراسـات أظهرت أن معظم عوائد الاصـول وأسـعار الصـرف تُظهر أنماط موسـمية سـواء كانت فى شكل يومى أو إسـبوعى أو شـهرى أو سـنوى أو حتى تأثيرات العطلات الرسـمية. وقد أدت هذه الملاحظات إلى تطوير بعض نماذج الخلط التي تتضــمن خاصــية الدورية، ومنها Bentarzi and Hamdi (2008a,b) حيث تم عرض نموذج "MPARCH" (Mixture Periodic ARCH) والذى يضـــيف الدورية إلى معالم النموذج حتى يمكن اسـتيعاب الأنماط الديناميكية للتقلبات المشـروطة بشـكل كامل، وذلك عن طريق خلط عدد k من مكونات PARCH، وهذا يعنى أن تكون رتب مكونات الخلط كبيرة جداً ويترتب عليه وقت أكبر لتقدير معالم النموذج. ولذلك فقد قدم Hamdi and Souam (2017) فئة أخرى من نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية وهى أكثر مرونة ومقننه أكثر بالمقارنة بنموذج MPARCH ألا وهى نماذج M-PGARCH.

ولقد تعددت الدراسات التي توظف السلاسل الزمنية الدورية لنمذجة مجموعات مختلفة من البيانات في مجالات الاقتصاد والهندسة الكهربية والبيانات المالية والمناخ والهيدرولوجيا وغيرها ومن الدراسات الهامة في هذا المجال، Lund and Basawa (2000), Basawa and Lund (2001) and Lund et al (2006) , Ursue and Turkman (2012). ولقد كان من أوائل من قدم هذه النماذج الإحصائية كلاً من Pagano (1978) و Troutman (1979) حيث قاما بفحص الخصائص الأساسية لعمليات الإنحدار الذاتي الدوري وحيد المتغير وأساليب الاستدلال الإحصائي لتقدير المعالم والتنبؤ وقدم Meleod (1994)

وصفا كاملاً للمراحل الأساسية لبناء نماذج PAR وحيدة المتغير المتمثلة في مرحلة التحديد, التقدير , الفحص و التشخيص. كما تناول Akgün (2003) تحديد التغير الدورى عن طريق تحديد رتب نماذج PARMA وحيدة المتغيرحيث تم تحديد الرتب المختلفة لنماذج PARMA بتعميم الطرق المعروفة في أسلوب بوكس- جينكنز Box-Jenkins، وقد أخذ في الاعتبار تحديد كلاً من نماذج PARMA ونماذج PAR فقط وقد إستُخدم لتحديد النموذج الرسم البياني لدالة الارتباط الذاتي الدورى (PeACF) ودالة الارتباط الذاتى الدورى الجزئى (PePACF). ولتقدير النموذج إستُخدمت طريقة المربعات الصغرى الشرطية LSE والتى طبقت على نماذج PAR حيث أن التقدير يكون معقد جداً وصعب ونتائجة تكون غير مرضيه عند إضافة عنصر المتوسط المتحرك MA إلى النموذج. كما قدم Tesfaye (2005) دراسة استعرضت خطوات تحديد نموذج PARMA لتمثيل بيانات التدفق النهري. بينما تناول Lund etal. (2006) دراسة أساليب تقدير نماذج السلاسل الزمنية الدورية ذات اقل عدد ممكن من المعالم "Parsimonious PARMA models" وذلك بالنسبة لبيانات درجات الحرارة اليومية في بعض الولايات الامريكية. ونظراً لما تواجه نماذج PARMA من صعوبة كبيرة عند تقدير المعالم للبيانات عالية الدقة مثل البيانات الاسبوعية او اليومية نظراً للعدد الكبير للمعالم، و للحصول على نماذج مختصرة المعالم "Parsimonious" اقترح Tesfaye etal. (2010) استخدام تحويلة فوريير المتقطع discrete Fourier transform (DFT) لتمثيل معالم نموذج PARMA وأوضحت النتائج ان النموذج المقترح خفض المعاملات من 24 الى 8 مما يوفر نموذج اكثر تخفيض و اكثر دقة. كما أوضح Francq etal. (2011) بعض من الخصائص التقريبية لمقدرات المربعات الصغرى المرجحة "Weighted Least Squares" (WLS) لنماذج PARMA مع أخطاء غير مترابطة ولكنها غير مستقلة حيث أوضحت الدراسة أن مقدرات WLS لنماذج PARMA تكون متسقة بقوة وتقريباً طبيعية. وامتدت الدراسة الى ما ذكره Basawa and Lund (2001) لتقدير المربعات الصغرى لنماذج PARMA مع أخطاء مستقلة ويتضح أن مصفوفة التغاير التقريبية لمقدرات WLS التي تم الحصول عليها في ظل أخطاء غير مستقلة تختلف تماما عن تلك التي تم الحصول عليها في ظل أخطاء مستقلة. كما قدمت الدراسة أمثلة للمحاكاة والتي أوضحت الأهمية العملية للنتائج كما تم التطبيق على بيانات مالية.

ولزيادة القدرة على تحديد رتب نموذج PARMA المناسبة بشكل أكثر دقة اقترح Ursu and Turkman (2012) استخدام الخوارزميات الجينية بالاعتماد على معيار بيز للمعلومات BIC والذي يستخدم لتحديد رتب نموذج الانحدار الذاتي الدوري PAR. وتم مقارنة النموذج المقترح و المحدد باستخدام الخوارزميات الجينية GA مع نموذج PAR المحدد بالطريقة التقليدية والذى اقترحه

Mcleod (1994) و أثبتت الدراسة ان استخدام الخوارزمية الجينية GA يزيد من دقة النموذج. كما تم توضيح إجراءات التنبؤ لنماذج PARMA عن طريق Anderson et al. (2013) حيث تم باستخدام خوارزمية الابتكار (innovations algorithm) جنباً الى جنب مع فكرة Ansley (1979) تقديم صيغة تباين الخطأ التقريبي بحيث يمكن حساب فترات تنبؤ جاوس (Gaussian prediction intervals). كما اهتمت دراسة Dudek et al. (2016) بتقدير معالم PARMA وكذلك تمثيل معالم PARMA الدورية باستخدام سلسلة فورير والتي تهدف الى تحقيق تخفيض كبير في عدد المعالم المقدرة باستخدام تمثيل فورير وذلك عن طريق اعطاء العديد من معالم فورير قيمه صفريه. كما استخدم Sarnaglia et al. (2021) مقدر M-regression لبناء مقدرات طيفية لنماذج السلاسل الزمنية كما تم توسيع هذا النهج عندما تتبع البيانات عمليات PARMA. حيث قدمت الدراسة مقداراً للمعالم بناءً على مقدر Whittle الكلاسيكي.

وكانت دراسة Bollerslev and Ghysels (1996) قد اقترحت فئة جديدة من النماذج التي تتميز بعدم التجانس المشروط الدوري، والتي صُممت لتوصيف التغير الموسمي المتكرر للعزم الثاني. وترتبط هذه الفئة الجديدة من نماذج P-ARCH، بشكل مباشر بفئة نماذج (ARMA) للوسط. حيث أن العلاقة الضمنية بين هياكل نموذج ARCH الدوري (P-ARCH) وعمليات GARCH ذات الثبات الموسمي الضعيف توثق كيف قد ينتج عن إهمال الدورية في عملية ARCH (PARCH) خسارة في كفاءة التنبؤ. وقامت الدراسة بتحديد أهمية وحجم هذه الخسارة لمجموعة متنوعة من دوال الخسارة من خلال استخدام أساليب محاكاة مونتي كارلو. كما قدم Shao (2006) نماذج خلط الانحدار الذاتي الدوري "mixture periodic AR" لملائمة نماذج السلاسل الزمنية فقد عرضت الدراسة شروط السكون لمثل تلك السلاسل كما ناقشت تطبيق خوارزمية"EM "Expectation Maximization. كما كان الهدف الرئيسي لـ Bentarzi and Hamdi (2008) هو عمل امتداد لنموذج ARCH وذلك باستخدام نموذج Mixture Periodically Correlated ARCH (MPARCH) , و كان الهدف الرئيسي وراء هذا الامتداد هو جعل النموذج متسقاً عند التفرطح العالي والقيم والأحداث المتطرفة، وفي نفس الوقت قادر على التقاط خاصية الدورية التي تظهر في هيكل الارتباط الذاتي، كما قدمت الدراسة ملائمة لنماذج MPARCH على مجموعة بيانات حقيقية و قد دعمت الدراسة التطبيقية النموذج المقدم. بينما اقترح Hamdi and Souam (2013) امتداد لنموذج دمج ARCH الدوري (*MPARCH*) ليصبح لنموذج دمج GARCH الدوري(*MPGARCH*) ، كما عرض هذا البحث بعض الخصائص الاحتمالية لهذه الفئة

من النماذج. و لقد اقترحت الدراســـة طريقة تقدير تعتمد على خوارزمية تعظيم التوقع.(EM) و لقد أوضــحت نتائج التحليل التجريبي أن نموذج الخلط المقترح يعطي أفضــل أداء بين النماذج المنافســة. وقد قدم Hamdi and Souam(2017) فئة أخرى من نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية وهى أكثر مرونة ومقننه أكثر بالمقارنة بنموذج MPARCH التى قدمت عام 2013 ألا وهى نماذج M-PGARCH . مما يسمح بتوصيف التغير الدوري وقد أوضحت الدراسة أن هذه النماذج تتسم بمرونة و كفأة أكثر مقارنة مع نماذج MPARCH ذات الرتب الاعلى. وأشـــارت النتائج التجريبية إلى أن نموذج M-PGARCH يمكن أن يسجل بشكل جيد ظاهرة التغيرات الحادة في التقلبات.

مما سبق نجد أن استخدام نماذج السلاسل الزمنية المقترحة يمكن أن يساعد في رفع كفاءة التقدير و جعل النموذج أكثر دقة و أقل في عدد المعالم مما يمكننا من مواجهة صـــعوبات مرحلة تحديد الرتبة و تقدير المعالم نظراً للعدد الكبير لمعالم نموذج PARMA. وقد تم تنظيم الاقســـام التالية من البحث على النحو التالي،

القسم الثاني يتناول تحديد الرتب وتقدير نموذج PARMA أما القسم الثالث فنستعرض فيه تمثيل معالم PARMA باستخدام تحويلة فورية المتقطعة DFT بينما يتناول القسم الرابع تقدير نموذج GARCH الدوري المختلط لبواقي نموذج PARMA المقدر وأخيراً يعرض القسم الخامس التطبيق.

2- تحديد الرتب وتقدير نموذج PARMA

يمكن تعريف نماذج PARMA من وجهتي نظر مختلفتين:

من وجهة النظر الأولى تُعتبر نمـاذج PARMA هي امتدادات دوريـة لنمـاذج ARMA غير الموسمية, بمعنى أخر يتكون نموذج PARMA من نموذج ARMA منفصل لكل موسم.

وجهة النظر الثانية لتعريف نماذج PARMA هو اعتبارها نوع خاص من نماذج ARMA متعددة المتغيرات. حيث أوصـــى Franses and Paap (2004) بأن التمثيل متعدد المتغيرات يكون مفيد للغاية لتحليل خصـــائص الاســـتقرار للنموذج و انه يمكن كتابة نماذج PARMA فى صـــيغة نماذج ARMA متعددة.

2-1- التمثيل وحيد المتغير لنموذج PARMA

Univariate Representation of PARMA model

يتكون نموذج PARMA من نماذج ARMA منفصلة لكل موسم، بافتراض أن السلسلة الزمنية وحيدة المتغير هي y_t والتي تُشاهد خلال N من السنوات، حيث أن t = 1, 2, …, NS،

ويمكن كتابة نموذج الانحدار الذاتي –المتوسطات المتحركة الدورية ذو الرتبة P , q , S ,

PARMAS(p1, q1 ; p2, q2 ; …. ; p(S) , q(S)) كما يلي :

$$y_t = \mu_v + \phi_1(v)y_{t-1} + \cdots + \phi_{p(v)}(v)y_{t-p(v)} + \varepsilon_t + \theta_1(v)\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_{p(v)}(v)\varepsilon_{t-q(v)} \quad (1),$$

أو يمكن عرض النموذج بالصورة التالية :

$$\phi_k(v)[L]\, y_t = \mu_v + \theta_k(v)[L]\varepsilon_t \quad (2)$$

حيث أن

$$\phi_k(v)[L] = 1 - \phi_1(v)[L] - \cdots - \phi_{p(v)}(v)[L^{p(v)}],$$
$$\theta_h(v)[L] = 1 + \theta_1(v)[L] + \cdots + \theta_{q(v)}(v)[L^{q(v)}]$$

وتعرف μ_v بانها معلمة تتفاوت وتتغير موسمياً. كما تمثل $[\phi_1(v), \dots, \phi_{p(v)}(v)]$ و $[\theta_1(v), \dots, \theta_{q(v)}(v)]$ معالم الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ذات الرتبة k و h على الترتيب، حيث أن h= 1, 2,…, $q(v)$, k = 1, 2,…, $p(v)$ ، والتي يمكن أن تختلف خلال الموسم v ، حيث ان $v = 1,2, \dots,$ S . كما أن السلسلة ε_t تعتبر عملية عشوائية بحتة دورية periodic white noise (PWN)، $\varepsilon_t \sim PWN(0, \sigma_v^2)$. ويمكن لرتب الانحدار الذاتي $p(v)$ والمتوسط المتحرك $q(v)$في النموذج (1) أن تختلف باختلاف الموسم v ومع ذلك فإنه من الناحية النظرية والرياضية يمكن التعويض عن رتب الانحدار الذاتي $p(v)$ والمتوسط المتحرك$q(v)$ بعدد ثابت خلال الموسم v ولن يكون هناك أي خلل في النموذج بشكل عام وذلك من خلال اعتبار أن:

$$p = \max_{v=1,\dots,S}\ p(v)$$
$$q = \max_{v=1,\dots,}\ q(v)$$

وبالتالي فإنه قد نجد في بعض المواسم أن معالم AR و MA يمكن أن تأخذ قيمة صفرية، $\phi_K(v) = 0$ حيث $p(v) < k \le p$ ، $\theta_K(v) = 0$ حيث $q(v) < k \le q$ (Lund and Basawa, 2000).

ويمكن القول بأن السلسلة الزمنية $\{Y_t\}$ ذات ارتباط دوري إذا كان وسطها الحسابي μ_t ودالة تغاييرها الذاتي $\gamma\,(t_1, t_2)$ لهم قيم منتهيه خلال الفترة u والتي تكون عدد صحيح موجب، ويمكن القول أن μ_t و $\gamma\,(t_1, t_2)$ معالم دورية خلال الفترة الدورية u إذا كان:

$$\mu t = \mu t{+}u \quad \text{و} \quad \gamma\,(t_1, t_2) = \gamma\,(t_1 + u, t_2 + u), \forall \qquad t, t1, t2 \in \mathbb{Z}$$

ومن الآن فصاعد سنفترض أن $\mu t = 0$ لأي سلسلة دورية، دون أن فقد خاصية التعميم.

وبافتراض أن $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$ هي سلسلة زمنية ذات ارتباط دوري فإنه يمكن التعويض عن الدليل الزمنى t في الشكل التالي $t = nS + v$, حيث أن n تمثل السنة و تأخذ القيم .. $n = 0, 1, ..$ و v تمثل عدد المواسم و تأخذ القيم التالية $v = 1, \dots, S$، بمعنى أخر يمكن القول أنه لأى سلسلة زمنية Y_t يتم استبدال معلمة مؤشر الزمن t بـــ $ns + v$ ، حيث أن كتابة الدليل الزمني بالشكل التالي $ns + v$ يعطى فهماً عمليا أكثر كما يلقى الضوء على دورية السلسلة،حيث يعطى تفصيلا أوضح للمواسم والفترات الدورية،

و بافتراض أن $\{Y_{ns+v}\}$ هي سلسلة زمنية دورية تكتب كما يلى:

$$Y_{ns+v} = \sum_{k=1}^{p(v)} \phi_k\,(v)\, Y_{ns+v-k} + \varepsilon_{ns+v} + \sum_{k=1}^{q(v)} \theta_k\,(v)\, \varepsilon_{ns+v-k} \qquad (3)$$

كما يمكن كتابة المعادلة (3) بالشكل التالى:

$$Y_{ns+v} = \phi_1(v)\, Y_{ns+v-1} + \cdots + \phi_{p(v)}(v)\; Y_{ns+v-p(v)} + \varepsilon_{ns+v} + \theta_1(v)\, \varepsilon_{ns+v-1} + \cdots + \theta_{p(v)}(v)\; \varepsilon_{ns+v-p(v)}$$

ويكون النموذج الناتج فى المعادلة السابقة مفيد فى نمذجة بيانات السلاسل الزمنية المختلفة المستمدة من علم الاقتصاد والمناخ والهيدرولوجيا والهندسة الكهربية وغيرها. حيث ان $v = 1, \dots, S$، اما المتغير العشوائي Y_{ns+v} يمثل قيم المتغير خلال الموسم v فى السنة n ($n \in \mathbb{Z}$). كما تمثل $\phi_k(v)$ و $\theta_k(v)$ معالم نموذج AR ونموذج MA على التوالي خلال الموسم v. بينما يعتبر حد الخطأ ε فى النموذج (3) عملية عشوائية بحتة دورية periodic white noise حيث أن تباين الخطأ يكون أكبر من الصفر

$$\mathbf{var}\,(\varepsilon_{ns+v}) = \sigma_\varepsilon^2(v) > 0,\ E(\varepsilon\, t) = 0$$

يمكن القول أن نموذج PARMA للسلسلة الزمنية Y_{ns+v} المُعرفة فى المعادلة (3) نموذج سببي أو دالة سببية لـ ε_{ns+v} إذا كان هناك للموسم v، $v = 1, 2, \dots, S$، المتسلسلات $\{\psi_i(v)\}$ كما يلى:

$$Y_{ns+v} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(v)\; \varepsilon_{ns+v-i} \qquad (4)$$

حيث $\psi_{ns+v}(v)$ تُفسّر على أنها الأوزان الموسمية والتى تحقق الشرط:

$$\max_{1 \le v \le S} \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(v)| < \infty, \qquad v \text{ لكل موسم } \quad \psi_0(v) = 1$$

كما يمكن القول أن نموذج PARMA للسلسلة الزمنية Y_{ns+v} المُعرفة فى المعادلة (4) قابلة للانعكاس invertible لكل موسم v اذا كانت السلسلة $\pi_i(v)$ تعرف

$$\pi_i(v) = \pi_0(v) + \pi_1(v)\,[B] + \pi_2(v)[B^2] + \cdots$$

حيث يكون،

$$\pi_0(v) = 1 \text{ ، لكل موسم } v \quad , \quad \max_{1\le v\le S} \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i(v)| < \infty$$

و يكون

$$\varepsilon_{ns+v} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(v)\; Y_{ns+v-i}$$

2-2-التمثيل متعدد المتغيرات لنموذج PARMA

Vector Representation of PARMA Model

بإفتراض أن Y_t هي عملية ARMA ذات S – فترة دورية فإنه يمكن كتابة المعادلة (1) في شكل متجه ذو S – متغير (S- variate) ، حيث تمثل S عدد المواسم في السنة.

$$\Phi_0 Y_n - \sum_{K=1}^{P} \Phi_K Y_{n-K} = \Theta_0 \epsilon_n + \sum_{i=1}^{Q} \Theta_i\, \epsilon_{n-i}$$

$$\Phi_0 Y_n - \Phi_1 Y_{n-1} - \cdots - \Phi_P\, Y_{n-P} = \Theta_0 \epsilon_n - \Theta_1\, \epsilon_{n-1} - \cdots - \Theta_P \epsilon_{n-Q}$$

أو

$$\Phi(L) Y_n = \Theta(L)\, \epsilon_n \qquad (5)$$

حيث

$$\Phi(L) = \Phi_0 - \Phi_1 L - \cdots - \Phi_P L^P$$
$$\Theta(L) = \Theta_0 - \Theta_1 L - \cdots - \Theta_Q L^Q$$

كما أن

$Y_n = (Y_{nS+1}, Y_{nS+2}, \dots, Y_{nS+S})^T$ و $\epsilon_n = (\varepsilon_{nS+1}, \varepsilon_{nS+2}, \dots, \varepsilon_{nS+S})^T$ هم متجهات عشوائى (S×1). حيث ان، n = 0, 1, …, N-1 ، $P = [\frac{(p-1)}{S} + 1]$ ، $p = \max_{v=1,\dots,S}\; p(v)$. كما أن، $Q = [\frac{(q-1)}{S} + 1]$ ، $q = \max_{v=1,\dots,S}\; q(v)$.

حيث أن Φ_0 هى مصفوفة (S×S) مثلثية سفلى ذات قطر عناصره (الوحده) الواحد الصحيح كما يلى:

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1(2) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ -\phi_{s-2}(s-1) & -\phi_{s-3}(s-1) & & -\phi_1(s-1) & 1 & 0 \\ -\phi_{s-1}(s) & -\phi_{s-2}(s) & & -\phi_2(s) & -\phi_1(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Φ_k, $k = 1,2,\ldots,P$ هي مصفوفة $(S\times S)$ كما يلى:

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{kS}(1) & \phi_{kS-1}(1) & \cdots & \phi_{kS-(S-2)}(1) & \phi_{kS-(S-1)}(1) \\ \phi_{kS+1}(2) & \phi_{kS}(2) & \cdots & \phi_{kS-(S-3)}(2) & \phi_{kS-(S-2)}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{kS+(S-2)}(S-1) & \phi_{kS+(S-3)}(S-1) & \cdots & \phi_{kS}(s-1) & \phi_{kS-[S-(S-1)]}(S-1) \\ \phi_{kS+(S-1)}(S) & \phi_{kS+(S-2)}(S) & \cdots & \phi_{kS+S-(S-1)}(S) & \phi_{kS}(S) \end{bmatrix} \quad (7)$$

حيث $T(.)$ تمثل مقلوب المتجة.

كما أن Θ_0 هى مصفوفة $(S\times S)$ مثلثية سفلى ذات قطر عناصره (الوحده) الواحد الصحيح كما يلى:

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_1(2) & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{S-2}(S-1) & -\theta_{S-3}(S-1) & \cdots & -\theta_1(S-1) & 1 & 0 \\ -\theta_{S-1}(S) & -\theta_{S-2}(S) & \cdots & -\theta_2(S) & -\theta_1(S) & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Θ_i , $i = 1,2,\ldots,Q$ هي مصفوفة $(S\times S)$ كما يلى:

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} \theta_{iS}(1) & \theta(1) & \cdots & \theta_{iS-(S-2)}(1) & \theta_{iS-(S-1)}(1) \\ \theta_{iS+1}(2) & \theta_{iS}(2) & \cdots & \theta_{iS-(S-3)}(2) & \theta_{iS-(S-2)}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_{iS+(S-2)}(S-1) & \theta_{iS+(S-3)}(S-1) & \cdots & \theta_{iS}(S-1) & \theta_{iS-[S-(S-1)]}(S-1) \\ \theta_{iS+(S-1)}(S) & \theta_{iS+(S-2)}(S) & \cdots & \theta_{iS+S-(S-1)}(S) & \theta_{iS}(S) \end{bmatrix} \quad (9)$$

2-3-تقدير معالم نموذج PARMA

تعتبر مرحلة تقدير المعالم هى المرحلة الثانية من مراحل بناء النموذج والتى يمكن أن تستخدم نتائجها في تحسين تحديد النموذج والتحقق من إختيار النموذج. وبالنظر الى طرق التقدير التي يمكن ان تستخدم في تحليل السلاسل الزمنية فان أكثر هذه الطرق شيوعا هي طريقة العزوم (method of moment)، طريقة تقدير المربعات الصغرى (least squares estimation) وطريقة تقدير الإمكان الأكبر (maximum likelihood estimation). وقد قارن(1994) Smadi نظرياً بين هذه الطرق الثلاث، طريقة العزوم، طريقة LS الشرطية وطريقة ML الشرطية، عن طريقة دراسة محاكاة لثلاث نماذج

PAR مختلفة. وأظهرت المقارنة أن كل الأساليب تنتج تقديرات قريبة من القيم الفعلية للمعالم فوجد أن كُلاً من تقديرات LS الشرطية وML الشرطية للمعالم هى نفسها وأيضاً مطابقة لتقديرات العزوم بإستثناء بعض المواسم الأولية التي كان بها بعض المشاهدات المفقودة. كما استنتج (1994) Smadi في نهاية الدراسة أن تقديرات LS الشرطية تكون متفوقة على تقديرات العزوم من حيث التحيز ومربع متوسط الخطأ وذلك عند التعامل مع نموذج PAR. ولكن باضافة جزء المتوسط المتحرك MA الى النموذج الدورى اى عند تقدير معالم نموذج PARMA فان طريقة العزوم باستخدام Yule-Walker equations تكون غير ملاءمة. حيث يكون استخدام تقدير الامكان الاكبر"MLE "Maximum Likelihood Estimation فى هذه الحالة أكثر ملاءمة. وفيما يلى نستعرض خوارزمية تقدير الإمكان الأكبر التقريبية

استخدم (1979) Hillmer and Tiao تقنية ناجحة من اجل تحديد الاحتمال التقريبي لعملية ARMAالمتعددة. حيث يتم فى البداية يتم اجراء عملية تحويل y الى w على النحو التالى:

$$w_{p+j} = y_{p+j} - \sum_{k=1}^{p} \phi_k(p+j)\ \ y_{p+j-k} \qquad (10)$$

وذلك عند $j = 1, 2, \dots, NS - p$ وعند $\mathbf{w}_p = [w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{NS}]'$، ويكون التحول من $\mathbf{y}_p$ الى $\mathbf{w}_p$ هو "unit Jacobian" ولذلك فان احتمال $\mathbf{w}_p$ يكافئ احتمال $\mathbf{y}_p$، الذي يعطى عن طريق $y_1, y_2, \dots, y_p$، كما أن $\mathbf{w}_p$ تتبع عملية PMA(q) والتي تبدأ عند الزمن $p+1$ وتنتهي عند NS. وبالتالي وبالاعتماد على الاحتمال الدقيق عند p=0 فانه يمكن ايجاد ضعف لوغاريتم دالة الامكان السالبة "negative log-likelihood" وذلك للسلسلة $\mathbf{w}_p$ بالمعادلة التالية،

$$\begin{aligned} -2\,ln[\,L(\phi, \theta, \sigma|\mathbf{w}_p)] = {} & NS\,ln(2\pi) + ln|D_{p+1-q,\ NS}| + ln|A_{\theta,\ p}| \\ & + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_*'\ D_{p+1-q,\ p}^{-1}\ \ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_* + \ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p'\, D_{p+1,\ NS}^{-1}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \end{aligned} \qquad \mathbf{(11)}$$

حيث إن،

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= diag\{\sigma^2(i), \sigma^2(i+1), \dots, \sigma^2(j)\}, \\ A_{\theta,m} &= D_{m+1-q,m}^{-1} + F_{\theta,m}'\, D_{m+1,\ NS}^{-1}\, F_{\theta,m}, \\ F_{\theta,m} &= -L_{\theta,m}^{-1}\ M_{\theta,m}, \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_* &= E(\varepsilon_*|y_m)\ ,\ \ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m = E(\varepsilon_m|y_m). \end{aligned}$$

وعند

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = [\,\hat{\varepsilon}_{p+1-q}, \hat{\varepsilon}_{p+2-q}, \dots, \hat{\varepsilon}_p]' = A_{\theta,p}^{-1}\ \ F_{\theta,p}'\, D_{p+1,\ NS}^{-1}\ L_{\theta,p}^{-1}\ w_p \qquad \mathbf{(12)}$$

ويكون،

$$\hat{\varepsilon}_{p+j} = w_{p+j} + \sum_{k=1}^{q} \theta_k(p+j) \ \hat{\varepsilon}_{p+j-k} , \qquad \textbf{(13)}$$

عند $j = 1, 2, \dots, NS - p$

ونحصـــــل على تقدير المعالم σ , θ , ϕ عن طريق تدنية المعادلة (11) ذلك لانه عندما تكون $p > 0$ فان الاحتمال يعتمد على السـلسـلة $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{NS}$ و ذلك بالاعتماد على السـلسـلة $y_1, y_2, \dots, y_p$. و يكون من الســـهل عند $p = 0$ اثبات ان تدنيه المعادلة (11) يتوافق مع تقدير المربعات الصغرى وهو يعادل تقريبا تقدير يول ولكر yule-walker ولكن الموسمى (Pagano, 1978). وعند افتراض أن $q > 0$ فان التدنية المباشـرة للمعادلة (11) عن طريق التفاضـل تكون غير ممكنه ومن ثم يمكن استخدام نمط التحسين غير الخطى لتدنيه المعادلة (11). وقد اوضح Vecchia(1985a,b) ان تلك الخوارزمية تتطلب وقتا اقل بكثير للحساب وتمتلك كذلك خصـائص تقارب أفضـل من التدنية المباشـر للمعادلة (11) بالإضـافة الى الحصول على تقديرات جيدة. ولحساب تقديرات التباين للبواقى يمكن تعريف K_1, K_2 على أن كل منهما يمثل أكبر عدد صــــحيح يحقق الشـــروط: $K_1 S < p + 1 - q$، $K_2 S < p + 1 + S$.

وتتلخص خطوات خورازمية تقدير الامكان الاكبر التقريبية فيما يلى:

1- استخدام تقديرات اولية $\hat{\theta}_0 , \hat{\phi}_0$ للمعالم θ , ϕ.

2- افتراض أن $\hat{\varepsilon}_j = 0$ عند $p + 1 - q \le j \le p$ و حساب قيمة $\hat{\varepsilon}_j$ عند $p + 1 \le j \le NS$ باسخدام المعادلة (13)

3- حساب تقديرات التباين للبواقى،

$$\hat{\sigma}^2(i) = (N - K_2)^{-1} \sum_{n=1}^{N-K_2} \hat{\varepsilon}^2_{K_1 S + i + (n-1)S} ,$$

حيث أن $\hat{\varepsilon} = 0$ عند $K_1 S \le j \le p - q$.

4- اســـتخدام نمـــط التحســـين لايجـــاد قـــيم المعـــالم $\hat{\theta} , \hat{\phi}$ التـــى تعمـــل علـــى تدنيـــة قيمـــة $\{-2\, ln[L(\phi, \theta , \hat{\sigma} \,|w_p)\,]\}$ فـــى المعادلـــة (12) بالنســـبة للمعـــالم θ , ϕ وذلـــك عنـــد $\hat{\sigma} = [\hat{\sigma}^2(1), \dots \hat{\sigma}^2(S)]'$.

5- حســـاب تحـــديثات التقـــديرات للبـــواقى $\hat{\varepsilon}_j$ حيـــث أن $p + 1 - q \le j \le NS$ باســـتخدام المعادلة (12) و المعادلة (13) عند $\sigma = \hat{\sigma}$، $\phi = \hat{\phi}$ و $\theta = \hat{\theta}$.

6- إعادة الخطوة من 3 الى 5 حتى يحدث التقارب النهائى.

3- تمثيل معالم PARMA باستخدام تحويلة فورية المتقطعة DFT

للحصــول على نموذج PARMA فان ذلك يتطلب تقدير عدد كبير من المعالم مما يجعل التقدير صــعباً حســابياً. ويكون من الافضــل اســتغلال الهيكل الدوري للنموذج من أجل تقليل عدد المعالم. حيث يعتبر تقدير يول ووالكر "Yule-Walker" طريقة حسابية بسيطة و لكن عند تواجد المتوسطات المتحركة الدورية "PMA" فى النموذج فان طريقة يول ووالكر تكون غير كافية. ويمكن تقليل أبعاد مســاحة البحث بشــكل كبير عن طريق تحويل المعالم θ , ϕ و عرضــها فى شــكل معالم فورير a , b والتى تظهر عند تـمـثـيـل مـعـالـم PARMA فـى شـكـل تـحـويـلـة فـوريـر الـمـتـقـطـعـة "*Discrete Fourier Transform (DFT)*" والتى قدمها *Brelsford*(1967)، كما يلى:

$$\phi_j(t) = a_{j,1} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} a_{j,2n}\ Cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} a_{j,2n+1}\ Sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right),$$
$$\theta_k(t) = b_{k,1} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} b_{k,2n}\ Cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} b_{k,2n+1}\ Sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \qquad (14)$$

كما انه يمكن حيث يمكن ايجاد قيم معالم فورير a, b باستخدام تقديراتθ , ϕ كما يلى،

$$a_r = \begin{cases} v^{-1}\sum_{m=0}^{v-1}\cos\left(\frac{2\pi rm}{v}\right)\phi_m & \left(r = 0\ or\ \frac{v}{2}\right) \\ 2v^{-1}\sum_{m=0}^{v-1}\cos\left(\frac{2\pi rm}{v}\right)\phi_m & (v\ even) \quad \left(r = 1,2,\dots,\frac{v-1}{2}\right) \\ 2v^{-1}\sum_{m=0}^{v-1}\sin\left(\frac{2\pi rm}{v}\right)\phi_m & (v\ odd) \quad \left(r = 1,2,\dots,\frac{v-1}{2}\right) \end{cases} \qquad (15)$$

$$b_r = \begin{cases} v^{-1}\sum_{m=0}^{v-1}\cos\left(\frac{2\pi rm}{v}\right)\theta_m & \left(r = 0\ or\ \frac{v}{2}\right) \\ 2v^{-1}\sum_{m=0}^{v-1}\cos\left(\frac{2\pi rm}{v}\right)\theta_m & (v\ even) \quad \left(r = 1,2,\dots,\frac{v-1}{2}\right) \\ 2v^{-1}\sum_{m=0}^{v-1}\sin\left(\frac{2\pi rm}{v}\right)\theta_m & (v\ odd) \quad \left(r = 1,2,\dots,\frac{v-1}{2}\right) \end{cases} \qquad (16)$$

وذلك عند $j = 1, 2, \dots, p$ و $k = 0, 1, \dots, q$ و $t = 0, 1, \dots, T-1$. حيث يمكن تقليل فضاء بحث المعالم من خلال خلق فضاءات فرعية من a، b عن طريق تقييد بعض أو معظم الترددات (sin , cos) لتكون ذات سعة صفرية. ونظراً لان تحويلة فورير المتقطعة DFT للمعالم ϕ , θ الى A , B تكون خطية وقابلة للانعكاس فان الفضـــاء الجزئى الخطى للمعالم a , b يتحول مرة أخرى الى فضـــاء جزئى خطى للمعالم ϕ , θ. وتتميز هذه الطريقة بتقليل وقت الحســـاب بالإضـــافة الى انتاج حلول وحيده "Unique Solution".

في المرحلة الأخيرة يتم فحص وتشخيص النموذج المقدر من خلال التأكد من أن النموذج الذي تم بناءه يصف بشكل كافى السلسلة الزمنية قيد الدراسة وذلك بناءً على اختبارات احصائية والتي يشار اليها بفحوص التشـــخيص Diagnostic Checks (Hipel and Mcleod, 1994). وأحد أهم طرق فحص وتشخيص النموذج هى تحليل البواقي للنموذج الملاءم وذلك لضمان الاستقلالية وأنها تتبع التوزيع الطبيعي "normality". ومن أفضـــل المعايير التى يمكن الاســـتعانة بها هنا هو AIC و BIC والتى يمكن من خلالها اختيار أقل عدد معالم "parsimony" للنموذج الملاءم "fitted model". ويتم حسـاب AIC و BIC باستخدام المعادلات التالية:

$$AIC^{(k)} = -2 \ln L(\hat{\phi}, \hat{\theta}) + 2k \,,$$
$$BIC^{(k)} = -2 \ln L(\hat{\phi}, \hat{\theta}) + 2k \, logN.$$

حيث أن، k : يمثل اجمالى عدد المعالم لمجموعة المعالم ϕ , θ او فى حالة تمثيل فورير للمعالم A , B، و N: تمثل عدد العينات الخطية المستقلة

4- تقدير نموذج GARCH الدوري المختلط لبواقي نموذج PARMA المقدر

يمكن القول إن $\{y_t \,; t \in \mathbb{Z}\}$ هى عملية ذات ســـكون دورى تام strictly periodically stationary (s.p.s.) للفترة الدورية S، إذا كانت توزيعاتها ذات الأبعاد المحدودة ثابتة لا تتغير فى ظل الإزاحـات الـزمـنـيـة الـدوريـة S وهـذا يـعـنـى أن الـمـتـجـه $(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_K})$ و $(y_{t_1+\tau S}, y_{t_2+\tau S}, \dots, y_{t_K+\tau S})$ يكون لهما نفس التوزيع الاحتمالي المشـــترك لكل $k \geq 1$ و (,τ) .t1,… , tk ∈ ℤ.

كمـا يمكن القول ان $\{y_t \,; t \in \mathbb{Z}\}$ هي عمليـة ذات ســـكون دورى ضـــعيف(w.p.s.) weakly periodically stationary للفترة الدورية S إذا كان وسطها $\mu_t := E(y_t)$ و دالة التغاير الذاتي لها

$\gamma_h^{(t)} := cov(y_t , y_{t+h})$ تكون دورية عند الزمن t للفترة الدورية S حيث ان الوسط $\mu_t = \mu_{t+S}$ والتغاير $\gamma_h^{(t)} = \gamma_h^{(t+\tau s)}$، وذلك $\forall \tau, h \in \mathbb{Z}$.

وبافتراض أن x_t هي بواقي نموذج PARMA المقدر و ان Z_t هي سلسلة لها توزيع متماثل مستقل $(i.i.d)$، بينما $Z_t = \left(Z_t^{(1)} , \dots , Z_t^{(K)} \right)$ هي متجهات أبعادها K، وعناصر $Z_t^{(K)}$ تساوي 1 إذا كانت المشاهدة x_t مشتقة من العنصر k^{th} لدالة الكثافة الشرطية و 0 فيما عدا ذلك. بينما تمثل $\alpha_{t,i}^{(K)}$, $\beta_{t,j}^{(K)}$ معالم النموذج والتي تكون دورية عند الزمن t وبفترات دورية S. حيث أن المعالم، $\alpha_{t,0}^{(k)} > 0$ بينما $\alpha_{t,i}^{(K)} \geq 0$ و $\beta_{t,j}^{(k)} \geq 0$ عند أي $i = 1, \dots , q_k$, $j = 1, \dots , p_k$, $k = 1, \dots , K$. كما أن مجموع نسب الخليط يجب أن تساوي الواحد الصحيح أي أن $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$، في حين $\lambda_k > 0$ لكل قيم k. وبالتالي فان نموذج GARCH الدوري المختلط للفترة الدورية S، يمكن تعريفه من خلال المعادلة التالية: (Hamdi and Souam,2017)

$$\begin{cases} x_t = \left(\sum_{k=1}^{K} h_t^{(k)} \, \mathbf{1}_{\left(Z_t^{(k)}=1\right)} \right)^{1/2} \xi_t \quad , & t \in \mathbb{Z} \\ h_t^{(k)} = \alpha_{t,0}^{(k)} + \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{t,i}^{(k)} x_{t-i}^2 + \left[\sum_{j=1}^{p_k} \beta_{t,j}^{(k)} \left(\sum_{l=1}^{K} \lambda_l \, h_{t-j}^{(l)} \right) \right] , & k = 1, \dots , K \end{cases} \tag{17}$$

حيث أن $\{\xi_t ; t \in \mathbb{Z}\}$ ه سلسلة من المتغيرات العشوائية لها توزيع $(i.i.d)$ بوسط حسابي صفري و تباين قيمته واحد، و كذلك ξ_E تكون مستقلة عن x_t لكل $E > t$. ويمكن اعتبار q_k و p_k ثوابت في K أي انه يمكن القول أن $(p, q) = (max p_k \; , max \; q_k)$ اى أن المعالم $\alpha_{t,i}^{(k)} = 0$ اذا كانت $i > q_k$ و كذلك $\beta_{t,j}^{(k)} = 0$ اذا كانت $i > p_k$، كما تكون معالم النموذج دورية عند الزمن t خلال الموسم S ، حيث $(\beta_{t,j}^{(k)} = \beta_{t+\tau S,j}^{(k)})$ و $(\alpha_{t,i}^{(k)} = \alpha_{t+\tau S,i}^{(k)})$ ، حيث ان الزمن t يشير الى الفترة الدورية، $t = nS + \nu$، حيث تشير ν الى الموسم $\nu = 1,2, \dots , S$، خلال المدة الزمنية n و التي قد تكون سنوات اذا كانت المواسم شهور، كما يمكن كتابة معادلة (17) في الشكل التالي

$$\begin{cases} x_t = \left(\sum_{k=1}^{K} h_{ns+\nu}^{(k)} \, \mathbf{1}_{\left(Z_{ns+\nu}^{(k)}=1\right)} \right)^{1/2} \xi_{ns+\nu} \quad , & \\ h_{ns+\nu}^{(k)} = \alpha_{\nu,0}^{(k)} + \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{\nu,i}^{(k)} x_{ns+\nu-i}^2 + \sum_{j=1}^{p_k} \sum_{l=1}^{K} \lambda_l \, \beta_{\nu,j}^{(k)} \, h_{ns+\nu-j}^{(l)} , & k = 1, \dots , K \end{cases}$$

وتعد طريقة الإمكان الأكبر "Maximum Likelihood" (ML) هي احد اهم طرق التقدير فهى طريقة لتقدير كثافة مجموعة من البيانات عن طريق البحث عبر توزيعاتها الاحتمالية وكذلك معالمها. حيث تعد طريقة عامة و فعالة تقوم على أساسها العديد من خوارزميات التعلم الألى، حيث يمكن الحصول على تقدير معالم النموذج من خلال تعظيم دالة الاحتمال الشرطي لمتغير الدراسة. وتكون طريقة الإمكان الأكبر معقده حسابيا وذلك عند وجود متغير من المغيرات المتفاعلة أو ان سلسلة بيانات الدراسة غير كاملة ويعرف بالمتغير الكامن "Latent variable". وقد اقترح Dempster et al (1977) خوارزمية تعظيم التقدير EM "Expectation Maximization" التي تعد طريقة لتقدير الإمكان الأكبر في ظل وجود بيانات مفقودة او ما يعرف بالمتغير الكامن. (Hamid and Souam ,2018)

ويمكن تعريف خوارزمية EM على انها طريقة تكرارية "iteration approach" تدور بين مرحلتين:

في المرحلة الأولى يتم تقدير المتغير الكامن (البيانات غير المشاهدة) بمعلومية البيانات المشاهدة و تسمى هذه المرحلة بمرحلة التقدير E-Step. حيث نحصل منها على البيانات المشاهدة وتقدير للبيانات الكامنة اى بيانات كاملة.

في المرحلة الثانية يتم تعظيم معالم النموذج في ظل البيانات الكاملة وكذلك تحسين تلك المعالم "optimum"وتسمى تلك المرحلة بمرحلة التعظيم M-Step. وبتكرار تلك المراحل نصل في النهاية الى التقارب الأمثل لتقدير معالم النموذج.

وبافتراض أن $\underline{x} = (x_1 , x_2, \dots , x_{NS}, Z_1, Z_2, \dots , Z_{NS})$ تمثل سلسلة من البيانات غير الكاملة (جزء مشاهد وجزء مفقود على الترتيب)، حيث $Z = (Z_1, Z_2, \dots , Z_{NS})$ تمثل الجزء المفقود، حيث إن$Z_t = \left(Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}, \dots , Z_t^{(K)}\right)$ هو متجه ابعاده K×1 وعناصره $Z_t^{(k)}$ تكون قيمتها بواحد صحيح اذا كانت المشاهدة x_t ناتجه عن دالة التوزيع الشرطي ذات الرتبة k^{th}. وبافتراض أن $\underline{\theta} = (\underline{\lambda'} , \theta'_{1,1}, \dots , \theta'_{S,1}, \theta'_{1,2}, \dots , \theta'_{S,2} , \dots , \theta'_{1,K}, \dots , \theta'_{S,K})'$، كما ان المعلمة= $\theta_{s,k}$ $(\alpha_{s,0}^{(k)} , \alpha_{s,1}^{(k)}, \dots , \alpha_{s,q}^{(k)} , \beta_{s,1}^{(k)}, \dots , \beta_{s,p}^{(k)})'$، وكذلك $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots , \lambda_{K-1})'$ و $r = \max (p, q)$.

وبناءً على البيانات المشاهدة $x = (x_1 , x_2, \dots , x_{NS})$ فان دالة الإمكان المشروطة تكون:

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}, \underline{x}) = C + \sum_{t=r+1}^{NS} \sum_{k=1}^{K} Z_t^{(k)} \left[ln(\lambda_k) - \frac{1}{2} ln(h_t^{(k)}) - \frac{x_t^2}{2\, h_t^{(k)}}\right] \qquad (18)$$

حيث أن، $C = \frac{r+1-NS}{2} ln(2)$، كما أنه بافتراض ان، $t = s + \tau S$ عند $s = 1, \dots , S$، $\tau = 0,1, \dots , N-1$ ، $r + 1 = s_0 + \tau_0 S \quad for \quad 1 \le s_0 \le S$، كما أن،

$$\tau_0 = \begin{cases} \left\lfloor \frac{r+1}{S} \right\rfloor, & if\ s_0 \neq S, \\ \left\lfloor \frac{r+1}{S} \right\rfloor - 1, & if\ \ s_0 \neq S, \end{cases}$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة المعادلة (18) كما يلي:

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}; \underline{x}) = C + \sum_{s=s_0}^{S} \sum_{k=1}^{K} Z_{s+\tau_0 S}^{(k)} \left[ln(\lambda_k) - \frac{1}{2} ln(h_{s+\tau_0 S}^{(k)}) - \frac{x_{s+\tau_0 S}^2}{2\, h_{s+\tau_0 S}^{(k)}} \right] \qquad \textbf{(19)}$$
$$+ \sum_{s=1}^{S} \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{k=1}^{K} Z_{s+\tau S}^{(k)} \left[ln(\lambda_k) - \frac{1}{2} ln(h_{s+\tau S}^{(k)}) - \frac{x_{s+\tau S}^2}{2\, h_{s+\tau S}^{(k)}} \right]$$

وفقا لطريقة EM يتم تقدير المعالم عن طريق تعظيم لوغاريتم دالة الإمكان في معادلة (18)، و في كل خطوة تكرارية "iteration" يكون هنالك مرحلتين أســاســيتين مرحلة التقدير E-Step ومرحلة التعظيم M-Step. وبافتراض أن البداية تكون عند الخطوة التكرارية "$i+1$" فإنه يجب ان يتوافر تقدير المعالم $\lambda_k^{(i)}$ و $\theta_{s,k}^{(i)}$ اى تقدير للمعالم عند التكرار الســابق " i " أو ما يعرف بالقيمة المبدئي لتلك المعالم "initial value"، و يتم في مرحلة التقدير Expectation حساب قيمة الدلة Q – والتي تتطلب تحديث التوزيع الشرطي لـ $Z_t^{(k)}$ الذي يمثل المتغير الكامن،

$$p\left(Z_t^{(k)} \middle| x_t, \underline{\theta}^{(i)}\right) = \frac{p\left(x_t \middle| \underline{\theta}^{(i)}, Z_t^{(k)}\right).p(Z_t^{(k)})}{\sum_{k=1}^{K} p\left(x_t \middle| \underline{\theta}^{(i)}, Z_t^{(k)}\right).p(Z_t^{(k)})}$$

ثم بعد ذلك حساب قيمة الدلة Q –، حيث أن

$$Q(\underline{\theta}; \underline{\theta}^{(i)}) = \mathbb{E}\left(\mathcal{L}(\underline{\theta}; \underline{x}) \middle| x, \underline{\theta} = \underline{\theta}^{(i)}\right)$$

بعد تحديث المعالم في مرحلة التعظيم M-step والحصــول على $\underline{\theta}^{(i+1)} = argmaxQ(\underline{\theta}; \underline{\theta}^{(i)})$، يبدأ التكرار التالى "next iteration" بالاعتماد على المعلمة الجديدة $\underline{\theta}^{(i+1)}$ التي تم تحديثها. وتســتمر خوارزمية EM في العمل بهذه الطريقة الا ان تصل للتقارب اللازم لإنهاء الخوارزمية التكرارية.

وهناك عدة معايير لاختيار الرتب (p_k, q_k) المناســبة لمكونات نموذج M-PGARCH وكذلك مكونات الخليط K. حيث قام كلا من Wong and Li (2001) و(Bentarzi and Hamdi (2008a بتقديم معيار المعلومات البايزى (Bayesian Information Criterion (BIC لاطار الخليط لنماذج Mixture ARCH و Mixture PARCH على الترتيب حيث تم اســتخدام تعظيم دالة كثافة الاحتمال الشـــرطية للنموذج، كما تم ملاءمة هذا المعيار مع نموذج M-PGARCH بواســطة Hamid and Souam (2018)، ويتم حساب معيار BIC كما يلي:

$$BIC = -2(NS-r)\mathcal{L}^* + \log(NS-r)\left(K-1+S\left(\sum_{k=1}^{K}(p_k, q_k)+K\right)\right)$$

حيث إن

$$\mathcal{L}^* = \frac{\sum_{t=r+1}^{NS} \log\left(f(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\right)}{NS-r}$$

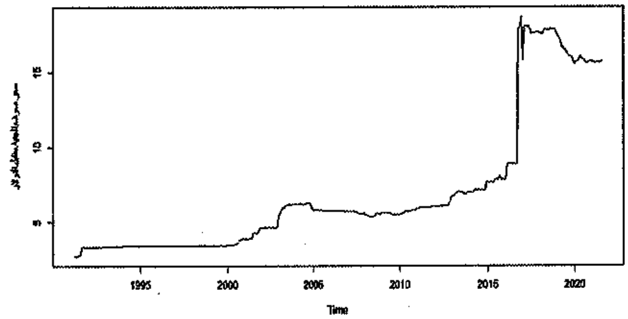
و $f(x_t|\mathcal{F}_{t-1})$ هى دالة الاحتمال الشرطي لـ x_t بمعلومية المعلومات السابقة للزمن t

5- التطبيق

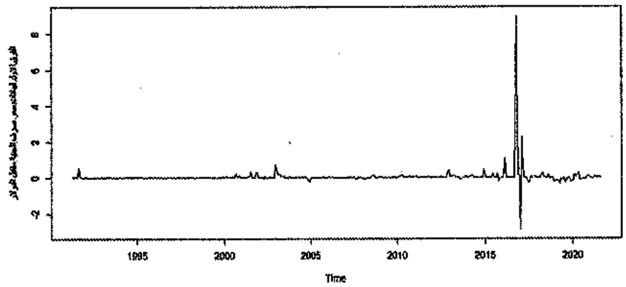
الهدف الأساسي من هذه الدراسة هو بناء نموذج PARMA الأفضل بالتطبيق على البيانات التاريخية لسعر صرف الجنية المصرى مقابل الدولار الامريكى فقد اختصت هذه الدراسة بيانات سعر صرف الجنية المصرى مقابل الدولار الامريكى وذلك لما لها من أهمية كبيرة على الاقتصاد ويعتبر نموذج ARMA الدورى "PARMA" هو نموذج السلاسل الزمنية المناسب لتلك البيانات نظراً ان التغيرات في سعر صرف الجنية مقابل الدولار تعد تغيرات دورية بشكل كبير نتيجة للعوامل الاقتصادية والسياسية التي تؤثر على سعر الصرف وتتغير بشكل دوري تقريبا.

5-1- تحديد نموذج PARMA

في البداية يجب التأكد من سكون السلسلة من عدمه من حيث التباين والوسط الحسابى ولمعرفة ذلك يتم فحص الرسم البيانى للسلسلة الزمنية لسعر صرف الجنية المصرى مقابل الدولار الامريكى. حيث ان البيانات التى استُخدمت فى هذا البحث تتكون من سلسلة زمنية شهرية بواقع 364 مشاهدة شهرية (t=364) والتى تمثل البيانات التاريخية لسعر صرف الجنية مقابل الدولار للفترة من ابريل 1991 وحتى اغسطس 2021.



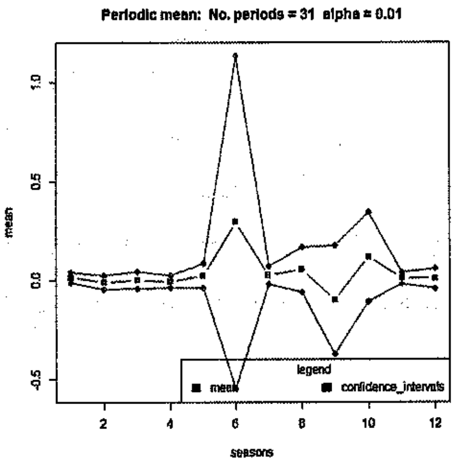
(a)

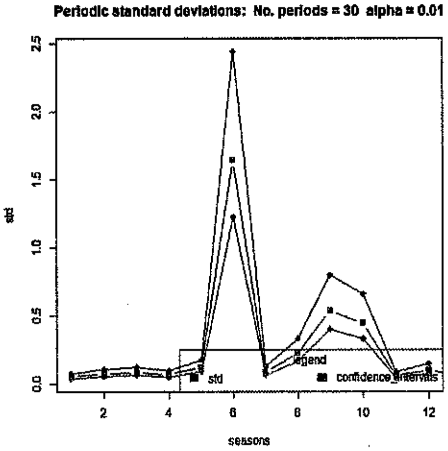


(b)

شكل (1) : حيث أن الشكل (a) يمثل الرسم البيانى للسلسلة الزمنية لبيانات سعر الصرف بينما (b) سلسلة الفروق الاولى لبيانات سعر صرف الجنية المصرى مقابل الدولار

و يتضـح من شـكل (1, a) وجود إتجاه عام نحو الارتفاع وكذلك عدم ثبات التباين لذا لازالة الاتجاه العام وزيادة استقرار السلسلة يتم حساب الفروق العادية الاولى للسلسلة الزمنية لجعل الوسط الحسابي مستقر كما هو موضح في شكل (1, b)





شكل (2): الوسط الحسابى الدورى و الانحراف المعياري الدوري لسلسلة الفروق الاولى

و بالنظر للشكل (2) نجد أن السلسلة الزمنية لسعر الصرف قد استقرت تقريبا و لكن يبقى هناك انحراف ناتج عن تعويم الجنية الذى قامت به الحكومة المصرية كأحد اجراءات الاصلاح الاقتصادى و الذى حرك سعر صرف الجنية بشكل مفاجئ من 8.8799 فى أكتوبر 2016 الى 17.865 فى نوفمبر 2016 و تبعه بعد ذلك زيادة فى سعر صرف الدولار امام الجنية الى ان استقر عند قيمة تتراوح بين 15 الى 16 جنية مصري. و نجد أنه من حيث الوسط الحسابى و التباين وذلك للمواسم المختلفة نجد استقرار فى الوسط الحسابى الدورى و استقرار تقريبى فى التباين حيث أن الوسط الحسابى والانحراف المعيارى الدورى يقعون داخل حدود الثقة بدرجة ثقة 99%. كما أن شكل السلسلة الزمنية استقر بشكل كبير، و بالتالى تكون الخطوة التالية هى تحديد نموذج PARIMA لبيانات السلسلة.

ولتحديد نموذج PARIMA لبيانات سلسلة الفروق الاولى الشهرية لسعر صرف الدولار امام الجنية يعرض جدول (1) نماذج PARIMA الشهرية الأفضل التي تم اختيارها بالاعتماد على قيم كل من "AIC" و "BIC" و "Negative log likelihood" من بين 17 نموذج تم تقديره باستخدام الرتب p , q التي تتراوح قيمتها بين 0 الى 4 بالتبادل وذلك عند تثبيت كافة شروط التقدير لكل النماذج.

جدول(1) : قيم كل من AIC و BIC و Negative log likelihood المُقدرة لكل نموذج

Model PARIMAS(P,I,Q)	Negative log likelihood	AIC value	BIC value
$PARIMA_{12}(1,1,3)$	-5.981207	20.01879	70.64603
$PARIMA_{12}(3,1,3)$	-11.96809	26.03191	99.92059

و بمقارنة قيم معايير المعلومات وقيمة سالب اللوغاريتم الاحتمالي للنماذج الأفضل المختارة، نجد أن النموذج الافضل هو النموذج الذى يتفوق على باقى النماذج فى عدد أكثر من المعايير، حيث أن نموذج $PARIMA_{12}(1,1,3)$ يتفوق على باقى النماذج من حيث AIC و BIC.

5-1-1- تقدير معالم نموذج PARMA

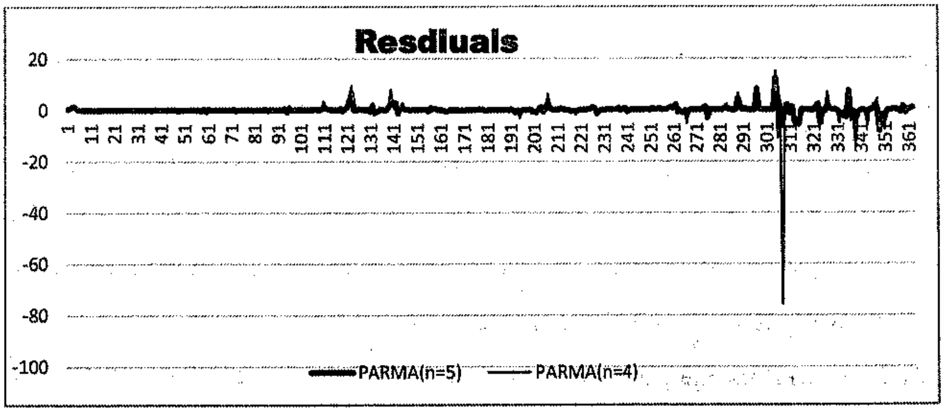
فى مرحلة التحديد وقع الاختيار على نموذج الافضل بعد مفاضلته مع كل النماذج المحتمله، ثم تأتى الخطوة التالية وهي تقدير معالم النموذج. ولتقدير المعالم للنموذج المختار يتم استخدام خوارزمية تقدير الامكان الاكبر التقريبية حيث تكون اولى خطوات تلك الخوارزمية هى ايجاد تقديرات اولية للمعالم ϕ_0, θ_0، حيث أن $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}$ و $\hat{\phi}_0 = \hat{\phi}$ هى تقديرات ϕ, θ والتى يتم الحصول عن طريق تحويل المعالم $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}$ و $\hat{\phi}_0 = \hat{\phi}$ وعرضها فى شكل سلسلة فورير باستخدام تحويلة فورير المتقطعة DFT وبالتالي يكون التعامل مع معالم فورير الاولية $\hat{b}_0 = \hat{b}$ و $\hat{a}_0 = \hat{a}$. ثم بعد ذلك وبالاعتماد على معالم فورير الاولية، يتم استخدام طرق التحسين غير الخطية للحصول على الحد الأدنى لقيمة سالب لوغاريتم دالة الامكان، "minimum of negative logarithm of likelihood function". وذلك باستخدام خوارزمية تقدير الامكان الاكبر التقريبية ولكن بالاعتماد على معاملات فورية الاولية، حيث يتم استخدام طريقة التحسين التكرارية Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno (BFGS) والتى تعد طريقة تكرارية لحل مشاكل التحسين غير الخطية غير المقيدة (Kelley, 1999). ثم يتم اعادة خطوات الخوارزمية حتى الوصول الى الحل الافضل الذي يحقق تعظيم لدالة الامكان. ولكن يبقى تحديد عدد التوفيقات "Harmonics" التى تجعل النموذج المقترح اقل فى عدد المعالم وفى نفس الوقت الأفضل. وعند تحديد عدد التوفيقات n المناسبة فانه يتم عادة استبعاد التوفيقات الاقل من $\frac{s}{n}$, حيث $n = \frac{s}{2}$ و بالتالى وعند S=12 فانه عادة ما يتم استبعاد التوفيقات عند n=0,1,2 لانها تكون قليلة جدا للتعبير عن المعالم ϕ و θ. كما يفضل ان تكون عدد التوفيقات $n \le \frac{s}{2}$، اى يفضل دراسة جودة النماذج ذات التوفيقات n=3,4,5,6. وبما أن النموذج المختار كان$PARIMA12(1,1,3)$ فيمكن تقدير معالمه باستخدام تمثيل أكثر اختذالا فى شكل معالم فورير a, b "Fourier coefficients" وذلك عند عدد توفيقات n=3,4,5,6

و من ثم اختيار التقدير الذى يحقق أقل عدد و أفضـــــل جودة. ويعرض جدل (2) قيم معايير اختيار النموذج عند عدد توفيقات Harmonics n=3, 4, 5, 6

جدول (2) : قيم $AIC^{(n)}$ و $BIC^{(n)}$ لنموذج PARIMA12(1,1,3)

Number of Harmonics (n)	$AIC^{(n)}$	$BIC^{(n)}$	Akaike's Final Prediction Error for estimated model $FPE^{(n)}$
3	20.01879	70.64603	2771.296
4	-41.58301	36.30504	21.78488
5	-82.27875	15.08132	2.414864
6	-93.65123	23.18085	171.7118

بناءً على نتائج جدول (2) يمكن القول أن النموذج عند عدد توفيقات 5 ,n=4 هما الافضـــل بالنظر الى جميع المقاييس. و يعتبر نموذج PARIMA12(1,1,3) عند n=5 هو الأفضـل، وذلك لان له القيم الاقل لجميع المعايير باسـتثناء معيار AIC. وبالمقارنة بين بواقى النموذجين عند n=5, n=4 يظهر فى شكل (3) ان سلسلة البواقي عند n=5 هى الاكثر سكوناً ولا يوجد بها قيم متطرفة كالتى تظهر عندما تكون n=4، ولذلك سـيكون من الافضـل تمثيل معالم النموذج ϕ و θ باسـتخدام معالم فورير a و b عند عدد توفيقـات n=5. و تظهر تقديرات ϕ و θ لنموذج PARIMA12(1,1,3) فى الجـدول (3)، بينمـا يعرض جدول (4) تقديرات معالم b, a المختزلة باستخدام تحويلة فورير.



شكل (3): الرسم البيانى لسلسلة البواقى لنموذج PAIMA12(1,1,3) عند عدد توفيقات n=4,5 لتمثيل فورير لمعالم النموذج.

جدول (3): معالم نموذج PARIMA$_{12}$(1,1,3) المقدرة $\hat{\phi}_i(v), \hat{\theta}_i(v)$

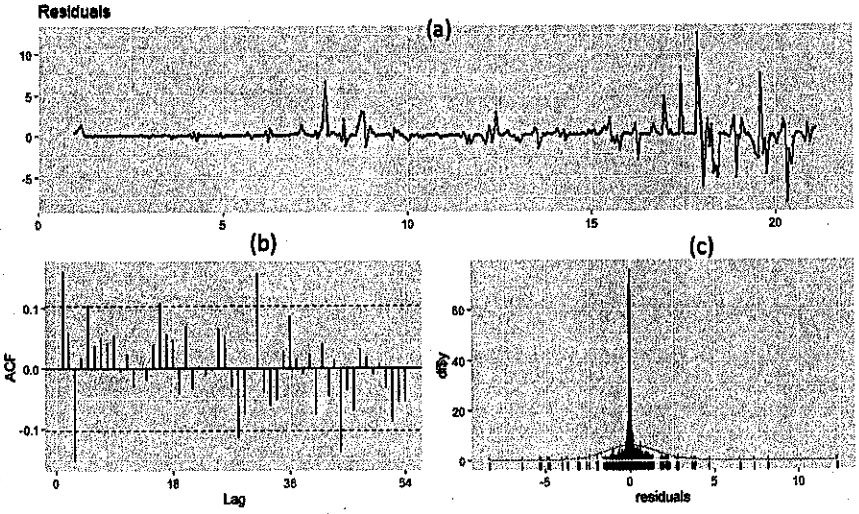
$Lag(i)$ / $Period(v)$	$\hat{\phi}_i(v)$	$\hat{\sigma}(v)$	$\hat{\theta}_i(v)$		
	1		1	2	3
1	1.23974	0.05776	-0.06707	-0.01765	-0.00298
2	0.65768	-0.0428	-0.08215	-0.0224	-0.00615
3	-0.41066	-0.09154	-0.10766	-0.05295	-0.01424
4	-1.1644	0.05588	-0.0948	-0.10276	-0.07231
5	-1.16026	0.39233	0.006785	-0.12114	-0.19125
6	-0.67265	0.72877	0.181715	-0.06417	-0.31846
7	-0.34684	0.8438	0.341168	0.054537	-0.37264
8	-0.51146	0.67421	0.388619	0.165826	-0.31279
9	-0.84909	0.36432	0.299504	0.200886	-0.17571
10	-0.75465	0.12844	0.139655	0.14867	-0.04533
11	-0.01211	0.06214	0.005704	0.060515	0.016937
12	0.90625	0.08432	-0.05461	-0.00097	0.015154

جدول (4): معالم فورير المختزلة المقدرة a, b لنموذج PARIMA$_{12}$(1,1,3)

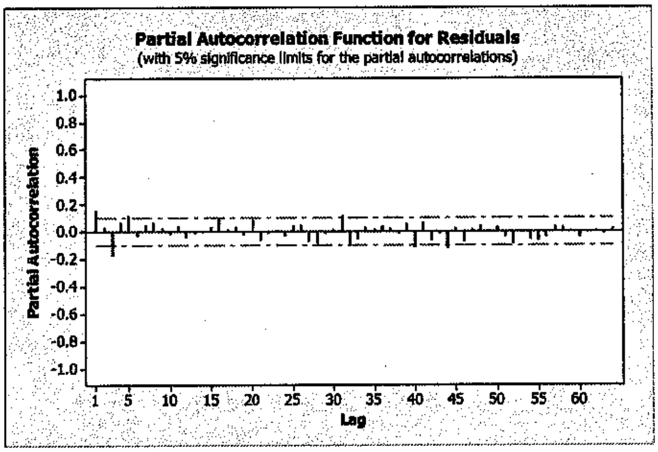
$Lag(i)$ / $Harmonics$	$a_i(v)$	$b_0(v)$	$b_i(v)$		
	1		1	2	3
1	-0.25654	0.27147	0.079738	0.020701	-0.12331
2	0.79329	-0.39302	-0.20412	-0.03609	0.184827
3	-0.20488	-0.03628	-0.11723	-0.12571	-0.01349
4	0.70299	0.17931	0.057309	-0.00226	-0.0645
5	-0.02522	-0.05245	0.051776	0.060206	-0.00451

5-1-2- فحص ملاءمة نموذج PARIMA$_{12}$(1,1,3) الشهرى

كنا قد توصـــلنا فى مرحلـة التقـدير الى أنـه يكون من الافضـــل تمثيـل معـالم النموذج PARIMA12(1,1,3)، ϕ و θ، باســـتخدام معالم فورير a و b المختزلة باســـتخدام عدد n=5 من التوفيقات. وبالتالى سـيتم فحص بواقى ذلك النموذج. حيث يتم فحص دالة الارتباط الذاتى والارتباط الذاتى الجزئى للبواقى للتأكد من أن البواقى عبارة عن تغيرات عشوائية و ان الارتباطات الذاتية للبواقى مستقلة و تتوزع توزيع طبيعى وكذلك المدرج التكرارى للبواقى للتأكد من انها تتبع التويع الطبيعى.



شكل (4): تحليل سلسلة البواقى لنموذج $PAIMA_{12}(1,1,3)$المقدر حيث الشكل (a) يمثل سلسلة البواقى، الشكل (b) يمثل دالة ACF لسلسلة البواقى، الشكل (C) يمثل المدرج و المنحنى التكرارى لسلسلة البواقى.



شكل (5): دالة الارتباط الذاتى الجزئى لسلسلة البواقى لنموذج $PARIMA_{12}(1,1,3)$

و نلاحظ من شكل (4) و (5) أن سلسلة البواقى مستقرة تقريبا و لكن ليس بشكل جيد حيث ان هناك تقلبات عالية و منخفضه فى نهاية السلسلة ناتجة عن تحريك سعر صرف الجنية امام الدولار، كما نلاحظ من الرسم البيانى للمدرج و المنحنى التكرارى للبواقى شكل (4,c) أنها تتبع التوزيع الطبيعى تقريبا الا انها يوجد بها انحراف و تفرطح, و و بفحص دالة ACF للبواقى شـــكل(4,b) ودالة PACF للبواقى شـــكل (5) نجد أن الارتباط الذاتى للبواقى و الارتباط الذاتى الجزئى لاغلب الفجوات الزمنية lags يقع

داخل حدود الثقة مما يدل على أن البواقى عبارة عن تغيرات عشـــوائية و أن الارتباطات الذاتية للبواقى تكون مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعى بشكل تقريبى.

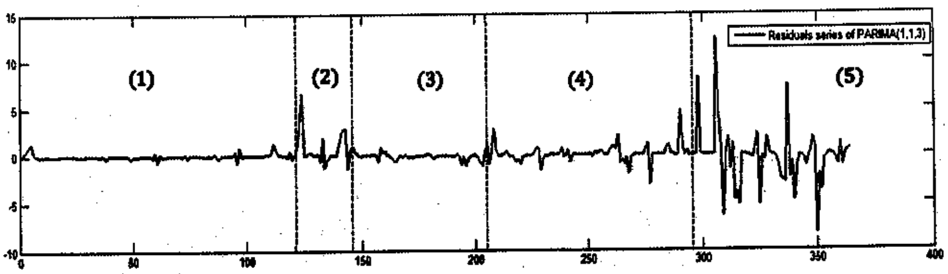
5-2- تقدير نموذج GARCH الدورى المختلط لبواقى نموذج $PAIMA_{12}(1,1,3)$ المقدرة.

بالنظر الى سلسلة البواقى لنموذج $PAIMA_{12}(1,1,3)$ المقدر نجد أنها مازالت غير ساكنة حيث نلاحظ وجود تقلبات دورية وكذلك عند فحص دالة ACF و PACF للبواقى نلاحظ خروج بعض القيم عن حدود الثقة عند بعض فترات الازاحة (lags). ولدراســة تلك القلبات و زيادة دقة النموذج المقترح سيتم فى هذا الجزء دراسة البواقى باستخدام نموذج M-PGARCH وتقدير معالمه لدراسة بواقى نموذج PARMA و تقديرها، و بالتالى يكون الناتج فى النهاية هو تقدير لنموذج PARMA مع نموذج M-PGARCH.

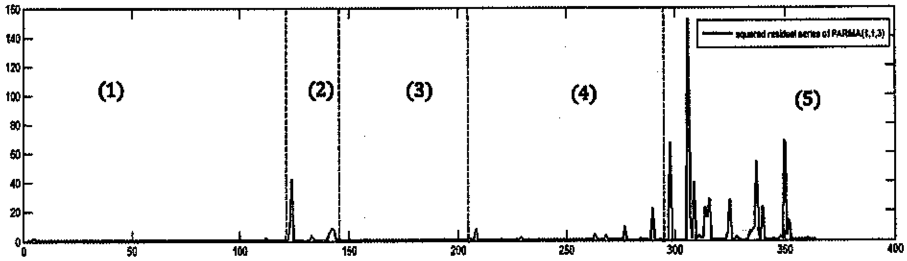
5-2-1- تحـديـد نموذج M-PGARCH باســتخـدام ســلســلــة البواقى لنموذج $PARIMA_{12}(1,1,3)$ الشهرى

لتحديد قيمة الخليط K المناسب لسلسة البواقى و بفحص الرسم البيانى لهذه السلسلة يتضح من الشــكل (6) وجود ظاهرة التقلب العنقودية "the volatility clustering phenomenon" ويتضـــح بشــكل واضــح من خلال الرســم البيانى لســلســة البواقى و كذلك لمربع ســلســلة البواقى ان هناك بعض الانقطاعات، حيث يكون هناك تقلبات منخفضـــة "low volatility" فى الجزء (1) و (3) فى الشـــكل (6)، بينما تكون هناك تقلبات متوســطة فى الجزء (2) و (4) و فى نهاية الســلسـلة فى الجزء (5) نلاحظ وجود تقلبات مرتفعة حيث تم فى نوفمبر 2016 تحرير ســعر صــرف الجنية مقابل الدولار الاميريكى مما ادى الى تقلبات مرتفعة فى سعر صرف الجنية مقابل الدولار بلغ ذروته فى تلك الفترة.

(a)



(b)



شكل (6): يمثل (a) سلسلة البواقى لنموذج PARIMA$_{12}$(1,1,3) الشهرى بينما يمثل (b): مربع سلسلة البواقى لنموذج PAIMA$_{12}$(1,1,3)

وبحساب المقاييس الوصفية لسلسلة البواقى لنموذج PARIMA$_{12}$(1,1,3) و كذلك لكل سلسلة شهرية على حدي وبالنظر الى نتائج الالتواء نجد أن سلسلة البواقى الكاملة لها التواء موجب (ناحية اليمين) ولكن عند قياس الالتواء لكل سلسلة شهرية نجد ان هناك التواء سالب لشهر يونيو يوليو ويناير وأبريل بينما يكون موجب لباقى شهور السنة. كما تُظهر النتائج أن مقياس التفرطح لكامل السلسلة وكذلك للشهور جميعها أكبر بكثير من 3 فيما عدا شهر ديسمبر و مارس و أبريل يكون التفرطح اقل من 3 وهذا يعكس حقيقة أن ذيول توزيعات البواقى أكثر سمكاً من التوزيع الطبيعى وهذا أمر عادة ما يتم ملاحظته فى السلاسل الزمنية المالية لاسعار الصرف خاصة للعملات الناشئة فى الدول النامية.

وقد تم اقتراح العديد من النماذج الدورية التى تسمح بوصف التقلبات الموسمية فى السلسلة وذلك عند S=12 ورتب q, p تتراوح قيمهما بين 1 الى 3. كما أنه من الشكل (6) يمكن القول أن قيمة K والذى يمثل عدد مكونات الخليط تكون K=2 او K=3 بحد أقصى. وتتمثل احدى المشكلات الرئيسية فى تحليل نماذج الخليط فى تحديد عدد المكونات K وكذلك رتب النموذج الأفضل، وبالتالى فبالاضافة الى الاعتماد على تحليل الرسم البيانى للسلسلة المستهدفة فان استخدام معيار المعلومات BIC و AIC للمفاضله بين النماذج المقترحة يكون أكثر موثوقية. ويعرض جدول (5) النماذج الأفضل التي قد تم اختيارها.

جدول (5) :يعرض النماذج المقترحة بالتطبيق على سلسلة البواقى لنموذج PARIMA$_{12}$(3,1,1) الشهرى

Model $M-PGARCH_S\,(K\,;\,p_1,p_2,\ldots,p_K\,;q_1,q_2,\ldots,q_K\,)$	AIC	BIC
M-PGARCH$_{12}$(2;1,1;1,1)	554.99	838.88
M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1;1,1,1)	666.365	1094.141

و مــن النتــائج الســابقة فــي جــدول (5) نجــد أن افضــل نمــوذجين يمكــن دراســتهم و المفاضـــــلة بيـــــنهم همـــــا نمـــــوذج M-PARCH12(2;1,1;1,1) و نمـــــوذج M-PGARCH12(3;1,1;1,1) و بالتــالي يمكــن ملاحظــة أن الافضــلية عنــدما K=2 وهــذا يعنــى ان النمـوذج قـد اظهـر نـوعين مختلفـين مـن التقلبـات لسلسـلة البـواقي ويظهـر ذلـك بشـكل واضـح فـى الرسـم البيـانى لمربـع البـواقى فـى الشـكل (6− b). وفـى الخطـوة التاليـة سـيتم تقـدير معـالم نمـوذج M-PGARCH12(2;1,1;1,1) و نمـــــوذج M-PGARCH12(3;1,1,1;1,1,1) و المفاضـــــلة بينهم للتوصل للنموذج الافضل الذى يصف بواقى نموذج PARIMA الشهرى.

5−2−2 − تقدير معالم نموذج M-PGARCH لبواقي نموذج PARIMA12(1,1,3) الشهرى

يــتم فــى هــذه المرحلــة تقــدير معــالم النمــوذج المقتــرح بالاعتمــاد علــى خوارزميــة Maximization Expectation لتقـدير الامكـان الاكبـر "ML" لمعـالم النمـوذج المسـتهدف، وقـد تـم اختيـار افضـل النمـاذج المقترحـة فـى مرحلـة التحديـد وذلـك لتقدير معـالمهم و فحـص ايهـم الافضــل. وفيمـا يلـى نعـرض تقـدير المعـالم لكـل نمـوذج مـن النمـاذج المقترحـة. تعـرض الجـداول التاليـة تقـدير المعـالم وكـذلك نتـائج شـرط السـكون الـدورى. حيـث يعـرض الجـدول (6) تقـديرات المعـالم لنمـوذج M-PGARCH12(2;1,1;1,1) حيـث نجـد أن النمـوذج قـد الـتقط نـوعين مختلفـين مـن التقلبـات لسلسـلة البـواقى، تقلـب مـنخفض يحـدث بنسـبة $\lambda_2 = 56.632\%$ وتقلـب أعلـى يحـدث بنسـبة $\lambda_1 = 43.368\%$. كمـا نجـد ان المعـالم المقـدرة لكـل مكـون k تحقـق شـرط السـكون الـدورى، حيـث أن قيمـة $\prod_{v=1}^{S}\left(\alpha_{v,1}^{(1)} + \alpha_{v,1}^{(1)}\right) = 1.1333e-07$ وهـو أقـل مـن الواحـد الصـحيح وكـذلك عنـد k=2 نجـد أن $\prod_{v=1}^{S}\left(\alpha_{v,1}^{(2)} + \alpha_{v,1}^{(2)}\right) = 1.4909e-10$ وهـو ايضـا أقـل مـن الوحـدة، بينمـا نجـد أن معـالم النمـوذج المقـدركـكل تكـون لهـا سـكون دورى ضـعيف و يظهر ذلك بالنظر لقيمة φ حيث أن شرط سكون سلسلة M-PGARCH يكون كالتالى:

$$\varphi := \prod_{v=0}^{S-1}\left(\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\ \left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \beta_{v.1}^{(k)}\right)\ \right) < 1$$

حيـث تشـير:= إلـى أن قيمـة φ ستصـبح Becomes أقـل مـن 1 بينمـا نجـد أن $\varphi = 1.6148e-08 < 1$ للنمـوذج ككـل أقـل مـن الوحـدة، هـذا بالإضـافة الـى أن مسـتوى الاسـتقرار الـدورى عنـد k=1, k=2 متقـارب. كمـا نلاحـظ مـن تحليـل النمـوذج المقـدر لكـل موسـم علـى حـدى أن النمـوذج المقابـل للمواسـم $v = 5, 6, 8$ اى الخـاص بشـهر مـايو ويونيـو واغسـطس يكـون غيـر

ساكن دورياً ويتضح ذلك من قيمة $\sum_{v=1}^{S} \lambda_k \left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \alpha_{v,1}^{(k)}\right)$ لكل المواسم و التي نجدها أقل من الواحد فيما عدا عند $v = 5, 6, 8$ فانها تكون أكبر من الواحد. وبالنسبة للمواسم الثلاث التي تكون فيها السلسلة غير ساكنة دورياً $v = 5, 6, 8$ نلاحظ أن هناك وزن أكبر للمعلمة $\alpha_{v,1}^{(k)}$ و للمعلمة $\beta_{v,1}^{(k)}$ من تلك المعالم فى المواسم الساكنة دورياً، ويعود ذلك بشكل كبير الى تحرير سعر صرف الجنية امام الدولار فى عام 2016م و الذى أدى الى انحرافات كبيرة فى سعر الصرف ظهرت بشكل واضح خلال بعض الفترات الدورية الشهرية وحتى بعد أخذ الفروق للسلسة.

جدول (6): تقدير معالم نموذج M-PGARCH$_{12}$(2;1,1;1,1) لبواقي نموذج PARIMA$_{12}$(1,1,3) الشهري

	K=1			K=2			$\sum_{v=1}^{S} \lambda_k \left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \alpha_{v,1}^{(k)}\right)$
λ_k	0.433681			0.566319			
period	$\alpha_{v,0}^{(k)}$	$\alpha_{v,1}^{(k)}$	$\beta_{v,1}^{(k)}$	$\alpha_{v,0}^{(k)}$	$\alpha_{v,1}^{(k)}$	$\beta_{v,1}^{(k)}$	
$v=6$	1.212576	26.43128	0.595072	0.000807	2.135956	0.600461	13.27049
$v=7$	4.672325	1.57E-13	0.054984	0.005229	8.37E-14	0.055547	0.055303
$v=8$	3.241246	1.178532	0.24592	0.01313	0.54341	0.254835	1.069819
$v=9$	0.006758	0.189041	6.43E-15	1.101492	0.287101	6.50E-15	0.244575
$v=10$	0.04643	2.56E-13	0.057225	4.955133	2.94E-13	0.057812	0.057557
$v=11$	0.029821	5.19E-14	0.056619	4.86898	5.70E-14	0.05754	0.057141
$v=12$	0.02105	8.43E-15	0.05707	0.600214	5.35E-15	0.058562	0.057915
$v=1$	3.050213	1.65E-12	0.058296	0.022518	3.91E-13	0.055538	0.056734
$v=2$	0.073935	1.88E-13	0.052625	0.004228	1.04E-13	0.057108	0.055164
$v=3$	0.004037	1.52E-13	0.049689	44.93644	2.31E-13	0.063635	0.057587
$v=4$	0.094838	1.846749	1.06E-14	8.05E-05	0.236856	1.05E-14	0.935036
$v=5$	0.45115	5.440596	2.03E-16	0.000171	0.459561	2.04E-16	2.61974
$\prod_{v=1}^{S}\left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \alpha_{v,1}^{(k)}\right)$	1.1333e-07			1.4909e-10			
φ	1.6148e-08						
Log Likelihood	-127.1197						
	Number of observations outside the limits						14

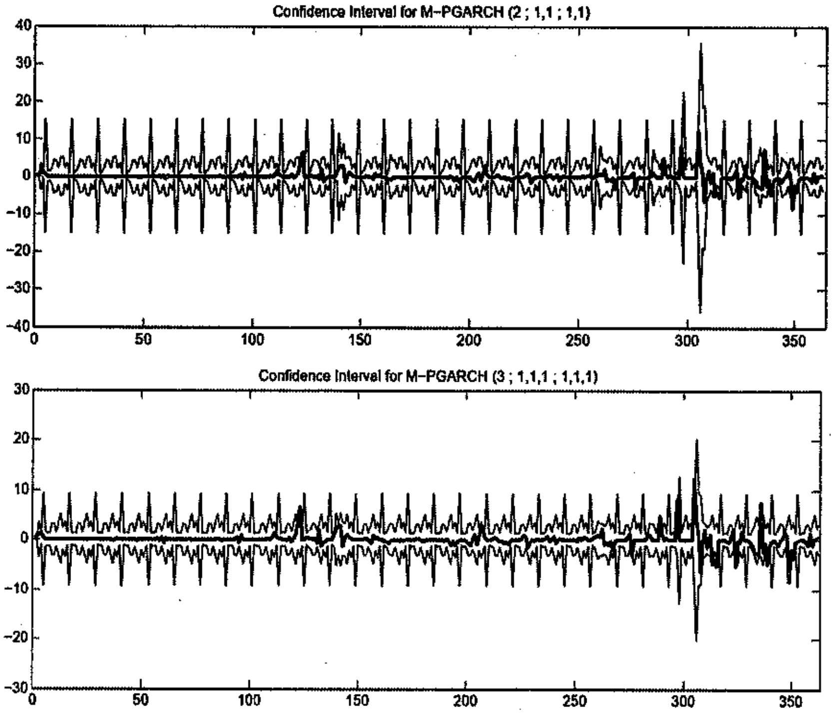
جدول (7): تقدير معالم نموذج M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1 ;1,1,1) لبواقي نموذج PARIMA$_{12}$(1,1,3) الشهري

	$k=1$			$k=2$			$k=3$			$\sum_{v=1}^{S} \lambda_k \left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \alpha_{v,1}^{(k)}\right)$
λ_k	0.405594			0.055253			0.539153			
period	$\alpha_{v,0}^{(k)}$	$\alpha_{v,1}^{(k)}$	$\beta_{v,1}^{(k)}$	$\alpha_{v,0}^{(k)}$	$\alpha_{v,1}^{(k)}$	$\beta_{v,1}^{(k)}$	$\alpha_{v,0}^{(k)}$	$\alpha_{v,1}^{(k)}$	$\beta_{v,1}^{(k)}$	
$v=6$	0.143634	3.552861	0.597098	0.163721	4.303427	0.597502	0.001274	1.452814	0.529124	3.022557
$v=7$	0.485156	6.35E-14	0.054375	15.74464	4.59E-14	0.054729	0.006216	3.27E-14	0.054401	0.054409
$v=8$	1.206041	0.167353	0.248155	4.333443	0.196766	0.248378	0.028979	0.322232	0.246925	0.499985
$v=9$	0.007354	0.064321	6.38E-15	0.06749	0.073917	6.40E-15	0.5125	0.186858	6.42E-15	0.130917
$v=10$	0.716331	6.23E-14	0.056955	13.84749	4.61E-14	0.056806	0.110691	7.74E-14	0.056547	0.056727
$v=11$	0.086236	2.28E-14	0.056451	0.429997	2.28E-14	0.056464	4.75168	1.94E-14	0.056508	0.056483
$v=12$	0.023288	1.81E-15	0.056357	0.084627	1.49E-15	0.056508	0.763703	1.60E-15	0.056559	0.056474
$v=1$	3.118997	1.94E-13	0.057441	1.288759	1.87E-13	0.051855	0.059737	1.34E-13	0.057241	0.057025
$v=2$	0.136313	5.72E-14	0.056762	1.747001	7.92E-14	0.057005	0.015388	2.16E-14	0.056011	0.056371
$v=3$	0.012054	6.61E-14	0.061	0.335009	8.15E-14	0.062053	17.68471	4.97E-14	0.061986	0.06159
$v=4$	0.370198	0.474384	1.03E-14	0.359869	0.416532	1.04E-14	0.000193	0.154217	1.04E-14	0.298568
$v=5$	0.315342	0.966549	1.98E-16	1.493956	1.011936	1.99E-16	0.000313	0.32001	1.99E-16	0.620473
$\prod_{v=1}^{S} \left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \beta_{v,1}^{(k)}\right)$	9.9653e-11			1.2368e-10			2.0325e-11			
φ	7.1440e-11									
Log Likelihood	-34.338									
	Number of observations outside the limits									16

و بالنظر الى نتائج جدول (7) نجد أن نموذج M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1 ;1,1,1) المقدر مكون من ثلاث نماذج PGACH(1,1) عند $k = 1, 2, 3$. حيث نجد ان المكون k ذو اعلى معلمة خلط "mixing parameter" يكون عند k=3 بمعلمه خلط $\lambda_3 = 0.53915$ ويكون لـه تقلبات منخفضـــه طويلـة المـدى. بينمـا المكونين الاخرين عنـد k=1 و k=2 يكون لهم معـامـل خلط $\lambda_2 = 0.05525$ و $\lambda_1 = 0.40559$ و يكون لهم تقلبات طويلة المدى أعلى من التقلبات عند k=3 حيث أن قيمة $\prod_{v=1}^{S}\left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \beta_{v,1}^{(k)}\right)$ عند k=1, 2, 3 و التى تعد شرط السكون لكل مكون k، تكون 1.2368e-10, 9.9653e-11 , 2.0325e-11 على الترتيب، و بفحص قيم $\prod_{v=1}^{S}\left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \beta_{v,1}^{(k)}\right)$ نجد أن التقلبات للثلاث مكونات متقاربة. ونلاحظ أن معالم النموذج المقدر M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1 ;1,1,1) لهـا سـكون دورى ضـعيف ويظهر ذلـك بـالنظر لقيمـة φ والتى تكون $\varphi := \prod_{v=0}^{S-1}\left(\sum_{k=1}^{K}\lambda_k \left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \beta_{v,1}^{(k)}\right)\right) < 1$ ،حيث نجد أن $\varphi < 1$ لهذا النموذج. وعند تحليل النموذج المقدر لكل موسم من المواسم نجد أن فقط النموذج المقابل للموسم $v = 6$ اى الخاص بشهر يونيو يكون غير ساكن دورى حيث أن قيمة $\sum_{v=1}^{S}\lambda_k \left(\alpha_{v,1}^{(k)} + \alpha_{v,1}^{(k)}\right)$ لكل المواسم أقل من الواحد فيما عدا عند $v = 6$ تكون أكبر من الواحد على عكس نموذج M-PGARCH$_{12}$(2;1,1;1,1) الذى يوجد به عدم سكون عند ثلاث مواسم دورية.

وبـالنظر لمـا تقـدم من تحليـل للنموذجين نجـد أن قيمـة Log-Likelihood لنموذج M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1 ;1,1,1) وهى 34.338- أكبر من قيمـة Log-Likelihood لنموذج M-PGARCH$_{12}$(2;1,1;1,1) والتى تساوى 127.1197-، كما نجد أن النموذجين ككل ساكنين دوريا وعند كل مكون k نجد ان هناك سكون دوري الا أنه عندى فحص السكون الدورى لكل موسم من المواسم لكل نموذج يتضـح ان نموذج M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1 ;1,1,1) هو الافضـل حيث يكون فقط النموذج عند الموسـم $v = 6$ غير سـاكن بينما يكون سـاكن فى باقى المواسـم الدورية الشـهرية على عكس نموذج M-PGARCH$_{12}$(2;1,1;1,1) الـذى يتواجد بـه عدم سـكون دورى عند ثلاث مواسـم دورى هم $v = 5, 6, 8$. ويعرض شـكل (7) فترة الثقة للبواقى $\bar{y} \pm 3\sqrt{\hat{h}_t}$، حيث أن $\bar{y}$ هى الوسـط الحسـابى لسـلسـلة البواقى كما أن $\hat{h}_t$ تعبر عن التقلبات (التنبذبات) المقدرة "estimated volatility" حيث أن $\sqrt{\hat{h}_t} = \sqrt{\mathbb{E}\left(y_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}, \underline{\theta} = \underline{\hat{\theta}}\right)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k \hat{h}_t^{(k)}}$. وبفحص شـكل (7) نجد أن عدد المشـاهدات التى تقع خارج حدود الثقة لكلا النموذجين متقارب جدا حيث يكون هناك 14 مشـاهدة خاج

حدود الثقة لنموذج M-PGARCH$_{12}$(2;1,1;1,1) بينما يكون هناك 16 مشـــاهدة خارج حدود الثقة لنموذج M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1 ;1,1,1). وبالتالى وبناء على ما تقدم من تحليل يمكن القول ان نموذج M-PGARCH$_{12}$(3;1,1,1 ;1,1,1) هو الافضل و الاكثر تعبيراً عن البيانات.



شكل(7): يعرض فترة الثقة لبيانات سلسلة البواقى بالاعتماد على نماذج M_PGARCH المقترحة.

النتائج Conclusions

تناول البحث أحد أهم نماذج السلاسل الزمنية الخطية الشائع استخدامها مع البيانات الموسمية ذات الطابع الدوري وهي نماذج PARMA. حيث تم دراسة خصائص النموذج وتقدير معالمه واختيار النموذج الافضل من بين البدائل المتاحة بالتطبيق على بيانات سعر صرف الجنية المصري أمام الدولار الأمريكي حيث يعد سعر الصرف أحد اهم الادوات المالية المؤثرة على الاقتصاد المصري. ولحل مشكلة عدد المعالم الكبير التي تظهر في مرحلة التقدير تم استخدام تمثيل فورير لمعالم نموذج PARMA عن طريق تحويلة فورير المتقطعة DFT والتي من خلالها استطعنا خفض عدد المعالم المقدرة من 60 معلمة

الى 25 معلمة فقط. و نتيجة لان سلسلة البواقي لنموذج $PARMA_{12}(1,1,3)$ المقدر لم تكن ساكنة بل كان بها تقلبات وتباينات يجب دراستها اقترحت الدراسة استخدام فئة من النماذج غير الخطية للسلاسل الزمنية الدورية وهى نماذج GARCH الدورية المختلط " M-PGARCH ". حيث تسمح نماذج M-PGARCH بالتقاط النمط الدوري و التغير المفاجئ و التباينات المتغيرة للبواقي بالإضافة الى شكل التوزيعات الشرطية والتي تظهر بشكل دائم مع السلاسل الزمنية المالية والاقتصادية. حيث تم دراسة الخصائص الاحتمالية لهذه الفئة من النماذج و كذلك طريقة التقدير. وأشارت النتائج الى أن نموذج $M\text{-}PGARCH_{12}(3;1,1,1;1,1,1)$ قادر على التقاط ظاهرة التغيرات المفاجئة فى التقلبات بشكل جيد للغاية وبشكل أكثر مرونة وأكثر اختزالا "parsimonious" حيث ان هناك الكثير من المعالم المقدرة تؤول قيمتها الى الصفر. وبالمقارنة بين استخدام نموذج PARMA فقط لوصف البيانات وبين استخدام نموذج PARMA مع نموذج M-PGARCH نلاحظ أن نموذج PARMA كان ينقصه الوصف الدقيق للتغيرات الدورية في البواقي والتي لم تكن ساكنة هذا بالإضافة الى الالتواء والتفرطح الذي ظهر عند حساب المقاييس الوصفية لها. ان استخدام نموذج $M\text{-}PGARCH_{12}(3;1,1,1;1,1,1)$ مع نموذج $PARMA_{12}(1,1,3)$ قد ساعد فى وصف الخليط الدوري لتلك التقلبات بشكل دقيق و اظهار مواضع عدم السكون في السلسلة التي أدت الى تلك التقلبات وذلك من خلال قدرته على اظهار السكون الدوري لكل عنصر من عناصر الخليط الدوري بالإضافة الى دراسة السكون لكل موسم من المواسم على التوازي مما يمكننا من تفسير تلك التقلبات في البواقي بشكل واضح ودقيق. ويوصى الباحث بتطوير نسخة دورية متعددة المتغيرات من هذا النموذج من أجل الاخذ في الاعتبار المتغيرات الاخرى والتي يكون لها تأثير كبير على الاقتصاد.

المراجع

- Abdallah, M. (2013) Generation of PAR Time Series Models Using Periodic Levinson-Durbin Algorithm. (MSc). The Islamic University of Gaza.
- Abo-Hammour, Z. Al-Smadi, O. Al-Smadi, A. M. Zaqout, M. and Saraireh, M. (2012) ARMA Model Order and Parameter Estimation using Genetic Algorithms. Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems. 18(2), 201–221.
- Akgün, B. (2003) Identification of Periodic Autoregressive Moving Average Models. (MSc). Middle East Technical University.
- Anderson, P. L. and Meerschaert, M. M. (1998) Modelling river flows with heavy tails. Water Resources Research. 34(9), 2271–80.
- Anderson, P. L., Tesfaye, Y. G., & Meerschaert, M. M. (2007). Fourier-PARMA Models and Their Application to River Flows. Journal of Hydrologic Engineering, 12(5), 462–472. https://doi.org/10.1061/(asce)1084-0699(2007)12:5(462)
- Anderson, P. Meerschaert, M. and Zhang, K. (2013) Forecasting with prediction intervals for periodic autoregressive moving average models. Journal of Time Series Analysis. 34, 187-193.
- Ansley, C.F. (1979), An algorithm for the exact likelihood of a mixed autoregressive-moving average process. Biometrika 66(1), 59–65.
- Basawa, I. and Lund, R. (2001) Large sample properties of parameter estimates for periodic ARMA models. Journal of Time Series Analysis 22, 651–63.
- Bentarzi M, Hamdi F (2008a)Mixture periodic autoregressive conditional heteroskedastic models. Comput Stat Data Anal 53:1–16
- Bentarzi M, Hamdi F (2008b) Mixture periodic autoregression with periodic ARCH errors. Adv Appl Stat 8:219–246
- Bentarzi, M., & Hamdi, F. (2008). Mixture periodic autoregressive conditional heteroskedastic models. Computational Statistics and Data Analysis, 53(1), 1–16. https://doi.org/10.1016/j.csda.2008.06.019
- Bowers, M. C. Tung, W. W. and Gao, J. B. (2012) On the distributions of seasonal river flows: lognormal or power law?. Water Resources Research.48, W05536
- Dudek, A. E., Hurd, H., & Wójtowicz, W. (2016). Periodic autoregressive moving average methods based on Fourier representation of periodic

coefficients. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 8(3), 130–149. https://doi.org/10.1002/wics.1380

- Fan, P. ying, Wu, S. xin, Zhao, Z. long, & Chen, M. (2017). M-estimation for periodic GARCH model with high-frequency data. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 33(3), 717–730. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0694-x
- Ferwana, A. (2011). Periodically Correlated Time Series Models: Representation and Identification. September.(PhD). The Islamic University of Gaza.
- Francq, C. Roy, R. and Saidi, A. (2011) Asymptotic Properties of Weighted Least Squares Estimation in Weak PARMA Models. Journal of Time Series Analysis.
- Franses, P. and Paap, R. (2004) Periodic Time Series Models. New York: Oxford University Press.
- Gladyshev, E. G. (1961) Periodically correlated random sequences. Soviet Mathematics 2, 385–88.
- Hamdi, F., & Souam, S. (2013). Mixture periodic GARCH models: Applications to exchange rate modeling. 2013 5th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization, ICMSAO 2013, November 2015. https://doi.org/10.1109/ICMSAO.2013.6552570
- Hamdi, F., & Souam, S. (2017). Mixture periodic GARCH models: theory and applications. Empirical Economics, 55(4), 1925–1956. https://doi.org/10.1007/s00181-017-1348-9
- Hamilton, J. (1994) Time Series Analysis. Princeton University Press, NJ.
- Hillmer, S and Tiao, G (1979) Likelihood function of stationary multiple autoregressive-moving average models, Journal of the American Statistical Association 74 (3) 652–660.
- Hipel, K. and McLeod, A. (1994) Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems. London; Amsterdam: Elsevier.
- Jones, R. H. and Brelsford, W. M. (1967) Times series with periodic structure. Biometrika 54, 403–8.
- Jose´ ,A , Sarnaglia,Q , Reisen, V , Bondon,P and Leduc,C. (2021) M-regression spectral estimator for periodic ARMA models. An empirical investigation. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment 35:653–664

- Lund, R. and Basawa, I. (2000) Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic ARMA models. Journal of Time Series Analysis 21, 75–93.
- Lund, R. Shao, Q. and Basawa, I. V. (2006) Parsimonious periodic time series modeling. Australian & New Zealand Journal of Statistics 48, 33–47.
- McLeod, A. (1994) Diagnostic checking periodic autoregression models with applications. Journal of Time Series Analysis 15, 221–33.
- Sarnaglia, A., Reisen, V. and Bondon, P.(2021) M-regression spectral estimator for periodic ARMA models. An empirical investigation. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment.
- Shao, Q. (2006). Mixture periodic autoregressive time series models. Statistics and Probability Letters, 76(6), 609–618. https://doi.org/10.1016/j.spl.2005.09.015
- Tesfay, G. (2005) Seasonal Time Series Models and Their Application to the Modeling of River Flows. (PhD). Reno: University of Nevada.
- Tesfaye, Y. Anderson, P. and Meerschaert, M. (2010) Asymptotic results for Fourier- PARMA time series. Journal of Time Series Analysis. 32, 157-174.
- Troutman, B. (1979) Some results in periodic auto regression. Biometrika 66, 219–28.
- Ursu, E. and Turkman, K. (2012) Periodic Autoregressive Model Identification using Genetic Algorithms. J. Time Ser. Anal. 33, 398–405.
- Vecchia, A.V., 1985a. Periodic autoregressive-moving average (PARMA) modeling with applications to water resources. Water Resour. Bull. 21, 721–730.
- Vecchia, A.V., 1985b. Maximum likelihood estimation for periodic autoregressive moving average models. Technometrics 27, 375–384.