الاستفادة من أنظمة الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت فى إثراء التصميم

Taking advantage of Mandelbrot class recursive function systems to enrich the design

ا.د/ إسلام محمد هيبة:
استاذ التصميم قسم التربية الفنية، كلية التربية، جامعة السلطان قابوس، سلطنة عمان – قسم التربية الفنية، كلية التربية النوعية– جامعة المنوفية، مصر.

أ.د/هشام أمين السرسى:
أستاذ التصميم قسم التربية الفنية، كلية التربية النوعية جامعة المنوفية، مصر.

أ.د/ جمعه حسين عبد الجواد:
أستاذ النسيج قسم التربية الفنية، كلية التربية النوعية– جامعة المنوفية، مصر

إيناس عبد المنعم طاحون:
باحثة دكتوراه قسم التربية الفنية، كلية التربية جامعة المنوفية–النوعية

الملخص:

تعد الطبيعة المصدر الأول لإثراء فكر المصمم، ومنها يستمد عناصره ويدرك كيفية بنائها، بمكوناتها اللانهائية من نبات وحيوان وجماد فهى أكبر مصدر لأنماط متعددة من الخطوط والأشكال والعلاقات الإيقاعية، فقد جذبت الطبيعة المصمم لدراسة نماذجها ومحاولة إدراك ما بها من أسس وقوانين بنائية تحكم نموها، وكان لعلماء الرياضيات والفيزياء دور بالغ الأهمية فى الكشف عن نظم وأسرار الظواهر الطبيعية وتفسيرها، وأستفاد الكثير من المصممين من هذه النظريات العلمية فى مجال التصميمات الزخرفية لإنتاج إعمالاً فنية مبنية على المفاهيم المختلفة لكل نظرية، وذلك من خلال المفردات الفنية والبنى التصميمية.

ويتناول البحث الحالي دراسة هندسة الفراكتال وأنظمة الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت Mandelbrot (١٩٢٤–٢٠١٠) [*] وطرق وأدوات توالدها وتحليلها للوصول الى قيم فنية جديدة تثرى مجال التصميم حيث يمكن أن تقدم لنا تكوينات لها شكل مختلف، لأن اشكال الفراكتال (الكسرية) هى أشكال تظهر ملامح متشابهة على مقاييس مختلفة، فالسمة الأساسية لها هى خاصية (التشابه الذاتى والتكرار والتفرع والتوالد والنمو) على كافة مستويات الرؤية بحيث يصبح كل جزء صغير فى الشكل هو تكرار لبناء الشكل الكلى، ويتم ذلك من خلال تطبيق معادلة رياضية عدة مرات ويهدف البحث الى استنباط خطوات عملية البناء الكسرى، ثم تطبيق ذلك على

*. بنوا ماندلبروت (Benoît B. Mandelbrot) ولد في بولندا (٢٠ نوفمبر ١٩٢٤ – ١٤ أكتوبر ٢٠١٠) هوعالم رياضيات فرنسي، معروف أنه رائد الهندسة الكسيرية .Fractal engineering هو أستاذ علوم الرياضيات في جامعة يل وزميل في مركز أبحاث توماس .ج واتسون التابع لشركة آي بي إم وتابع للمختبر الوطني في شمال غرب المحيط الهادئ.

التصميم، عن طريق إبتكار علاقات جديدة بين الكل والجزء بعيدة كل البعد عن أسس التكوين الكلاسيكية.

الكلمات المفتاحية: الفراكتلات أو الكسيريات– هندسة الفراكتال– أنظمة الدوال المتكررة.

Abstract:

Nature is the first source to enrich the artist's thought, from which he derives its elements and realizes how to build it, with its endless components of plants, animals and inanimate objects, the largest source of multiple patterns of lines, shapes and rhythmic relationships. Mathematics and physics play a very important role in revealing the systems and secrets of natural phenomena and their interpretation. Many artists benefited from these scientific theories in the field of art, especially decorative designs, in producing works of art based on the different concepts of each theory, through artistic vocabulary and design structures.

The research deals with the study of fractal geometry and systems of recurring functions of the Mandelbrot class, methods and tools for their generation and analysis in order to reach new artistic values that enrich the field of design, as it can present us with configurations that have a different shape, because fractal forms (fractional) are shapes that show similar features on different scales. It is the characteristic of (self-similarity) at all levels of vision, so that every small part of the shape becomes a repetition of building the overall shape, and this is done by applying a mathematical equation several times. New relations between the whole and the part, far from the foundations of classical composition.

Key Words: Fractals–Fractal geometry– systems of recurring functions.

المقدمة:

منذ بداية القرن العشرين بدأت الأبحاث الحديثة في مجال الفنون المعاصرة بإكتشاف جوانب متعددة تربط الفنون بالعلوم الأخرى، كالرياضيات والخوارزميات والفيزياء والميكانيكا والطب وغيرها من العلوم بمختلف إتجاهاتها الإبداعية، لغرض ايجاد مداخل جديدة وذلك بالكشف عن الجوانب المتعددة للمفاهيم العلمية التى تسهم فى فتح آفاق معرفية من خلال انخراط الفنون والعلوم معاً، تمكن المصمم من ممارسة عمله بطريقة عصرية كانت بالسابق يصعب إدراكها وتخيلها، وهنا يأتي تسليط الضوء على الطبيعة، فمفهومها في العصر الحديث لم يعد يعني تلك المظاهر والعلاقات الخارجية للأشكال، و إنما يعني انظمة محددة تجرى داخل الأشكال وقوانين تنمو الطبيعة بمقتضاها، تلك القوانين بصورها المتعددة تتحكم في نمو سائر الكائنات الحيه، بل وموجودة فى الفضاء الكوني، كما أنها موجودة فى أدق الخلايا وجزئيات المادة[١].

فالطبيعة غنية بالظواهر والأنظمة والقوانين المختلفة التي تؤخذ منها نظريات الجمال، فهى تعد مصدراً خصباً للمصمم يستقى منها ما يشاء، وهنا يأتي دور هندسة الفراكتال"Fractal" في علم الرياضيات بوصف خصائص الاشكال في الطبيعة، فهي تهتم بالتحقق من الخصائص الرياضية لبعض الاشكال والظواهر الطبيعية ومحاولة تفسيرها وفقاً لخصائصها الفراكتالية.

يذكر نايلور (Naylor ,1999)[*]أن الفراكتال يقدم لنا أشكالاً ذات قيمة جمالية كبيرة وهي ترتبط بشكل مباشر بكيفية تنظيم العالم من حولنا، ومن وجهة نظر معظم علماء الرياضيات فإنها تفجر طاقات الابداع والخيال عند المتعلمين وتعتبر هندسة الفراكتال ذو أهمية كبيرة في إثارء وتنمية التفكير الإبداعي وهي من أهم صفات الشخصية الإبتكارية لدى الفنان[٢].

وقام ماندلبروت(Benoit Mandelbrot) بدراسات واسعة وشاملة حول تلك الأشكال وسلوكها، وهو أول من أطلق كلمة كسرى (Fractal) عام ١٩٧٠ واستخدم هذا النوع من الهندسة لوصف بعض المظاهر الطبيعية التى يصعب تعريفها والتعامل معها عن طريق الهندسة التقليدية وتتميز فئه ماندلبروت بوصف الأجسام ذات التماثل الذاتى (Self similar)

---

[١] . هربرت ريد "١٦٩١" : تعريف الفن ، ترجمة:إبراهيم إمام ، مصطفى الأرنؤوطى، دار النهضة ، ص١٣.

[*]. مايك نايلور Mike Naylor: عالم رياضيات ومعلم وفنان، مدرس، باحث بيلينجهام، بواشنطن، الولايات المتحدة الأمريكية ، بكالوريوس في تعليم الرياضيات ، جامعة ولاية فلوريدا.

[2] http://www.angelfire.com/sc3/mathgroup/HEAD1.HTM.

والدوال المتكررة ، وهذا يعنى أنه لو تم تكبير هذه الأجسام فأن أجزاءها تعطى صورة مطابقة للجسم الكل وهذا التكرار يستمر أجزاء الأجزاء إلى مالا نهاية[٣].

مشكلة البحث:

من خلال دراسة ألعديد من الحركات الفنية والنظريات الرياضية لاحظ الباحثون قلة وجود مرجعيات عقلية يمكن الاعتماد عليها والاستفادة منها وتطبيقها في مجال التصميم وبما أن تحديث مفهوم التصميم أصبح ضرورة حتمية فى ظل الثورة التكنولوجية المعاصرة، التى تشكلت عبر العقود الماضية فيتوجة البحث لدراسة الهندسة الكسورية لفئة ماندلبروت حيث أنها تعتمد على منظومة ديناميكية متكررة، وبناءا عليه رأى الباحثون أنة يمكن الأستفادة من انظمة الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت فى إثراء التصميم.

وعلية يتساءل الباحثون:

- كيف يمكن الاستفادة من أنظمة الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت كمصدر مستحدث لإثراء التصميم؟

أهداف البحث:

١- إيجاد مرجعية فكرية ذات منطق رياضي يمكن الاعتماد عليها لإثراء التصميم.

٢- الكشف عن النظم الخاصة بفئة ماندلبروت من خلال تحليل البنى المختلفة لاشكالها.

٣- استخلاص قيم فنية وجمالية تعتمد فى منهجيتها على الاساس الفكرى لأنظمة الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت.

أهمية البحث: تكمن أهمية البحث في:

- تقديم حلول غير تقليدية لحل بعض المشكلات التصميمية لدارسي التصميم.
- الكشف عن آفاق جديدة تثرى مجال التصميم من خلال الربط بين العلم والفن.
- التوعية بأهمية استخلاص نظم تصميمية مبتكرة ذات اساس منطقي يعتمد على العلوم الطبيعية.

فرض البحث:

- يمكن الاستفادة من أنظمة الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت في إثراء التصميم.

منهجية البحث:

يعتمد البحث على المنهج الوصفى التحليلى.

3- M.S. Naschie, O.E.Rossler١٩٩٥; Quantum Mechanics, Diffusion and Chaotic Fractals, Elsevier, Amsterdam.

- الإطار النظري:

الدراسات المرتبطة:

١- دراسة "عادل عبد الرحمن أحمد" ٢٠٠٤[٤]:

يهدف البحث إلى تعميق المعرفة بالنظم الفراكتالية، وإمكانياتها التشكيلية والتعبيرية من خلال نظرية "الفراكتالز" للكشف عن مداخل جديدة لإثراء مجال التصميم الزخرفي، كما قدمت تعريف بنظرية الفراكتال وتاريخ نشأتها، وأبرز علمائها والتعريف الرياضي لها وكيفية الحصول على سطح "فراكتالي" كما استعرض الفراكتال بنوعية المنتظم القائم على التشابه الذاتي، وغير المنتظم العشوائي.

وتتفق الدراسة مع البحث الحالي في التعرض لمفهوم الفراكتال وكيفية الاستفادة من معطياتها والكشف عن نظم الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت لعمل تصميمات فنية مبتكره.

وتختلف هذه الدراسة عن البحث موضوع الدراسة في تناول بالنظم الفراكتالية، وإمكانياتها التشكيلية والتعبيرية فقط اما البحث الحالي يتناول دراسة فئة ماندلبروت.

٢- دراسة "عوني محمد كفطان" ٢٠٠٧[٥]:

يهدف البحث الى توليد نماذج من الاشكال الكسرية واستخراج قيم المتغيرات المرافقة لعملية التوالد تلك مع احتمالية المرافقة لكل متغير باستخدام انظمة الدالة التكرارية وذلك بتنفيذ برنامج خاص تم اعداه لهذا الغرض و تصنيف الكسيريات في ثلاث مجموعات رئيسية اعتماداً على طرق توليدها أو تعريفها الى (أنظمة الدوال المتكررة – كسيريات الانفلات الوقتي – والكسيريات العشوائية) وتصنيف الكسيريات أيضاً الى ثلاثة أنواع (تشابه ذاتي متطابق – تشابه ذاتي ظاهري – التشابه الذاتي الإحصائي .

وتتفق الدراسة مع البحث الحالي في تعريف الهندسة الكسرية والبعد الكسرى وأنظمة الدوال التكرارية وتختلف هذه الدراسة عن البحث موضوع الدراسة في التركيز على فئة ماندلبروت وأنظمتها المتكررة وطرق وأدوات توالدها وتحليلها للوصول الى قيم فنية جديدة تثرى مجال التصميم .

٤- عادل عبد الرحمن أحمد (٢٠٠٤): " نظرية الفراكتالز بين البعد العلمي والمنظور الإبداعي "، بحوث فى التربية الفنية والفنون، العدد الحادي عشر.

٥ – عونى محمد كفطان (٢٠٠٧):"استخدام أنظمة الدالة التكرارية فى توليد اشكال كسرية"، بحث منشور، مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية، جامعة تكريت، كلية الادارة والاقتصاد، المجلد ٣، العدد ٥.

٣- دراسة " محمد احمد حافظ " ٢٠٠٨[٦]:

تتناول هذه الدراسة ارتباط دراسة الفنون الطبيعية والجمال منذ نشأه الانسان على الارض وارتباطها بالنظريات العلمية وبخاصة الرياضيات والاعداد ، كما يعتقد الفيثاغورثيون ن كل الموجودات مرتبة وفق العدد ، كما يري الفيزيائيون أن جوهر الحقيقة العلمية مرتبط بالعدد فأن بناء الاشكال وجمالها قائم على أسس حسابية، وتحدث البحث حول أهمية التكامل بين الفنون التشكيلية والمعارف وما تشمله من نظريات وقوانين بمختلف أنواعها وارتباط ذلك بالتعلم وأن المعارف في طبيعتها الخام هي معارف متصلة لا ينبغي الاتجاه نحو فصلها ، ويناقش هذا البحث العلاقة بين الفنون والنظريات العلمية من خلال بنائية وجماليات التصميم التشكيلي ويعرض البعد العلمي والرياضي في التصميمات الزخرفية المتنوعة ، وتشير الدراسة الي العلاقة بين الفنون والرياضيات على مستويين يتناول المستوي الاول العلاقة بين الفنون التشكيلية والنظريات العلمية وتطبيقاتها قديما وحديثا ويقدم بعض النماذج التي يمكن تطبيقها في الدروس العلمية بأقسام الفنون في كليات التربية النوعية، أما المستوى الثاني فيلقى الضوء على النواحي الجمالية للرياضيات بأعدادها وأنماطها والعلاقة بين الرياضيات والتناسق والجمال.

وتسعى الدراسة إلى توسيع مدارك الطالب من خلال التقاطع بين التصميم والنظريات العلمية وإثرائه بالمعلومات المتشعبة تحت هذا المحور، وكيفية توظيف ذلك في بناء تصميماته المتنوعة.

وتتفق الدراسة مع البحث الحالي في ضرورة التكامل بين التصميم والنظريات العلمية وتطبيقاتها قديما وحديثا.

وتختلف هذه الدراسة عن البحث موضوع الدراسة في تناول العلاقة بين التصميم والرياضيات على مستويين يتناول المستوي الاول العلاقة بين التصميم والنظريات العلمية وتطبيقاتها قديما وحديثا والمستوى الثاني فيلقى الضوء على النواحي الجمالية للرياضيات اما البحث الحالي يتناول دراسة هندسة الفراكتالات والهندسة الكسورية لفئة ماندلبروت.

٤- دراسة " مصطفى أحمد " ٢٠٠٩[٧]:

يهدف الباحث في دارسته الى محاولة الكشف عن الارتباط بين عمليات الابداع وإنتاج التصميم التشكيلي والاستفادة من النظريات العلمية المتنوعة كمفاهيم مستحدثة في مجال

---

٦ _ محمد أحمد حافظ (٢٠٠٨): " بنائية التصميم بين المفاهيم التشكيلية والنظريات العلمية "، المؤتمر العلمى السنوى التاسع، لكلية التربية النوعية بدمياط، جامعة المنصورة.

٧ _ مصطفى أحمد (٢٠٠٩): " الإفادة من فكر السودوكو في عمل تصميمات فاركتلية مبتكرة "، بحث منشور، المؤتمر العلمي العربي الرابع الدولى الاول، كلية التربية النوعية، جامعة المنصورة.

المعرفة الفنية بوجه عام والتصميم الزخرفي بشكل خاص، ايضا الوقوف على بعض المداخل التجريبية في إثارء الثقافة البصرية في مجال التصميم وممارسة الفن، وخلاصة ما توصل إليه الباحثون أن هناك علاقة بين الفنون التشكيلية والنظريات العلمية وكيف أنها تساعد في تنمية التفكير الفني والإبداعي لدى الطلاب وممارسوا الفن من خلال الإدارك الحسي للأشياء، وأكد على ضرورة إلمام الطالب بطرق التفكير والنظريات العلمية وربطها مع بعضها البعض في تنفيذ صياغات تصميمية ناجحة ومبتكرة واتضح من خلال بحثه أيضا أن التدريب بالقدر الكاف من خلال البنية المعرفية والمهارية لفكر السودوكوو تمكن الطالب من مجال التصميم مع القدرة على الفهم والتحول والارتقاء في صياغة التصاميم الزخرفية الفاركتالية.

وتتفق الدراسة مع البحث الحالي في تناول الفراكتال وأهم خصائص اشكال الفراكتال وتصنيف نظرية الفراكتال، وتختلف هذه الدراسة عن البحث موضوع الدراسة في دراسة نظام هندسة الكسور لفئة ماندلبروت وأنظمتها المختلفة.

٥- دراسة " ريهام محمد عبد السلام " ٢٠١٨[٨]:

يهدف البحث الي التوصل لمفاهيم جديدة لأبعاد تصميم المسطحات الطباعية لأقمشة المعلقات تعتمد على معطيات نظرية الفوضى وتوظيف الأمكانات الفنية لبعض برامج الكمبيوتر الخاصة بتلك النظرية للحصول على حلول تصميمية مبتكرة وغير تقليدية كبعد جمالى لأستحداث تصميمات طباعية لأقمشة المعلقات وتناول مداخل تشكيلية جديدة لأثراء التصميمات الطباعية بصفة عامة، وتصميم أقمشة المعلقات بصفة خاصة والدراسة التطبيقية من خلال تنفيذ مجموعة من التصميمات للمسطحات الطباعية لأقمشة المعلقات بأستخدام تقنية طباعية مناسبة، ويفترض البحث وجود علاقة تبادلية تكاملية ذات دلالة إيجابية بين إستخدام نظرية الفراكتال وتصميم طباعة المنسوجات، والدراسة تقدم مدخل تشكيلى جديد ، حيث يتخذ من الخطوط التمثيلية وبالاستعانة ببعض البرامج المتخصصة للأستخدام نظرية الفراكتال وسيطاً تتبلور فيه العمليات الأنشائية المقترحة لبناء مسطحات طباعية لأقمشة المعلقات.

وتتفق الدراسة مع البحث الحالي في التحليل الفنى للعناصر الهندسية الجزيئية التابعة لنظرية الفراكتال وتناول نظرية الفراكتال خصائصها وأهم تطبيقاتها والخطوط التمثيلية وأنماطها التكرارية، وتختلف هذه الدراسة عن البحث موضوع الدراسة في دراسة نظام هندسة الكسور الانقلاب الوقتى ذات التشابه الذاتى أى أن مكوناتها متشابهة للكل مهما كانت درجة التكبير لفئه ماندلبروت وأنظمتها المختلفة.

---

٨ _ ريهام محمد عبد السلام (٢٠١٨): " نظرية الفراكتال بين التجريب والتطبيق فى تصميم المسطحات الطباعية لأقمشة المعلقات "، بحث منشور، مجلة العمارة والفنون، العدد ٨، كلية الفنون التطبيقية، جامعة حلوان.

٦- دراسة " دينا طارق كمال الدين عادلى " ٢٠٢٢[٩]:

البحث يلقى الضوء على اسلوب الفركتال وهو إحدى طرق التصميم فيعرض بعض المفاهيم والأفكار في محاولة لاستكشاف أسس التصميم بتطبيق أحد فروع الرياضيات في مجالات التصميم المختلفة وهي الهندسة الكسيرية، يتم عرض تعريفات وتاريخ وخصائص وتصنيف الفركتال ثم يتطرق لبعض الأمثلة التوضيحية للفركتال في الطبيعية ثم عرض بعض النماذج المعمارية لتوضيح فكر الفركتال ثم يتعرض لبعض الأمثلة والنماذج في التصميم الداخلي المعتمدة على الفكر ذاته بإستخدام التكنولوجيا الرقمية، ويهدف البحث الى تفعيل صياغة بنائية لا نهائية التكرار مبنية على معايير وخصائص الهندسة الكسرية (الفركتال).

وتتفق الدراسة مع البحث الحالي في الاستفاده من أشكال هندسة الفركتال وإمكانياتها التشكيلية فى إيجاد حلول إبتكارية فى تصميم، وتختلف هذه الدراسة عن البحث موضوع الدراسة في دراسة فئة ماندلبروت وأنظمتها المختلفة.

٧- دراسة " أمل صبرى عبد العزيز، هند صالح فهد " ٢٠٢٢[١٠]:

يهدف البحث الى التحول في طرق التفكير وذلك بالربط بين العلوم المختلفة مثل علم الرياضيات والفنون التي من شأنها ايجاد منطلق فني جديد في إثراء الاعمال التصويرية التجريدية المعاصرة تحليل وتصنيف الهندسة الكسرية للوصول الى قيم فنية تجريدية جديدة ويفترض البحث أن هناك علاقة بين الفراكتل (الهندسة الكسرية) وإنتاج أعمال تصويرية تجريدية معاصرة فتهتم هندسة الفراكتل "Fractal" في علم الرياضيات بوصف خصائص الاشكال في الطبيعة، فهي تهتم بالتحقق من الخصائص الرياضية لبعض الاشكال والظواهر الطبيعية و محاولة تفسيرها وفقا لخصائصها الفراكتلية و لذلك فإن هندسة الفراكتل تربط وبشكل كبير المتعلم لها بالعالم المحيط به، وتعدد أشكالها في الطبيعة من الجانب الفني يثري تفكير الفنان ويجعل من الرياضيات بيئة للفهم والتفكير واللذان يساعدان الفنان على تطوير أفكاره.

وتتفق الدراسة مع البحث الحالي في تناول الفراكتال تاريخة وهندسة الفراكتال وخصائص الفراكتال (التشابه الذاتى – البعد الجزيئى – قابلية التوسع اللانهائية – قاعدة الإحلال) وتصنيف الفراكتال وتناولة من خلال الهندسة، وتختلف هذه الدراسة عن البحث موضوع الدراسة في دراسة نظام هندسة الكسور الانقلاب الوقتى وأنظمتها المختلفة.

---

٩ _ دينا طارق كمال الدين عادلى (٢٠٢٢) : " استراتيجية الفكر التصميمى الرقمى للعمارة الداخلية بإسلوب الفراكتال "، بحث منشور، المجلة العربية الدولية للفن والتصميم الرقمى ، المجلد الأول ، العدد الأول .

١٠ _ أمل صبرى عبد العزيز، هند صالح فهد (٢٠٢٠): " تقنية الفراكتل وتوظيفها في انتاج أعمال تصويرية رقمية تجريدية "، بحث منشور، مجلة الفنون والعلوم الإنسانية، العدد ٦، كلية الفنون الجميلة، جامعة المنيا.

- **أشكال الفراكتال:**

"الفراكتل أشكال هندسية بداخل الأشياء الطبيعية لها خصائص تميزها عن غيرها تظهر متماثلة فى كافة المقاييس، فمن خلال هندسة الفراكتل يمكن فهم حالة الفوضى بصورة أفضل، حيث توجد العديد من أشكال الفراكتل، فالطبيعة فى الواقع زاخرة بها، ومن أفضل الأمثلة لها شواطئ البحار والمحيطات فتختلف رؤيتنا بإختلاف بعدنا أو قربنا منها[١١] شكل (١)[١٢].

شكل (١) يوضح العديد من الأنماط التكرارية الشبكية المتفرعة فى الانهار التى تشكلت من تأكل التربة والصيغ المتكررة فى ورق الشجر و نبات القرنبيط رومانسكو (Romanesco broccoli) حيث أن كل البراعم الصغيرة تتكون من براعم أصغر

"هناك بعض العلماء الذين عرفوا الفراكتال على أنها الوصف الهندسي للأشكال ذات الأبعاد وهناك من عرفها على أنها الشكل الذي يكرر نفسه Self Similarity ولكن بمقياس مختلف أو بإستخدام معامل اختزال بحيث أنه إذا تم تكبير جزء معين من الرسم فأنه يشبه الرسم الأصلي[١٣].

تعد هندسة الفراكتال نموذج للرياضيات العصرية التي ظهرت نتيجة نظريات حديثة في مجالات وأفرع التوبولوجي، ونمت بتقدم علوم الكمبيوتر وأساليبه وتطبيقاته في الرسوم والنمذجة وهي فرع من فروع الرياضيات يختص بدراسة سلوك وخصائص الأشكال غير المنتظمة والتي يصعب دراستها بالهندسة الإقليدية، وهي هندسة الطبيعة حيث تصف الطبيعة حولنا من جبال وسحب وأشجار بالإضافة لكونها نموذجاً يحتضن التصميم الرياضي القديم والحديث.

- **نشأة هندسة الفركتال:**

تمتد جذور نشأة هندسة الفراكتال إلى القرن الرابع عشر على يد العالم الرياضي والفيلسوف ليبنز (Leibniz) والذي ابتكر فكرة التشابه الذاتي التكراري – Recursive Self

11- Forum.elhassade.com/print.php?l529.

12- https://www.ibelieveinsci.com/%D8.

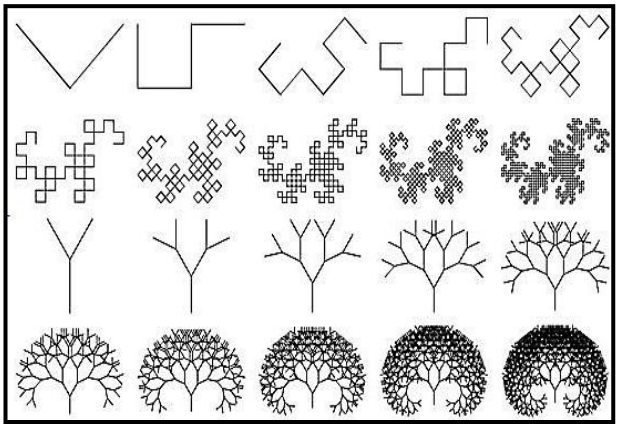
١٣_ ولاء فوزي المغاوري أبو النجا (٢٠١٣): " أنظمة الفوضى وفاعليتها في توليد الأفكار التصميمية وتحسين مظهر المنتج المعدني"، رسالة دكتوراه، غير منشورة، كلية الفنون التطبيقية، جامعة حلوان، ص٤٠.

Similarity وذلك من خلال تعريفه للخط المستقيم على أنه منحنى أي جزء من هذا المنحنى يشبه المنحنى ككل.

اسم فراكتال (Fractal) مشتق من الفعل اللاتيني (Fractus) ويعني يفتت او يكسر، ولذلك يترجم البعض هندسة الفراكتال Fractal Geometry)) بالهندسة الكسورية او هندسة الفتافيت وتعرف نظلة خضر الفراكتالات على أنها أشكال غير منتظمة(خشنة، متعرجة) لها نفس المظهر بأي (تكبير – تصغير) فجزء صغير من الشكل يبدو كأنه مثل الشكل الكلي[١٤].

وقد عرف جيمس جلايك James Gleick(١٩٥٤) [*]هندسة الفراكتال بأنها الهندسة التي تحاكي الطبيعة في خشونتها، وعدم استوائها، أو دقة حوافها، وأنها هندسة الأشياء المتراكمة، والكومة، والمجعدة، والملتوية، والملتفة، ومما سبق يمكن القول إن هندسة الفراكتال هي هندسة الأشكال غير منتظمة (خشنة ومتكسره) والتي تتكون من أجزاء غير منتهية متداخلة، مختلف القياسات، هذه الأجزاء هي صورة مصغرة من الشكل الأساسي.

- **طرق توليد وتشعب وتكرار اشكال الفراكتال:**



شكل (٢) مثال على مراحل التوالد والتكرار فى نماذج من اشكال الفراكتال من شكل بسيط إل شكل أكثر تعقيدا

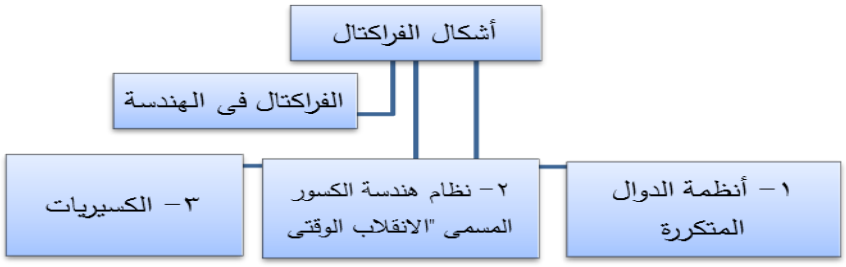
يبدأ الفراكتال بشكل هندسي بسيط يتشعب إلى شكل أكثر تعقيدا بعد عدة عمليات تكرارية متعاقبة وهذا الشكل البسيط يسمى " البدائي Initiator " فإذا كان مربع على سبيل المثال، فأنه يتحول ويتشعب بإعادة تحريك كل من جوانبه بشيء أخر يسمى (المولد Generator) ثم يتطور ويتشعب الشكل الناتج بإعادة تحريك كل من أجزائه بواسطة المولد ثم تتكرر هذه العملية فينتج شكل أكثر وأكثر تعقيداً، وفى نفس الوقت هو على درجة كبيرة من نفس الشبه بالشكل الهندسي الأولى البسيط ولكن مع الفارق في اختلاف الحجم فقط كما هو موضح شكل (٢)[١٥].

---

[١٤] _ جيمس جلايك "٢٠٠٠": "الهيولية تصنع عالماً جديداً، ترجمة: على يوسف على، المجلس الأعلى للثقافة، ص٨٢.

[*] جيمس جلايك (James Gleick) :هو كاتب وصحفي ومحرر أمريكي، من مواليد ١ أغسطس عام ١٩٥٤، اشتهر جيمس بكتاباته التي تتناول نواحي العلوم والتكنولوجيا،ولد في مدينة نيويورك وحصل على ليسانس في اللغة الإنكليزية والانسانيات من جامعة هارفارد في العام ١٩٧٦.

[15]-http://www.oloommagazin.com/Articles/ArticleDetails.aspx?ID=21 .



رسم تخطي رقم (2) تصنيف الفراكتال (Fractals) وتناوله من خلال الهندسة

تتعدد طرق توليد وتكرار الاشكال الفراكتاليه وتعد طريقة الدوال المتكررة هي الاكثر استخداما:

– الفراكتال فى الهندسة (Geometric Fractals) :

١ – أنظمة الدوال المتكررة:

يقصد بالدوال المتكررة استخدام نواتج أية دالة أو عملية في أية مرحلة كقيمة لنفس الدالة في المرحلة التالية، أي أن التكرار هو عملية يكون خلالها مخرج المرحلة الأولى هو مدخل للمرحلة الثانية، وترتبط عملية الدوال المتكررة بعملية توليد الفراكتالات المشهورة، وفيما يلي عرض أمثلة لطرق توليد هذه الفراكتالات بطريقة الدوال المتكررة[١٦].

تعتمد آلية انظمة الدالة التكرارية على التحولات الافينية (Affine Transformation) لتعريف صورة ما (Image) والتحويل الافيني هو تركيب من عمليات التدوير Rotation والتحريك Transformation والتكبير أو التصغير للأشكال في فضاء متعدد الابعاد.

الان لو اخذنا فضاء ذو بعدين فأن التحويل الافينى لهذا الفضاء يكون[١٧]:

$$W=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{bmatrix}$$

[١٦] _ ريهام محمد عبد السلام (٢٠١٧):"نظرية "الفراكتال" بين التجريب والتطبيق فى تصميم المسطحات الطباعية لأقمشة المعلقات"، بحث منشور، مجلة العمارة والفنون، العدد ٨، ص٧.

[17]- J.C. Sprott, (1994): Automatic Generation of Iterated Function Systems, Computer and Graphics, Vol.18,No.3,pp 417 – 425

اذ يمثل كل من (a,b,c,d) معاملان الدوران (Rotation Factors) فى حين يمثل كل من (e,f) معاملان الانتقال، والملاحظ فى هذه العملية أنه عند تطبيق التحويل على صورة معينة فأن الناتج هو نموذج مصغر من الصورة الاصلية.

ويشمل نظام الدالة التكرارية العديد من تيك التحويلات، ولكل تحويل احتمالية خاصة به، وان مجموع جميع الاحتمالات للتحويلات ضمن النظام الواحد يساوي واحد، وتم كتابة وإعداد برنامج خاص تم فيه استخدام طريقة التكرارية للحصول على أشكال كسرية مختلفة كما تم حساب قيم المتغيرات لكل شكل كسري من هذه الأشكال مع حساب الاحتمالية المرافقة لكل من المتغيرات فى هذه الأشكال وادناه الخوارزمية الخاصة بهذا البرنامج[١٨]:

```
Main Procedure
 Step1: Put Initial Value a,b,c,d,e,f,p, Max-iteration
Step2: Call Image-Draw
Step3: end
 Image-Draw Procedure
 Step1: Set X=0, Y=0
Step2: For I=1 To   Max-iteration
 Step3: J=rand( )
Step4: k= (J<P[0]) ?0: ((J<P[1] ?1: (J<P[2]) ?2:3))
Step5: new X=a[k]* X + b[k]*Y+ e[k]
Step6: Y= X=c[k]* X + d[k]*Y+ f[k]
 Step7: X= new X
Step8: Putpixel (X,Y, Color)
Step9: Next I
Step10: Return
```

- **الفراكتال ومجموعة ماندلبروت:** (Mandelbrot)

تعد مجموعة ماندبريت من أشهر وأعقد الفراكتالات المعروفة حتى الأن كما تعد مجموعة جوليا مجموعه جزئية منها ، حيث اهتم ماندبريت بدراستها في البداية إلى أن استطاع في عام ١٩٧٨ من كتابه برنامجه الخاص فاكتسبت خصائص أكثر فراكتالية مما جعلها غاية في الثراء في تعقيدها كلما زادت المقاييس دقة، وهى مجموعة متفرعة من الشكل الدائري في المركز لأنها تحتوى على أنماط ونسخا كثيرة من نفسها على عمق كبير كل واحدة فريدة من نوعها وتحتوى على العديد من المجموعات بالتساوي[١٩].

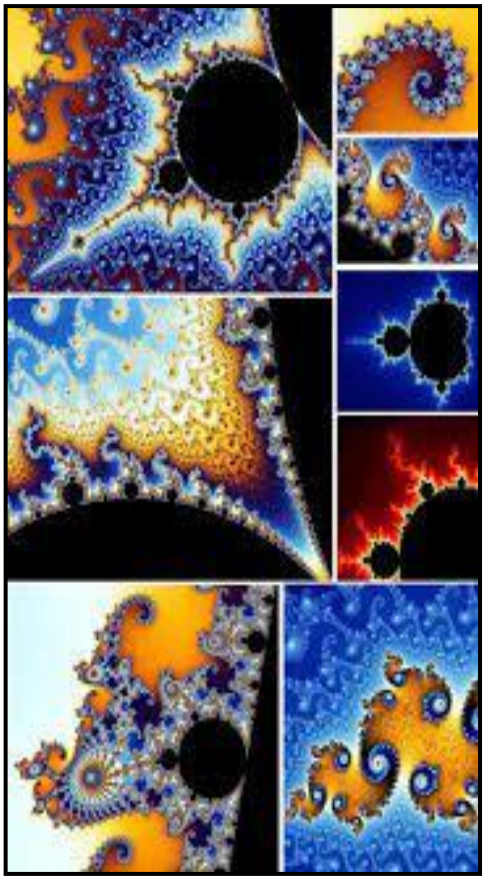
---

[١٨] _ عونى محمد كفطان (٢٠٠٧):"استخدام أنظمة الدالة التكرارية فى توليد اشكال كسرية"، بحث منشور، مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية، جامعة تكريت، كلية الادارة والاقتصاد، المجلد ٣، العدد ٥، ص١٨٦.

[19]– Oliver Deussen, Bernd Linter Mann (2005): " Shaos " Digital Design of Nature: Computer Generated Plants and Organics " Springer – Verlage Berlin Heidelberg, p.64.

حيث وصل لفهم طبيعة ما يطلق عليه بالعشوائية، عن طريق نمازج رياضية بسيطة ومن خلال هذا المنهج الهندسي أصبحت الظواهر التي يصعب اختراقها مجرد مسائل رياضية بسيطة. وهكذا وضع ماندبروت مخططا تمهيديا لهندسة جديدة، وهي هندسة الطبيعة وقد أسماها بالهندسة الجزئية وقدم هندسة التشعبات الحديثة.

قرر (ماندلبروت) حل معضلة أثارها عالم رياضات فرنسي شاب يدعي"كاستو جوليا Casto Julia" التي كان "جوليا" يحاول فيها أخذ معادلة رياضية بسيطة ثم يكررها فيخرج برقم ثم يدخل ذلل الرقم في المعادلة نفسها ويكررها مره بعد الأخرى والنتيجة أن مجموعة الأرقام الناتجة ستكون مجموعة تدعي (مجموعة جوليا Julia Groub) فهي تتكون من قيم تشكيلية صغيرة فأي أضطراب يسبب تغيرات جذرية في تسلل التكرار ليعطي قيم تشكيلية غير متوقعة، ولكن العمل يدويا لا يوصل لأي نتيجة مرضية لمعرفة شكلها النهائى في محاولةً تجسيدها بيانياً، كان يجب تطبيقها من خلال أجهزة الكمبيوتر شكل (٤) [٢٠]، وأستطاع متندابروت بمساعدة شركة (IBM) إستخدم الكمبيوتر لتكرار معادلات (مجموعة جوليا) وتكرارها ملايين المرات ، وهى محاولة لم تكن متاحة لجوليا ، وكانت النتيجة من تلك المعادلات أختراق علمي ففى



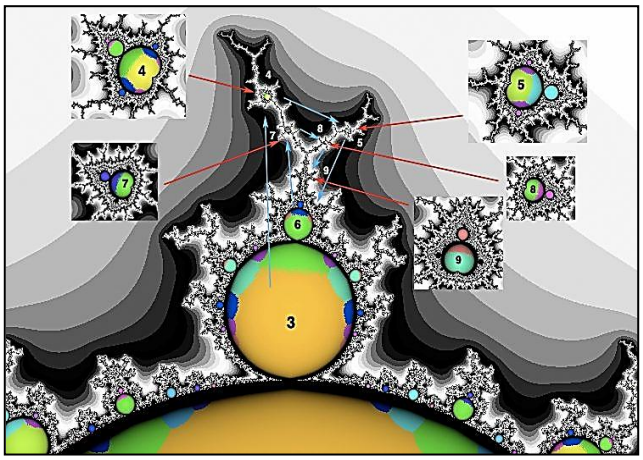
شكل (٤) مجموعة الهندسة التشعبية أو مجموعة ماندلبروت ويتضح فيها مدي التنوع والتوافق المنظم بين العناصر بتكراراتها الرقمية المتزايدة

[٢٠] _ أيسر فاهم وناس ٢٠١٦: مورفولوجيا التصميم البارامتري كمدخلٌ ثراء الأشكال متعددة الأسطح"، رسالة دكتوراة، غير منشورة، كلية التربية الفنية، جامعة حلوان، ص٣٩.

عام ١٩٨٠ ، توصل ماندلبروت لابتكار معادلة خاصة به ، أساسها مجموعة جوليا وقدمها فى صورة واحدة، وأصبحت تعرف (مجموعة الهندسة التكرارية التشعبية) أو (مجموعة ماندلبروت) [٢١].

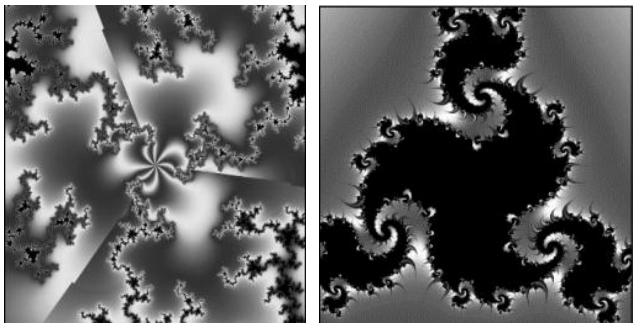
٢- نظام هندسة الكسور المسمى (الانقلاب الوقتى):

تعتبر من الكسور ذات التشابه الذاتى أى أن مكوناتها متشابهة للكل مهما كانت درجة التكبير وغالباً ما يتم تشكيل الأجسام الجزئية عن طريق عمليات تكرارية متشابكة توالدية من نقطة فى الفراغ بتكبيرها فأنها تظهر تفاصيل جديدة تشابه الأصل[٢٢] شكل (٥)،(٦)[٢٣].



شكل (٥) يوضح االتشابة الذاتى والدوال المتكررة لفئه ماندلبروت

ومن هنا يتضح أنه يتم توليد الهيكل الفراكتالى لفئة ماندلبروت إما عن طريق تنميتة بشكل متكرر من بنية وحدة، أو أنشاء انقسامات في الوحدات الأصغر حجما من الشكل المبدئي.


شكل (٦) بعض التصميمات بأسلوب الفراكتال الغير منتظم ويظهر فيها مدى التماثل بين المفرادات أو الوحدات الصغيرة والشكل الكلى

٣- الكسور العشوائية (الغير منتظمة):

تتميز تلك الكسيريات بخاصية التشابة الاحصائي، أى ان الجزء من الشكل يماثل بصورة إحصائية الشكل نفسه، أى انه قد يحتوي الشكل العشوائي على منطقتان ذواتا مقاسين مختلفين، فإنهما يظهران إحصائيا بالمظهر نفسه إذا تم تكبير المنطقة الصغري بنفس مقدار المنطقة الكبرى شكل (٧)[٢٤]، وتولد من خلال

---

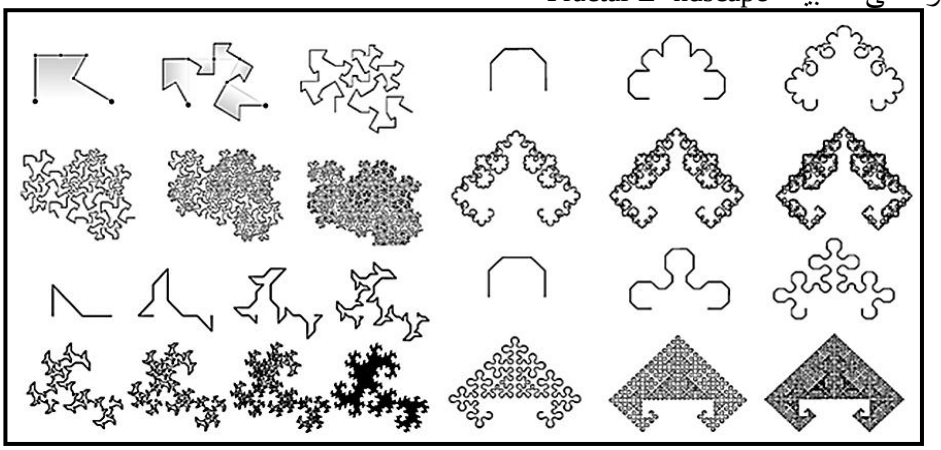
[21]-Falconer,Kennet.Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2003, p.23.

[٢٢] _ جيمس جلايك "٢٠٠٠": "الهيولية تصنع عالماً جديداً، ترجمة: على يوسف على، المجلس الأعلى للثقافة، ص٨٨.

[23]-https://dhushara.com/DarkHeart/.

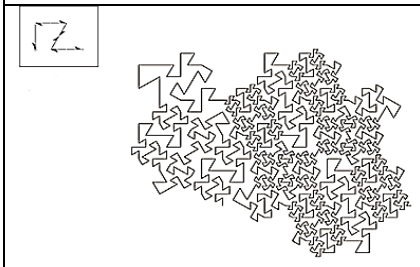
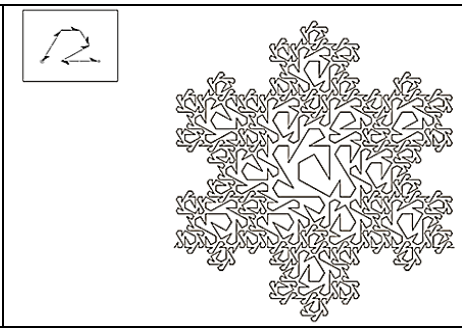
24-https://www.du.edu.eg/upFilesCenter/spe/1587895614.pdf/.

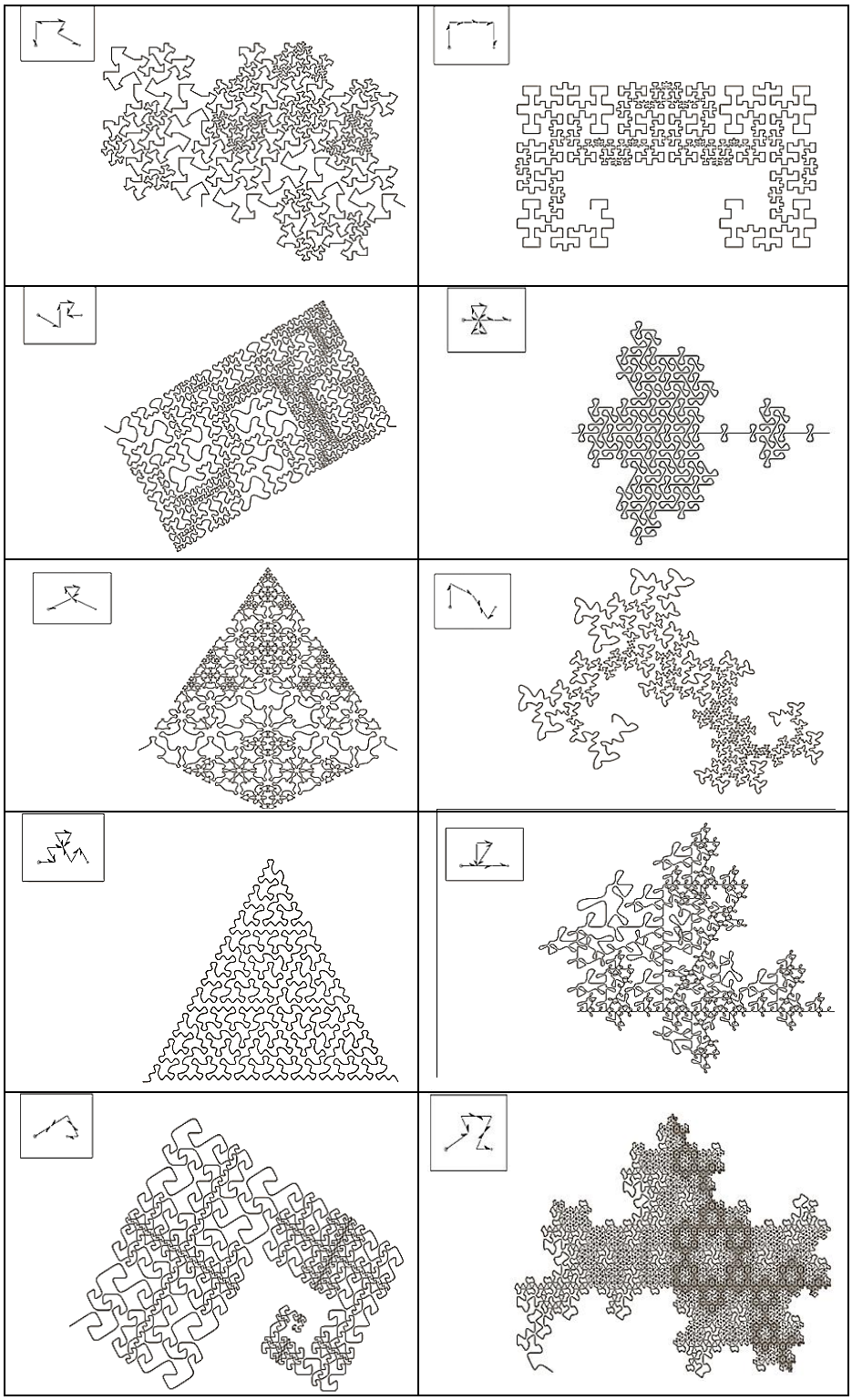
إجراءات مختارة بشكل عشوائي بدلا من أن تكون محددة، ومثال على ذلك المناظر الفراكتالية الموجودة في الطبيعة Fractal Landscape .



شكل (٧) مجموعة من النماذج للأنماط التكرارية المتشعبة لنظرية الفراكتال (النظم الخاصة بفئة ماندلبروت)

ومن هنا نستطيع القيام بالعديد من التجارب التحليلية المستمدة من الأساس العلمى لنظرية "الفراكتال" والنظم الخاصة بفئة ماندلبروت والمعتمدة على الأنماط التكرارية المتشعبة والأستفادة منها فى عمل أفكار تصميمية متنوعة بشكل يحقق القدرة على أضافة الجديد والإبتكار المستمر والتحكم فى عناصر بناء العمل الفنى وعلاقتها التشكيلية مع بعضها البعض والتناول الشكلى والجمالى الذي يجمع بين تلك العناصر من خلال مجموعة من الأسس والضوابط التى يتحقق من خلالها عمل فنى يتمتع بالعديد من القيم الفنية والتشكيلية، وفيما يلى بعض النماذج التي توضح التطبيق العملي لفكر نظرية الفراكتال وفئة ماندلبروت:

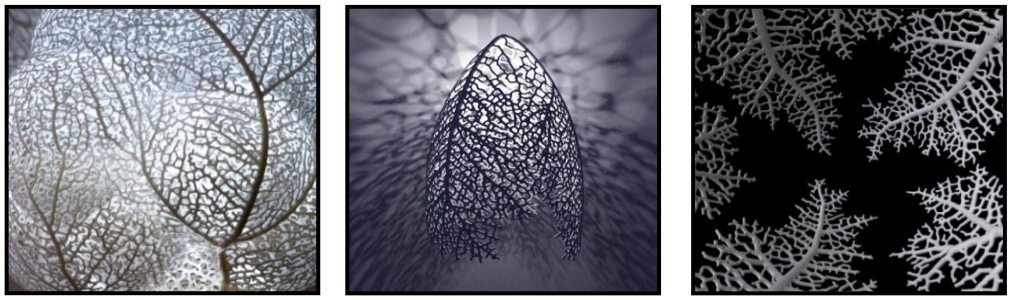
استخلاص مجموعة من النظم البنائية المبتكرة التى يمكن الأستفادة منها فى عمل أفكار تصميمية متنوعة	
	



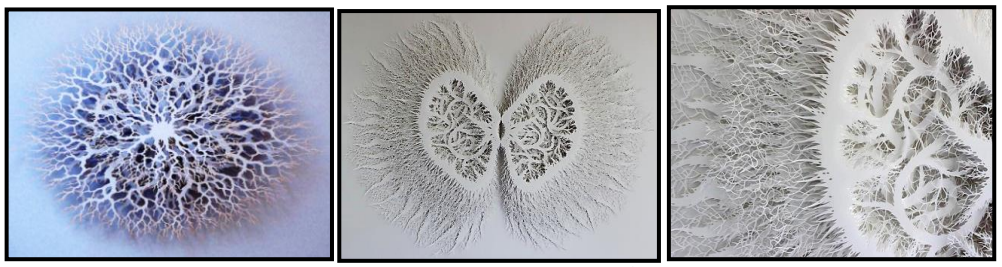
ويمكن استخلاص المنطلقات التالية:

- التكرار المتوالد وتحقيق النمو.
- التطور الشكلي من السهل الى المعقد، ومن البسيط الى المركب.
- الحركة والاستمرارية والامتداد البصري.
- القيم الملمسية والنظم الشكلية.
- الوحدة الشكلية والربط البصري.
- العلاقات التناسبية بين الجزء ومجموع الاجزاء.

كما اعتمد على ذلك الفكر البنائي مجموعة من المصممين المعاصرين والمستمد من مجموعة واسعة من التشكيلات الطبيعية التي لطالما كانت مثيرة للاهتمام ومصدر إلهام للفنانين والمصممين بشكل منهجي فهى أكثر من مجرد نسيج فتتجاوز القيود المفروضة على الزخرفة الصارمة فهى تشكيلات ديناميكية، وتتواصل بها الصيغة التكرارية المتشعبية في الرحلة الإنشائية للعمل الفني من خلال تنوع الإيقاع، من إيقاع منتظم ومتقطع ومتواتر ومتناوب .



شكل (٩) مستوحاة من الرسومات التي رسمها عالم الأحياء والطبيعة الألماني "ارنست هيجلErnst Haeckel "* ، ابتكر المصممين هيلدن و دياز حزمة معقدة والمتكررة من الجذور والشجيرات وفروع الأشجار المتشابكة والمتشعبةالتي تخلق غابة من الظلال بزاوية ٣٦٠ درجة عندما تضيء من الداخل



شكل (١٠) تشكيلات من الورق دقيقة جداً للفنان "روغان بروان Rogan Brown"* والذي يعتمد على العناصر الطبيعية المتكررة مثل المرجان وأوراق الشجر والنباتات وعلى الصور المجهرية مثل صور الخلايا والتى تظهر التشعبات المتداخلة والمعقدة والمتكررة ويستغرق العمل الواحد وقت طويل نظراً لدقته وتعقيداته وتعدد طبقات العمل الفني .

كما يستند الى البنية والتركيب والتأليف بين مختلف العناصر فكل قطعة في هذه السلسلة هي فريدة من نوعها وهي نتيجة فريدة لنظام جديد يحكي قصة دمج الطبيعة بالتكنولوجيا شكل (٩) [٢٥]،(١٠)[٢٦].

شكل (١١) عمل للفنان بول غرفيتس Paul Griffittsتصميم

شكل (١٢) تصميم رقمى الفنانة جانيت بارك (Janet Parke)

وأهتم الفنان بول غرفيتس (Paul Griffitts 1955) بعناصر التصميم وأسسه حيث أكد على عملية تكرار الوحدات بأحجام متناهية الصغر ولانهائية وهو أسلوب يعتمد عليه بعض الفنانون عندما يتعلق الأمر بالفراكتال وقد اتبع أحد الخصائص المشهورة للفراكتال وهو التكرار والتشابة الذاتى مما يجعلها فريدة وجذابة للعين شكل (١١) [٢٧]

---

[25]- https://vimeo.com/nervoussystem/about..

26- https://roganbrown.com/home.htm١..

*. ارنست هيجل (ErnstHaeckel1834-1919) : كان فيلسوفا وعالم أحياء ألماني قام باكتشاف الآلاف من أنواع الكائنات الحية، ومكتشف علم البيئة ، قام بتقديم نظريات تشارلز داروين في ألمانيا و طور نظرية حول أصل الإنسان كان هيجل طبيب ثم أستاذ لعلم التشريح المقارن و كان من أوائل العلماء الذين اعتبروا ان علم النفس هو فرع من علم الفيزيولوجيا.

*. روغان بروان "Rogan Brown" : فنان بريطاني مقيم في فرنسا درس في لندن وحصل على درجة البكالوريوس من كلية جولدسميث وماجستير من QMW College، قام بمحاولة ناجحة ومبتكرة لخلط عالم العلوم بعالم الفن ، يستخدم روغان فنه لاستكشاف الحدود بين دراسة الملاحظة والتفسير الفني ، حصل على جائزة أفضل فنان ناشئ في مسابقة National Open Art لعام ٢٠١٤ وأفضل تركيب في ٢٠١٣.

[٢٧] _ هند صالح فهد ٢٠٢٠: " تقنية الفراكتال وتوظيفها في انتاج أعمال تصويرية رقمية تجريدية "، مقالة بحثية ، مجلة الفنون والعلوم الانسانية ، كلية التصميم والفنون ، جامعة جدة ، ص١٣٨.

وأعمال الفنانة جانيت بارك (Janet Parke) التى يتضح بها التكرار للوحدة المستخدمة مع الإختلاف فى الحجم والوضع والتكوينات الهندسية المتشابهة على كافة المقايس التى تخضع لعلاقات انشائية ونظم ايقاعية من خلال التكرار الرقمي المتماثل للعنصر التشكيلي فينتج عنها بنايات تصميمية وعلاقات شكلية تتميز بقيم سطحية غاية في الدقة والابداع شكل (١٢)[٢٨]

خاتمة:

من هنا يتضح أنه يمكن من خلال نظرية الفراكتال والنظم الخاصة بفئة ماندلبروت استحداث قيم فنية وجمالية مبتكرة تعتمد فى منهجيتها على الاساس الفكرى لأنظمة الدوال المتكررة لفئة ماندلبروت ويمكن الاعتماد عليها كمرجعية فكرية ذات منطق رياضي لإثراء التصميم.

نتائج البحث:

١- إن الطبيعة وما تحويه من عناصر ليست عشوائية وإنما هناك نظام وبناء وقوانين متكاملة لتكوين وتنظيم تلك العناصر.

٢- تقدم النظريات العلمية حلولا جديدة للبنية التصميمية للهندسة الكسرية من خلال تحليل هندسة الكسور لفئه ماندلبرون والتى تقدم للمصمم إمكانيات التخيل اللانهائي مما يوسع مدارك المصمم الفنية لمواكبة مستجدات العصر.

٣- الفراكتال بشكل عام وفئه ماندلبروت بشكل خاص تقدم أشكالا ذات قيمة جمالية كبيرة وترتبط بشكل مباشر فى كيفية تنظيم العالم من حولنا، فهى تفجر طاقات الإبداع والخيال عند الباحثين والمصممين، لما لها من أهمية كبيرة فى إثراء وتنمية التفكير والإبداع.

٤- معرفة أسس الهندسة الكسرية يكسب المصمم مزيداً من مهارات الاكتشاف في التصميم واستحداث أشكال جديدة من خلال مهارات ربط الأشكال في الطبيعة بالخصائص الرياضية لفئة ماندلبروت لأجزائها المختلفة.

٥- استخلاص مدخلات تصميمية جديدة تعتمد على نظم الفراكتال تؤكد على الدور التنظيمي والتوزيع التكرارى للعناصر والقيم الفنية والجمالية .

[28]-https://plus.google.com/+JanetParke.

التوصيات:

فى ضوء ما أسفر عنه البحث من نتائج واستنتاجات، يوصى الباحثون بما يلي:

١- فتح آفاق جديدة ورؤى تجريبية تتبنى حرية الإبداع في التصميم من خلال استثمار نتاج علم الهندسة الجزئية بطرق وأساليب تطبيقية.

٢- ضرورة انفتاح مجال التصميم على العلوم المختلفة لتتسع الرؤية، خاصة العمل على ربط التصميم بعلم الهندسة والرياضيات، مما يؤدى الى إثراء العملية التصميمية والخروج بتكوينات غير تقليدية تحمل قيم جمالية مبتكرة.

٣- عمل مزيد من الدراسات والبحوث التي تهتم بالبناء المنطقي للوحة الزخرفية والتي تعتمد على النظم الخاصة بفئة ماندلبروت

٤- استمرار البحث حول هندسة الفراكتال وانماطها الشكلية للإفادة منه في التطبيق العلمي لمجالات مختلفة من التربية الفنية.

المراجع:

- أيسر فاهم وناس (٢٠١٦): مورفولوجيا التصميم البارامتري كمدخلٌ ثراء الأشكال متعددة الأسطح"، رسالة دكتوراة، غير منشورة، كلية التربية الفنية، جامعة حلوان.
- أمل صبرى عبد العزيز، هند صالح فهد (٢٠٢٠): " تقنية الفراكتل وتوظيفها في انتاج أعمال تصويرية رقمية تجريدية "، بحث منشور، مجلة الفنون والعلوم الإنسانية، العدد ٦، كلية الفنون الجميلة، جامعة المنيا.
- جيمس جلايك (٢٠٠٠): "الهيولية تصنع عالماً جديداً، ترجمة: على يوسف على، المجلس الأعلى للثقافة.
- دينا طارق كمال الدين عادلى (٢٠٢٢): " استراتيجية الفكر التصميمى الرقمى للعمارة الداخلية بإسلوب الفراكتال "، بحث منشور، المجلة العربية الدولية للفن والتصميم الرقمى، المجلد الأول، العدد الأول.
- ريهام محمد عبد السلام (٢٠١٧):"نظرية "الفراكتال" بين التجريب والتطبيق فى تصميم المسطحات الطباعية لأقمشة المعلقات"، بحث منشور، مجلة العمارة والفنون، العدد ٨
- عونى محمد كفطان (٢٠٠٧):"استخدام أنظمة الدالة التكرارية فى توليد اشكال كسرية"، بحث منشور، مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية، جامعة تكريت، كلية الادارة والاقتصاد، المجلد ٣، العدد ٥.
- عادل عبد الرحمن أحمد (٢٠٠٤):"نظرية الفراكتالز بين البعد العلمي والمنظور الإبداعي"، بحوث في التربية الفنية والفنون، العدد الحادي عشر.
- محمد أحمد حافظ (٢٠٠٨): " بنائية التصميم بين المفاهيم التشكيلية والنظريات العلمية "، المؤتمر العلمي السنوى التاسع، لكلية التربية النوعية بدمياط، جامعة المنصورة.
- مصطفى أحمد (٢٠٠٩): "الإفادة من فكر السودوكو في عمل تصميمات فاركتلية مبتكرة "، بحث منشور، المؤتمر العلمي العربي الرابع الدولى الاول، كلية التربية النوعية، جامعة المنصورة.
- ولاء فوزي المغاوري أبو النجا (٢٠١٣): "أنظمة الفوضى وفاعليتها في توليد الأفكار التصميمية وتحسين مظهر المنتج المعدني"، رسالة دكتوراه، غير منشورة، كلية الفنون التطبيقية، جامعة حلوان.
- هربرت ريد "١٦٩١": تعريف الفن، ترجمة: إبراهيم إمام، مصطفى الأرنؤوطى، دار النهضة.

- هند صالح فهد ٢٠٢٠: " تقنية الفراكتال وتوظيفها في انتاج أعمال تصويرية رقمية تجريدية"، مقالة بحثية ، مجلة الفنون والعلوم الانسانية ، كلية التصميم والفنون ، جامعة جدة، ص١٣٨.

المراجع الأجنبية:

- C. Sprott, (1994): Automatic Generation of Iterated Function Systems, Computer and Graphics, Vol.18, No.3.
- Falconer, Kennet.Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications. West Sussex (2003): John Wiley & Sons Ltd.
- M.S. Naschie, O.E.Rossler1995; Quantum Mechanics, Diffusion and Chaotic Fractals, Elsevier, Amsterdam.
- Oliver Deussen, Bernd Linter Mann (2005): " Shaos " Digital Design of Nature: Computer Generated Plants and Organics " Springer – Verlage Berlin Heidelberg .

المواقع الالكترونية:

- http://www.angelfire.com/sc3/mathgroup/HEAD1.HTM.
- Forum.elhassade.com/print.php?l529
- http://www.oloommagazin.com/Articles/ArticleDetails.aspx?ID=21.
- https://dhushara.com/DarkHeart/.
- https://vimeo.com/nervoussystem/about.
- https://roganbrown.com/home.htm١.
- https://www.du.edu.eg/upFilesCenter/spe/1587895614.pdf/.
- https://www.ibelieveinsci.com/%D8.