مجلة كلية التجارة للبحوث العلمية
كلية التجارة
جامعة الإسكندرية

العدد الثاني – المجلد الخامس والخمسون – يوليو ٢٠١٨

دراسة محاكاة لتقييم بعض مقدرات إنحدار ريدج

أ / أحمـد قاروصــة

مدرس مساعد بقسم الإحصاء والرياضة والتأمين

كلية التجارة– جامعة الاسكندرية

A Simulation Study for Evaluation of some Ridge Regression Estimators

ملخص البحث

يستخدم مقدر انحدار "ريدج" كبديل لمقدر طريقة المربعات الصغرى العادية في ظل وجود مشكلة الازدواج الخطي. وقد تناولت كثير من الدراسات السابقة طرقا مختلفة لاختيار معلمة ريدج. وتهدف الدراسة الحالية إلى تقييم عشرون مقدر من مقدرات انحدار ريدج المختلفة باستخدام دراسة المحاكاة وبالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ للمقدرات. وقد وجدت دراسة المحاكاة أن الزيادة في درجة الارتباط وتباين حد الخطأ العشوائي وعدد المتغيرات المفسرة له تأثير سلبي على متوسط مربعات الخطأ. بينما زيادة حجم العينة تؤدي إلى الانخفاض في متوسط مربعات خطأ المقدرات عند القيم الكبيرة من درجة الارتباط بين المتغيرات، وتباين حد الخطأ العشوائي. وبصورة عامة يمكن القول وفقا لنتائج دراسة المحاكاة، أن مقدرى Muniz and Kibria (2009)، ومقدر Lawless and Wang (1976)، ومقدر Al-Hassan (2010)، ومقدر Kibria (2003) أفضل من باقي المقدرات المقارنة من حيث أن لهم أقل متوسط مربعات خطأ.

Abstract

Ridge regression estimator has been introduced as an alternative to the ordinary least squares estimator (OLS) in the presence of multicollinearity. Several studies concerning ridge regression have dealt with the choice of the ridge parameter. In this article, a simulation study has been conducted to evaluate the performance of 20 ridge regression estimators based on the mean squared error (MSE) criterion. Based on the simulation study, it is found that as the number of correlated variable increase, and the correlation between the independent variables increase, the MSE also increase; while When increaseng the sample size, it is found that MSE decreases even when the correlation between the independent variables and the variance of the random error are large. The simulation study indicates in general that the estimators K1-1, K12 (Muniz and Kibria, 2009), K3 (Lawless and Wang, 1976), K13 (Al-Hassan, 2010), and K6 (Kibria, 2003), perform well compared to the other estimators.

مقدمـــــــة

بافتراض نموذج الانحدار الخطي التالي

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (١)$$

حيــث $Y_{n\times 1}$ متجــه مــن مشــاهدات متغيــر الاستجابة Response (أو التابع Dependent)، والمصفوفة $X_{n\times p}$ كاملة الرتبة Full Rank، مع p مــن المتغيــرات المفســرة Explanatory غيــر العشوائية Nonstochastic، و $\beta_{p\times 1}$ متجه المعالم المطلوب تقديرها، و $\varepsilon_{n\times 1}$ متجه الخطأ العشوائي بمتوســط يســاوي الصــفر، ومصــفوفة تبــاين وتغاير Variance Covariance Matrix هى $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$، حيــث I_n مصــفوفة الوحــدة Identity، وقيمــة σ^2 مجهولــة وترمــز لتبــاين حــد الخطــأ العشــوائي. وحــين تكــون المتغيــرات X و Y "معــايرة" Standardized فــإن المصــفوفة (X^tX) تكون هى مصفوفة الارتباط بين المتغيرات المفسرة والتي تحتوي على معاملات الارتباط البسيطة بين كـل زوج مـن المتغيـرات، ويمثـل المتجـه (X^tY) الارتباطـات بـين متغيـر الاسـتجابة Y وكـل متغيـر مفسر X_j.

ويكــون مقــدر المربعــات الصــغري العاديــة Ordinary Least Squares (OLS) هو:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{Y} \qquad (٢)$$

حيث:

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}\, Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1} \qquad (٣)$$

وتنشأ مشكلة "الازدواج الخطي – Multicollin eartiy" عند محاولة توفيق نموذج الانحدار حال وجود متغيرات مفسرة مرتبطة مع بعضها البعض.

وفي هذه الحالة يكون لمقدر OLS عددا من الخصـائص غيـر المرغوبـة، مثـل "عـدم الاسـتقرار" Instability وتضـــخم القـــيم المطلقـــة، وتضـــخم التباينات بالاضافة إلى الاشارات الخطأ.

يوجـد هنــاك مــدخلان لعــلاج مشـكلة الازدواج الخطـي وتحسين مقدر OLS. يركز المدخل الأول علـى إيجـاد مقـدرات لهـا "متوسـط مربعـات خطـأ" MeanSquared Error (MSE) أقل من مقدرات المربعات الصـغرى دون التطرق مباشرة إلـى مشكلة الازدواج الخطـي (علـى الـرغم مـن الازدواج الخطـي هو سبب استخدام مثل تلك الطرق).

ومـن أمثلـة هـذه المقـدرات، مقـدر "ريـدج" Ridge ومقدر Stein "للتقليص أو الانكماش" Shrinkage (Stein, 1960). أمـا المـدخل الثـاني فـي المقابـل فيتعامــل مباشــرة مــع طبيعــة المتغيــرات المفســرة المرتبطة. ومن أمثلة ذلك المدخل طريقة "المكونات الرئيســـة" Principal Component، وانحـــدار "الجذر الكامن" Latent Root، و"التحليل العاملي" Factor Analysis.

تهـتم الدراســة الحاليــة بأسـلوب انحـدار "ريـدج" Hoerl and Kennard (1970a) كبديل عن مقدر المربعات الصـغرى. ويعتمد هذا الأسلوب على إضـافة مقدار موجب صـغير أكبر مـن الصـفر (k) إلــى العناصــر القطريــة للمصــفوفة X^tX قبـل إيجـاد معكوسـها، **وبالتـالي يصـبح مقـدر انحـدار "ريـدج" كالآتي:**

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{R}} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X} + \boldsymbol{k}\,\mathbf{I_p})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{Y} \qquad (٤)$$

حيث $\hat{\beta}_R$ هو مقدر انحدار "ريدج" لمتجه المعالم β، و k هى "معلمة ريدج" Ridge Parameter أو "معلمـة التحيـز" Biasing Parameter ، وتهـدف إلى تقليص حجم معاملات الانحدار المقدرة. وعندما

تكون k مساوية للصفر فإن مقدر "ريدج" يصبح هو نفسه مقدر المربعات الصغرى العادية. ويأخذ متوسط مربعات خطأ مقدر انحدار "ريدج" $MSE(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{R}})$ الشكل التالي (Hoerl and Kennard, 1970 a, b):

$$MSE(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{R}}) = \boldsymbol{\sigma}^2 \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}}{(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i}}+\boldsymbol{k})^2} + \boldsymbol{k}^2 \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{t}}(\mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{X} + \boldsymbol{k} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{p}})^{-2}\boldsymbol{\beta} \qquad (٥)$$

حيث λ_i هى "القيم المميزة" Eigen Values للمصفوفة $(\mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{X})$. وعلى الرغم من أن مقدر "ريدج" هو مقدر "متحيز" Biased، إلا أنه عند قيمة معينة k يكون له متوسط مربعات خطأ أقل مقارنة بمقدر المربعات الصغرى (Hoerl and Kennard ,1970 a). ومع ذلك فإن $MSE(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{R}})$ يعتمد على المعالم: k و $\boldsymbol{\beta}$ و σ^2، والتي لا يمكن حسابها عمليا، وبالتالي يجب تقدير المعلمة (k) من البيانات المشاهدة.

وقد تم اقتراح الكثير من الطرق لتقدير معلمة ريدج (k)، من هذه الدراسات: Hoerl and Kennard (1970 a, b)و ، و Hoerl et al. (1975)، و McDonald and Galarneau (1975) و Gibbons و Lawless and Wang (1976) (1981) و Khalaf and و Kibria (2003) و Muniz and Kibria و Shukur (2005) (2009) و Duzan and و Dorugade (2014) و Lukman and Ayinde و Sharif (2015) (2016) و Lukman et al. (2017).

يهدف هذا البحث إلى القيام بدراسة تتضمن تقييم عدد ٢٠ مقدر من مقدرات انحدار ريدج المختلفة، والمتاحة في الدراسات السابقة، باستخدام أسلوب المحاكاة. وقد تمت المقارنة بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ للمقدر MSE، وباستخدام توليفات من مختلفة البيانات، حيث اختلف كل من: الارتباط بين المتغيرات المفسرة وتباين حد الخطأ العشوائي، وعدد المتغيرات المفسرة وحجم العينة.

١- مقدرات انحدار ريدج

بافتراض أن $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_p)$ هى مصفوفة قطرية Diagonal عناصرها القطرية هى القيم المميزة للمصفوفة $\mathrm{X^tX}$، و $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0)$.

أيضا بافتراض أن $D_{p\times p}$ مصفوفة متعامدة أعمدتها هى المتجهات المميزة Normalized Eigen Vectors المناظرة للقيم المميزة للمصفوفة $\mathrm{X^tX}$. وهذا يتضمن أن $D^tD = DD^t = I_p$ ، وأن $\mathrm{X^tX = D\,\Lambda\,D^t}$، وبوضع $X^* = XD$ ، و $\alpha = D^t\beta$ ، يمكن التعبير عن نموذج الانحدار الخطي (١) في الشكل "الأساسي" Canonical التالي (Hoerl and Kennard, 1970 a):

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (٦)$$

ومع $\Lambda = X^{*t}X^*$، و $Cov(Y) = \sigma^2 \mathrm{I_n}$ ، ويصبح $\hat{\alpha}$ هو مقدر OLS لمتجه المعالم α هو:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Lambda}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{*\boldsymbol{t}}\mathbf{Y} \qquad (٧)$$

ويمكن كتابة مقدر انحدار ريدج كما يلي:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{GR}} = (\boldsymbol{X}^{*\boldsymbol{t}}\boldsymbol{X}^* + \mathbf{K})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{*\boldsymbol{t}}\mathbf{Y} \qquad (٨)$$

حيث $\mathrm{K} = diag(k_1, k_2, \ldots\ldots k_p)$ (مصفوفة قطرية أبعادها $p \times p$)، و $\mathrm{k_i} > 0$. ويسمى المقدر في المعادلة (٨)، مقدر انحدار ريدج "المعمم" (أو الشكل العام لانحدار ريدج) (Hoerl and Kennard, Generalized Ridge 1970a) **ويكون متوسط مربعات خطأ مقدر ريدج المعمم $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{R}}$ هو كما يلي:**

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\alpha}_{GR}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k_i)^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{{k_i}^2 \alpha_i^2}{(\lambda_i + k_i)^2} \qquad (٩)$$

وتكـون قيمـة $\mathbf{k_i}$ التـي تـدني $\mathbf{MSE(\widehat{\alpha}_{GR})}$ هى:

$$\mathbf{k_i} = \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{\alpha_i^2}} \qquad (١٠)$$

حيث σ^2 هى تباين حد الخطأ العشوائي للنموذج (١)، و α_i هو العنصر رقم i في متجه المعالم α. ومن الواضـح أن قيمـة k_i تعتمد بشكل كامل على المجاهيـل σ^2 و α_i، ويجـب تقـديرها مـن مـن البيانات المشاهدة. واقترح Hoerl and Kennard (1970a) استخدام المقدرات غير المتحيزة $\widehat{\sigma}^2$ (أو s^2) و $\widehat{\alpha}_i$، وبالتالي يكون مقدر معلمة ريدج هو:

$$\hat{\mathbf{k}}_\mathbf{i} = \frac{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2}{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i^2} \qquad (١١)$$

حيث

$$\widehat{\sigma}^2 = s^2 = (Y - X^*\widehat{\alpha})^t(Y - X^*\widehat{\alpha})/(n-p)$$

هو مقدر المربعات الصغرى غير المتحيز لتباين حد الخطـأ. و $\widehat{\alpha}_i$ هـو العنصـر رقـم i فـي متجـه المربعـات الصـغرى غيـر المتحيـز $\widehat{\alpha}$. وقـد وجـد Hoerl and Kennard (1970 a) أن أفضل تقـدير لمتجـه المعـالم يكـون عنـد وضـع $k_i = k$ لجميع قيم i. ويطلق على مقدر الانحدار في هذه الحالـة مقدر انحدار "ريـدج العـادي" Ordinary Ridge والذي يمكن وضعه على الصورة التالية:

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_\mathbf{R} = (\boldsymbol{X^{*t}X^*} + \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{I_p})^{-1}\boldsymbol{X^{*t}}\mathbf{Y} \qquad (١٢)$$

ويكـون متوسـط مربعـات الخطـأ لمقـدر ريـدج العادي هو:

$$\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_\mathbf{R}) = \boldsymbol{\sigma^2} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \frac{\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}}{(\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i} + \mathbf{k_i})^2} + \mathbf{k} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{p}} \frac{\boldsymbol{\alpha_i^2}}{(\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i} + \mathbf{k_i})^2} \qquad (١٣)$$

ومـن الواضـح مـن مقـدرى انحـدار ريـدج المعمـم والعـادي (٨) و(١١) أنـه إذا كانت معالم ريدج (k) مساوية للصفر، فإن مقدرات انحدار ريدج المعمم وريـدج العـادي تكـون هـى تمامـا مقـدر المربعـات الصغرى. وعلى الجانب الأخر إذا كانت تلك المعالم تؤول إلى ما لا نهاية، فإن المقدرات الناتجة سوف تـتقلص Shrunk تجـاه الصـفر Origin. كـذلك نلاحظ أن متوسط مربعات خطأ مقدر ريدج (المعمم أو العـادي) عبـارة عن مجموح حـدين. حيـث يمثـل الحد الأول مجموع تباينات $\widehat{\beta}_R$ (أو $\widehat{\alpha}_R$)، وهو دالـة متناقصـة متصـلة فـي k، بينمـا الحـد الثـاني هـو مجمـوع مربـع التحيـز للمقـدر $\widehat{\beta}_R$ وهـو دالـة متزايـدة متصـلة فـي k. وهكـذا فـإن مقـدر انحـدار ريـدج ومتوسط مربعات الخطأ يعتمدا على معالم ريدج(k) وأن الاختيـارات المختلفة لتلك المعالم ينتج مقدرات انحدار مختلفـة مـع متوسط مربعـات خطـأ مختلفـة. وهكـذا فـإن اختيـارات معينـة لمعلمـة ريـدج هـو أمـر أساسي أو بديهي في انحدار ريدج.

٢-طرق تقدير معلمة ريدج

١-دراسة Hoerl and Kennard (1970 a)

اقترحت الدراسة استخدام المقدر التالي:

$$K1 = \widehat{K}_{HK} = \frac{s^2}{\max(\widehat{\alpha}_i^2)} \qquad (١٤)$$

حيث $\max(\widehat{\alpha}_i^2)$ هى أكبر قيمة من بين قيم $\widehat{\alpha}_i^2$. وقد أوضحت الدراسة أن المقدر المقترح يعطي أقل MSE مقارنة بمقدر OLS.

٢- دراسة Hoerl et al. (1975):

اقترحت الدراسة أخذ الوسط "التوافقي" Harmonic Mean لمعلمة ريدج المعممة في (١١).

$$K2 = \widehat{K}_{HKB} = \frac{p\, s^2}{\sum_{i=1}^{p} \widehat{\alpha}_i^2} \qquad (١٥)$$

٣-دراسة Lawless and Wang (1976):

استخدمت الدراسة المدخل "البايزي" Bayesian Approach في تقديم المقترح التالي لمعلمة ريدج، والذي يمكن اعتباره الوسط التوافقي لمعلمة ريج المعممة $s^2 / \lambda_i \widehat{\alpha}_i^2$

$$K3 = \widehat{K}_{LW} = \frac{ps^2}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \widehat{\alpha}_i^2} \qquad (١٦)$$

٤- دراسة Hocking et al. (1976):

$$K4 = \widehat{K}_{HSL} = s^2 \frac{\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i \widehat{\alpha}_i)^2}{(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \widehat{\alpha}_i^2)^2} \qquad (١٧)$$

٥- دراسة Nomura (1988):

اقترحت الدراسة مقدر لمعلمة انحدار "ريدج" المعمم كما يلي:

$$\widehat{K}_{iNO} = \frac{s^2}{\widehat{\alpha}_i^2}\left[1 + \left\{1 + \lambda_i\left(\widehat{\alpha}_i^2 / s^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (١٨)$$

كما قدمت الدراسة أيضا صيغة للمقدر في حالة انحدار "ريدج" العادي، وذلك بأخذ الوسط التوافقي للصيغة المعممة السابقة (١٨). وتأخذ هذه الصيغة الشكل التالي:

$$K5 = \widehat{K}_{NOh} = \frac{ps^2}{\sum_{i=1}^{p}\{\widehat{\alpha}_i^2 / [1 + (1 + \lambda_i(\widehat{\alpha}_i^2 / s^2))^{1/2}]\}} \qquad (19)$$

٦- دراسة Kibria (2003):

إقترح Kibria (2003) ثلاثة مقدرات جديدة تشمل كل من: الوسط الحسابي (AM) والوسط الهندسي (GM) والوسيط (Med), لصيغة مقدر "ريدج المعمم" (معادلة ١١) والتي قدمها Hoerl and Kennard (1970 a). و تأخذ المقدرات الجديدة الصيغ التالية على الترتيب:

$$K6 = \widehat{K}_{KAM} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{s^2}{\widehat{\alpha}_i^2} \qquad (٢٠)$$

$$K7 = \widehat{K}_{KGM} = \frac{s^2}{(\prod_{i=1}^{p} \widehat{\alpha}_i^2)^{\frac{1}{p}}} \qquad (٢١)$$

$$K8 = \widehat{K}_{KMed} = \text{median}\left(\frac{s^2}{\widehat{\alpha}_i^2}\right), i = 1, 2, \ldots.. p \qquad (٢٢)$$

ومن خلال دراسة المحاكاة، بين Kibria (2003) أن المقـــدرين $\widehat{\mathrm{K}}_{\mathrm{KAM}}$ (٢٠) و $\widehat{\mathrm{K}}_{\mathrm{KGM}}$ (٢١) كان لهما أداءا جيدا وعلى قدم المساواة وكانا أفضل قليلا من $\widehat{\mathrm{K}}_{HKB}$ (١٥). وخلصت الدراسة إلى أن مقدر $\widehat{\mathrm{K}}_{\mathrm{KGM}}$ (٢١) هو الأفضل من بين المقدرات المقترحة.

٧- دراسة Khalaf and Shukur (2005)

قامت الدراسة بتعديل معلمة Firinguetti (1999) المعممة $\frac{\lambda_i s^2}{(n-p)s^2+\lambda_i \hat{\alpha}_i^2}$ ، لتصبح كالآتي:

$$K9=\widehat{\mathrm{K}}_{\mathrm{KS}} = \frac{\lambda_{\max} s^2}{(n-p)s^2+\lambda_{\max}\hat{\alpha}_{\max}^2} \qquad (٢٣)$$

وقامت الدراسة بمقارنة المقدر الجديد مع مقدر "ريدج المعمم" من خلال المحاكاة وقد أظهرت النتائج أفضلية المقدر الجديد (٢٣) في الحالات التي يكون فيها تباين حد الخطأ العشوائي كبيرا.

٨- دراسة Batah and Gore (2009):

أدخلت الدراسة بعض التعديل على مقدر انحدار "ريدج غير المتحيز"، للحصول على مقدر انحدار "ريدج غير المتحيز المعدل" Modified Unbiased Ridge (MUR). الذي يأخذ الشكل التالي:

$$\hat{\beta}J(k)=\left[I-k\left(X^tX+K\quad I_p\right)^{-1}\right]\left(X^tX+K\quad I_p\right)^{-1}\left(X^ty+kJ\right) \qquad (٢٤)$$

حيث $J\sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{k}I_p)$ و $k>0$. واقترحت الدراسة مقدرا للمعلمة k علي الشكل التالي:

$$K10=\widehat{\mathrm{K}}_{10}=\frac{ps^2}{\sum_{i=1}^{p}\{\hat{\alpha}_i^2/[(\frac{\hat{\alpha}_i^4\lambda_i^2}{4s^4}+\frac{6\hat{\alpha}_i^2\lambda_i}{s^2})^{1/2}-\frac{\hat{\alpha}_i^2\lambda_i}{2s^2}]\}} \qquad (٢٥)$$

٩- دراسة Muniz and Kibria (2009):

طبقت الدراسة خوازميات الوسط الهندسي والجذر التربيعي، على المداخل التي اقترحها كل من: Khalaf and Shukur (2005) و Kibria (2003) لايجاد سبعة مقدرات جديدة، وأخذت الدراسة فكرة الجذر التربيعي من دراسة Alkhamisi and Shukur (2008). وقد أوصت الدراسة باستخدام المقدرين التاليين: بافتراض أن

$$m_i=\sqrt{\frac{s^2}{\hat{\alpha}_i^2}} \qquad (٢٦)$$

$$K11=\widehat{\mathrm{K}}_{KM1}=(\prod_{i=1}^{p}m_i)^{\frac{1}{p}} \qquad (٢٧)$$

$$K12=\widehat{\mathrm{K}}_{KM2}=\mathrm{median}(m_i) \qquad (٢٨)$$

١٠- دراسة Al-Hassan (2010):

اقترحت الدراسة إدخال تعديلات Alkhamisi and Shukur (2007) على مقدر Hocking et al. (1976) (١٧) ليصبح المقدر الجديد كما يلي:

$$K13=\widehat{\mathrm{K}}_{\mathrm{NHSL}} = s^2\frac{\lambda_{\max}\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i\hat{\alpha}_i)^2}{\lambda_{\max}(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\hat{\alpha}_i^2)^2}+\frac{1}{\lambda_{\max}} \qquad (٢٩)$$

١١- دراسة Dorugade (2014):

اقترحت الدراسة مقدرا يأخذ قدرا من التحيز أقل من مقدر Hoerl and Kennard (1970 a)، ويخفض التباين الكلي لتقديرات المعالم بشكل جوهري مقارنة بمقدر Lawless and Wang (1976)، مما يؤدي إلى تحسين متوسط مربعات الخطأ للتقدير والتنبؤ. وقامت الدراسة بعمل تعديل على مقدر Hoerl and Kennard (1970 a) بضرب المقام في المقدار $(\lambda_{max}/2)$، ليصبح المقدر المقترح (المعمم) على الصورة التالية:

$$\widehat{K}_{i(AD)} = \frac{2s^2}{\lambda_{max}\widehat{\alpha}_i^2} \qquad (٣٠)$$

وبالتالي نجد أن المقدر المقترح يقع بين مقدرى Hoerl و Lawless and Wang (1976) and Kennard (1970 a) على النحو التالي:

$$\frac{s^2}{\lambda_i\widehat{\alpha}_i^2} \leq \frac{2s^2}{\lambda_{max}\widehat{\alpha}_i^2} \leq \frac{s^2}{\widehat{\alpha}_i^2} \qquad (٣١)$$

وبالاعتماد على أساليب Kibria (2003) في أخذ الوسط الحسابي أو الوسيط أو الوسط الهندسي أو الوسط التوافقي اقترحت الدراسة المقدرات التالية على الترتيب لانحدار "ريدج" العادي:

$$K14 = \widehat{K}_{1(AD)} = \frac{2}{p\lambda_{max}}\sum_{i=1}^{p}\frac{s^2}{\widehat{\alpha}_i^2} \qquad (٣٢)$$

$$K15 = \widehat{K}_{2(AD)} = \text{median}\left(\frac{2s^2}{\lambda_{max}\widehat{\alpha}_i^2}\right) \qquad (٣٣)$$

$$K16 = \widehat{K}_{3(AD)} = \frac{2s^2}{\lambda_{max}\left(\prod_{i=1}^{p}\widehat{\alpha}_i^2\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad (٣٤)$$

$$K17 = \widehat{K}_{4(AD)} = \frac{2p}{\lambda_{max}}\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{p}\widehat{\alpha}_i^2} \qquad (٣٥)$$

١٢-دراسة Khalaf and Iguernane (2016):

اقترحت الدراسة أخذ الجذر التربيعي لمقدر Khalaf and Shukur (2005) كما يلي:

$$K18 = \widehat{K}_{KSM} = \sqrt{\frac{\lambda_{max}\, s^2}{(n-p)s^2 + \lambda_{max}\,\widehat{\alpha}_{max}^2}} \qquad (٣٦)$$

١٣-دراسة Asar and Genc (2017):

قدمت الدراسة عددا من المقدرات الجديدة والتي تعتبر تعديلا لتقدير معلمة تحيز Lawless and Wang (1976) لانحدار "ريدج" المعمم التالية:

$$\widehat{K}_{LW(i)} = \frac{s^2}{\lambda_i\widehat{\alpha}_i^2} \qquad (٣٧)$$

وقد قامت الدراسة أولا بأخذ الجذر التربيعي $\sqrt{\frac{s^2}{\lambda_i\widehat{\alpha}_i^2}}$ وفقا لاقتراحات Muniz and Kibria (2009)، و Mansson et al. (2010). كما قامت الدراسة تبعا لمقترحات Kibria(2003)، و Muniz et al. (2012)، بأخذ: الوسط الحسابي، والوسط الهندسي، والوسط التوافقي، والحد الأقصى، والحد الأدنى، والوسيط. ومن خلال المحاكاة خلصت الدراسة إلى أن المقدرين التاليين لهما أداء أفضل:

- **الحد الأقصى:**

$$K19 = \widehat{K}_{AG1} = Max\left(\sqrt{\frac{s^2}{\lambda_i\widehat{\alpha}_i^2}}\right) \qquad (٣٨)$$

- **الحد الأقصى للمقدر** $(1/\widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{LW(i)}})$:

$$\mathbf{K20} = \widehat{\mathbf{K}}_{\mathbf{AG2}} = \mathbf{Max}\ (\mathbf{1} \Big/ \sqrt{\frac{s^2}{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2}}) \qquad (٣٩)$$

ومما سبق يمكن ملاحظة أن الطرق المختلفة لحساب معلمة ريدج تعتمد على Y بشكل ما، وبالتالي فإن المقدرات المحسوبة لها طبيعة عشوائية. في مثل هذه الحالات ليس هناك صيغة محددة متاحة لحساب متوسط مربعات الخطأ لمقدرات ريدج المختلفة (Azzam et al. 1995). وأيضا ووفقا لدراسة كل من: Dempster et al. (1977) و Lawless and Wang (1976) و Gibbons (1981)، فإنه يكون من الضروري إجراء دراسة محاكاة لحساب متوسط مربعات الخطأ لكل مقدر من مقدرات ريدج المختلفة.

٣- دراسة المحاكاة

تهدف هذه الدراسة إلى مقارنة أداء مقدرات ريدج المختلفة، لتحديد بعض أفضل تلك المقدرات للمستخدمين والباحثين. ويعتمد تصميم المحاكاة على العوامل التي قد تؤثر على المقدرات محل المقارنة والمعيار المستخدم في المقارنة. وحيث أن درجة الازدواج الخطي بين المتغيرات المفسرة $(X's)$ هى مركز الاهتمام، نجد أن جميع الدراسات السابقة قد استخدمت طريقة McDonald and Galarneau (1975) في توليد مصفوفة التصميم X. ووفقا لهذه الطريقة تُولد X بحيث تكون عناصر المصفوفة $X^tX = \{\omega_{ij}\}$ على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ij}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{i = j} \\ \boldsymbol{\rho} & \mathbf{i \neq j} \end{cases} \qquad (٤٠)$$

ويتم توليد متجهات المصفوفة X كمايلي:

$$\mathbf{X_j} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\rho})^{1/2}\ \mathbf{Z_j} + \boldsymbol{\rho}^{1/2}\ \mathbf{Z_{p+1}} \qquad \mathbf{j = 1, 2, \dots, p} \qquad (٤١)$$

حيث $Z_1, Z_2, \dots, Z_{p+1}$ متجهات من المتغيرات المعتدلة المعيارية المستقلة. ولكن يعيب طريقة التوليد السابقة أنها أولا تفترض نفس معامل الارتباط البسيط (ρ) بين جميع أزواج المتغيرات المفسرة، وثانيا عند توليد المصفوفة X نجد أن عناصر المصفوفة X^tX سوف تختلف عما سبق تحديده من قيم ρ، وبالتالي لن يعكس التحليل التأثير الحقيقي لتلك القيم. لذلك تستخدم دراسة المحاكاة الحالية طريقة (HA) (Hallawa and Azzam, 1995) في توليد المصفوفة X، والتي تتغلب على عيوب طريقة MG، بحيث تسمح بأن تكون عناصر المصفوفة X^tX مختلفة، وأن تكون كما سبق تحديدها. **ويمكن عرض خطوات طريقة (HA) فيما يلي:**

١- إنشاء مصفوفة إرتباط R تمثل الارتباطات المحددة مسبقا بين المتغيرات المفسرة.

٢- توليد عدد p من المتجهات من أى توزيع عشوائي.

٣- تطبيق طريقة Gram–Schmidt لجعل المتجهات –المولدة من الخطوة السابقة– "متعامدة" orthogonal وذات طول يساوي الوحدة normalize، ومن هذه المتجهات تتكون المصفوفة H.

٤- حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة (ذات الطول الوحدة) لمصفوفة الارتباط R السابق تحديدها في الخطوة الأولى.

٥- إيجاد المصفوفة القطرية $\Lambda^{1/2}$ التي عناصرها القطرية هى الجذور التربيعية للقيم المميزة

للمصفوفة R.

٦-تكوين المصفوفة G والتي أعمدتها هي المتجهات المميزة (ذات الطول الوحدة) في الخطوة الرابعة.

٧-**إيجاد المصفوفة X كما يلي:**

$$\mathbf{X_{n\times p} = H_{n\times p}\ \Lambda_{p\times p}^{1/2}\ G_{p\times p}} \qquad (٤٢)$$

تم تنفيذ المحاكاة باستخدام أربعة عوامل، والتي قد يكون لها تأثير على متوسط مربعات الخطأ. العوامل والمستويات هي:

١- معامل الارتباط (ρ) بين كل زوج من المتغيرات المفسرة، مع ثلاثة مستويات هم: 0.80 و0.90 و0.99. وهي تعكس تدرج تصاعدي لمشكلة الازدواج الخطي.

٢- عدد المتغيرات المفسرة (p) مع مستويين هما 5 و10.

٣- حجم العينة (n) مع مستويين هما 25 و50.

٤- تباين حد الخطأ العشوائي (σ^2) مع ثلاثة مستويات 0.1 و1 و10.

وقد بين Newhouse and Oman (1971) أنه إذا كان MSE دالة في كل من: β و σ^2 و k ، وكانت المتغيرات المفسرة محددة fixed ، فإن MSE يكون عند حده الأدنى عندما يتم اختيار متجه معالم الانحدار بحيث يكون هو المتجه المميز المناظر لأكبر قيمة مميزة للمصفوفة X^tX بشرط أن $\beta^t\beta = 1$ ، أى طوله يساوي الوحدة. وكما سبق عند استخدام طريقة (HA) في توليد المصفوفة X، بحيث يكون الارتباط بين كل زوج من المتغيرات في المصفوفة هو نفسه، فإن المتجه المميز المناظر لأكبر قيمة مميزة للمصفوفة X^tX (الذي طوله الوحدة) تكون عناصره والتي عددها p جميعا متساوية، وبالتالي تكون قيمة كل معلمة في متجه معالم الانحدار تساوي $1/\sqrt{p}$ بغض النظر عن حجم العينة أو درجة الارتباط.

ولكل توليفة من توليفات المحاكاة تم توليد المصفوفة X ومن ثم معايرتها بحيث تكون X^tX في شكل مصفوفة ارتباط. ثم يتم توليد متجه عشوائي من توزيع معتدل Normal $N(0,\sigma^2)$ ليمثل حد الخطأ العشوائي. ويتم إيجاد المتجه Y من نموذج الانحدار الخطي في المعادلة (١). عند كل توليفة يتم توليد حد الخطأ العشوائي ومن ثم المتجه Y 10,000 مرة (معاودة) Replications. ثم يحسب متوسط مربعات الخطأ للمقدر $\hat{\beta}_R$ أو $\hat{\alpha}_R$ كما يلي:

$$\boldsymbol{MSE}(\hat{\boldsymbol\beta}_\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10000}}\sum_{i=1}^{10000}\left[(\hat{\boldsymbol\beta}_\mathbf{R}-\boldsymbol\beta)^t(\hat{\boldsymbol\beta}_\mathbf{R}-\boldsymbol\beta)\right] \qquad (٤٣)$$

٥- نتائج المحاكاة

تم وضع نتائج المحاكاة في الجدول (١)، والذي يعطي قيم MSE للمقدرات المقارنة عند توليفات المحاكاة والتي يبلغ عددها 36 توليفة عند القيم المختلفة من ρ و σ^2 و p و n . كذلك يمكن اعطاء رتب Ranks للمقدرات تصاعديا داخل كل توليفة وفقا لقيم MSE. كذلك تستخدم الدراسة بعض الأشكال البيانية لبعض التوليفات حيث تكون بعض عوامل المحاكاة ثابتة في حين تتغير باقي العوامل، وذلك لاستخلاص النتائج عند كل عامل من عوامل المحاكاة. وأيضا تستخدم الدراسة أشكال بيانية أخرى تشمل قيم MSE للمقدرات عند جميع التوليفات، بالاضافة إلى شكل بياني لرتب المقدرات، وذلك بغرض استخلاص نتائج عامة من دراسة المحاكاة.

٥-١ أداء المقدرات وفقا لدرجة الارتباط ρ:

يتم تحليل قيم MSE للمقدرات المختلفة وفقا لتغير درجات الارتباط بين المتغيرات المفسرة ρ لقيم معينة من σ^2 و p و n . بشكل عام إذا تم تثبيت كل من n و p نجد أنه زيادة قيم MSE مع زيادة درجة الارتباط ρ. وللتوضيح نجد أنه عند ($n = 25, p = 5, \sigma^2 = 0.1$) و ($n = 25, p = 5, \sigma^2 = 10$) يمكن عرض أداء المقدرات باستخدام الشكل (١) والشكل (٢) على الترتيب. وفقا لتلك الأشكال وعند قيم أصغر من σ^2، نجد أن الزيادة في درجة الارتباط ρ تؤدي إلى زيادة (غير كبيرة) في MSE. وأن التغير في درجة الارتباط تؤدي إلى زيادة كبيرة في MSE عند القفز في قيمة σ^2 من 0.1 إلى 10، وذلك لأغلبية المقدرات. كذلك نجد أن المقدرات: K20, K19, K13, K12, K11, K6, K3 ، في المعادلات (١٦) و(٢٠) و(٢٧) و(٢٨) و(٢٩) و(٣٨) و(٣٩)، لا تتأثر تقريبا بزيادة درجة الارتباط عند σ^2 صغيرة أو كبيرة. وبشكل عام نجد أن تلك المقدرات أفضل من باقي المقدرات.

جدول (١): متوسط مربعات الخطأ للمقدرات $MSE(\widehat{\beta}_R)$

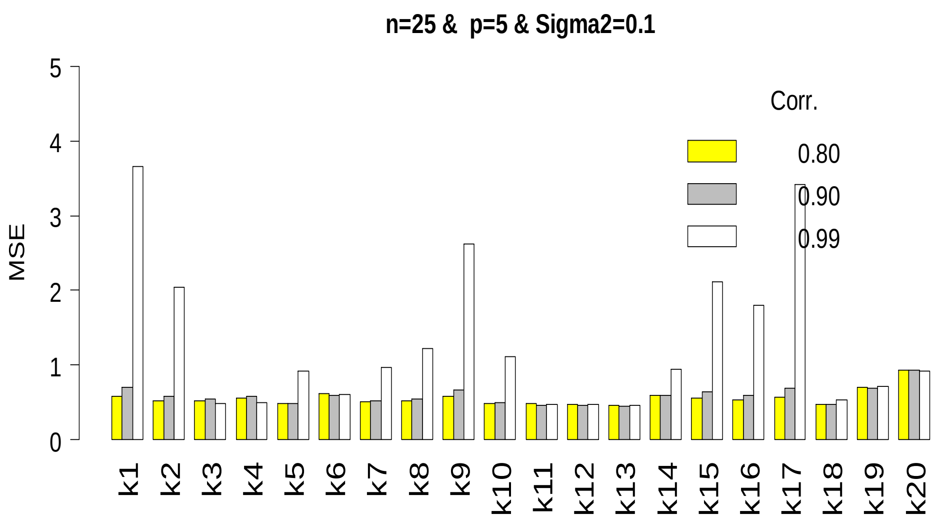
ρ	0.80			0.90			0.99		
σ^2	0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
$n = 25$ و $p = 5$									
K_1	0.5762	1.0725	1.3274	0.7038	1.3879	1.7700	3.6636	8.7245	9.4248
K_2	0.5184	0.9032	1.1214	0.5819	1.0515	1.3471	2.0426	4.8874	5.2661
K_3	0.5260	0.7818	0.9545	0.5497	0.7611	0.9395	0.4805	0.7224	0.9084
K_4	0.5509	0.9287	1.2441	0.5769	0.9317	1.4281	0.4942	1.0118	2.6019
K_5	0.4857	0.7877	0.9757	0.4816	0.8154	1.0378	0.9158	1.9979	2.2443
K_6	0.6174	0.8248	0.9460	0.5869	0.8079	0.9359	0.6098	0.7547	0.9138
K_7	0.5068	0.8075	0.9694	0.5191	0.8319	1.0027	0.9624	1.5085	1.4186
K_8	0.5207	0.8263	1.0179	0.5424	0.8879	1.1262	1.2157	2.8082	3.1367
K_9	0.5812	1.0431	1.3005	0.6679	1.2418	1.5950	2.6169	6.4556	6.7824
K_{10}	0.4828	0.7998	0.9965	0.4928	0.8509	1.0871	1.1143	2.4908	2.7514
K_{11}	0.4784	0.7628	0.9403	0.4648	0.7499	0.9350	0.4668	0.7340	0.9214
K_{12}	0.4759	0.7662	0.9544	0.4623	0.7587	0.9589	0.4739	0.7754	0.9772
K_{13}	0.4608	0.7827	1.0017	0.4523	0.7603	0.9883	0.4573	0.7203	0.9164
K_{14}	0.5926	0.8371	0.9578	0.5965	0.8501	0.9579	0.9369	0.8652	0.9325
K_{15}	0.5546	0.9026	1.1061	0.6385	1.0582	1.3416	2.1134	4.9987	5.5100
K_{16}	0.5264	0.8718	1.0359	0.5929	0.9800	1.1559	1.8043	3.0209	2.5738
K_{17}	0.5695	1.0234	1.2628	0.6947	1.3144	1.6728	3.4128	8.1127	8.7635
K_{18}	0.4755	0.8230	1.0432	0.4751	0.8272	1.0662	0.5311	0.9561	1.1569
K_{19}	0.6994	0.8492	0.9508	0.6932	0.8467	0.9464	0.7090	0.8417	0.9448
K_{20}	0.9279	0.8602	0.9436	0.9325	0.8556	0.9379	0.9184	0.8547	0.9344
$n = 25$ و $p = 10$									
K_1	0.7666	1.5704	1.9872	1.0081	2.5139	3.1091	5.3406	17.4449	22.3744
K_2	0.6373	1.1025	1.3885	0.7506	1.5372	1.9004	2.7112	8.3229	10.4975
K_3	0.6758	0.8426	0.9907	0.7205	0.8259	0.9680	0.6150	0.7301	0.9013
K_4	0.7146	1.1540	1.8287	0.7630	1.2145	2.3749	0.6373	0.9326	5.1173
K_5	0.5551	0.8337	1.0440	0.5854	0.9710	1.2009	1.1747	3.0163	3.7782

K_6	0.6907	0.8407	0.9470	0.6595	0.8443	0.9440	0.7074	0.8165	0.9148
K_7	0.5728	0.8507	1.0231	0.6109	0.9751	1.1258	1.2004	2.4873	2.4987
K_8	0.5944	0.8942	1.1142	0.6554	1.0862	1.3373	1.4763	4.0385	5.0200
K_9	0.7455	1.4389	1.8419	0.9174	2.1732	2.7208	4.5797	14.3565	18.0489
K_{10}	0.5631	0.8860	1.1072	0.6096	1.0765	1.3267	1.4582	4.0240	5.0365
K_{11}	0.5466	0.7857	0.9678	0.5509	0.8077	0.9783	0.5503	0.7808	0.9639
K_{12}	0.5497	0.7988	0.9973	0.5562	0.8296	1.0222	0.5588	0.8312	1.0463
K_{13}	0.6019	0.9418	1.3201	0.6042	0.9330	1.3543	0.5429	0.7423	1.0075
K_{14}	0.6542	0.9206	1.0160	0.6906	1.0716	1.0618	1.5380	1.8060	1.1396
K_{15}	0.7207	1.2868	1.5982	0.9342	1.9542	2.4018	3.9947	12.6057	15.9687
K_{16}	0.6771	1.1992	1.4232	0.8506	1.7651	1.9810	3.5429	9.6470	10.2670
K_{17}	0.7889	1.5989	2.0192	1.0586	2.6363	3.2589	5.8208	19.0309	24.3921
K_{18}	0.5884	0.9713	1.2383	0.6092	1.0790	1.3457	0.7123	1.3483	1.6823
K_{19}	0.7638	0.8628	0.9507	0.7588	0.8672	0.9521	0.7598	0.8532	0.9447
K_{20}	0.9436	0.8539	0.9318	0.9461	0.8508	0.9321	0.9466	0.8518	0.9215

تابع جدول (١): متوسط مربعات الخطأ للمقدرات $MSE(\hat{\beta}_R)$

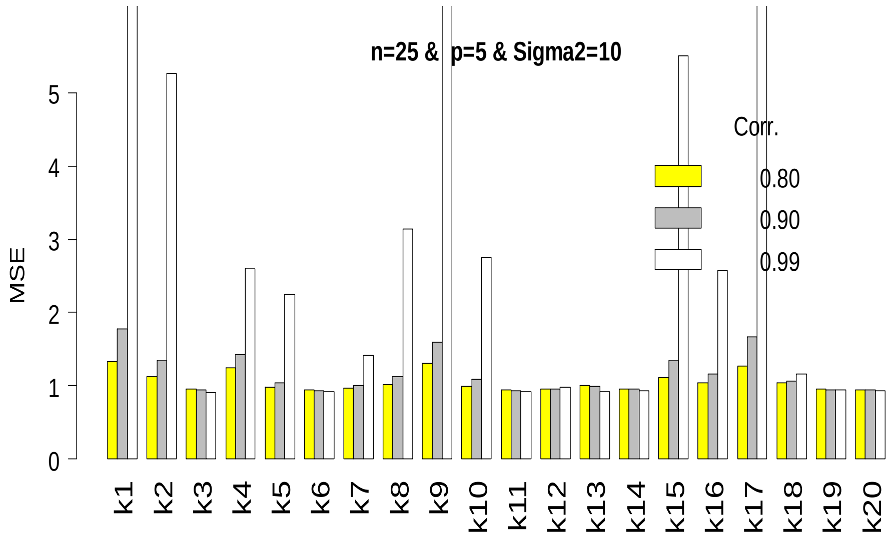
ρ	0.80			0.90			0.99		
σ^2	0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
$n = 50$ و $p = 5$									
K_1	0.5886	0.9709	1.1445	0.7357	1.1691	1.3709	2.8951	4.8385	5.1298
K_2	0.5500	0.8832	1.0386	0.6340	0.9752	1.1514	1.7126	2.8190	3.0069
K_3	0.5559	0.8222	0.9547	0.5926	0.8091	0.9477	0.5337	0.7841	0.9317
K_4	0.5727	0.8960	1.1029	0.6160	0.9059	1.1923	0.5444	0.9207	1.6973
K_5	0.5375	0.8305	0.9664	0.5579	0.8410	0.9961	0.8602	1.3876	1.5506
K_6	0.6542	0.8657	0.9583	0.6482	0.8479	0.9524	0.6414	0.8031	0.9351
K_7	0.5507	0.8400	0.9638	0.5859	0.8501	0.9790	0.9039	1.1541	1.1598
K_8	0.5576	0.8475	0.9889	0.5986	0.8822	1.0417	1.0867	1.8100	1.9667
K_9	0.6062	0.9982	1.1718	0.7308	1.1604	1.3414	2.2086	3.6726	3.8872
K_{10}	0.5299	0.8324	0.9753	0.5674	0.8580	1.0184	0.9992	1.6078	1.7658
K_{11}	0.5336	0.8181	0.9489	0.5460	0.8058	0.9466	0.5213	0.7866	0.9357
K_{12}	0.5295	0.8186	0.9560	0.5422	0.8103	0.9584	0.5262	0.8065	0.9611
K_{13}	0.5134	0.8244	0.9789	0.5336	0.8103	0.9732	0.5149	0.7835	0.9349
K_{14}	0.6270	0.8639	0.9609	0.6536	0.8647	0.9604	0.8998	0.8538	0.9408
K_{15}	0.5774	0.8824	1.0327	0.6752	0.9778	1.1509	1.7576	2.9513	3.1436
K_{16}	0.5592	0.8672	0.9958	0.6436	0.9326	1.0548	1.5440	1.9222	1.7105
K_{17}	0.5846	0.9445	1.1111	0.7265	1.1268	1.3205	2.7150	4.5202	4.7762
K_{18}	0.5252	0.8559	1.0129	0.5555	0.8626	1.0237	0.5709	0.8908	1.0490
K_{19}	0.7347	0.8917	0.9645	0.7439	0.8866	0.9627	0.7388	0.8801	0.9605
K_{20}	0.9405	0.8943	0.9564	0.9347	0.8914	0.9551	0.9359	0.8900	0.9518
$n = 50$ و $p = 10$									
K_1	0.7936	1.2707	1.4598	0.9384	1.7253	2.0490	4.9573	10.1514	12.0674
K_2	0.6745	0.9981	1.1536	0.7301	1.1880	1.4135	2.4969	4.8194	5.7781
K_3	0.6923	0.8507	0.9654	0.7092	0.8245	0.9520	0.6245	0.7800	0.9262
K_4	0.7305	1.0301	1.3761	0.7431	0.9943	1.6330	0.6407	0.8603	3.1875
K_5	0.6104	0.8525	0.9919	0.6047	0.8920	1.0647	1.1299	1.9461	2.3453

K_6	0.7309	0.8763	0.9584	0.6835	0.8535	0.9512	0.7164	0.8267	0.9342
K_7	0.6236	0.8598	0.9812	0.6226	0.8959	1.0283	1.1282	1.6335	1.6693
K_8	0.6405	0.8835	1.0227	0.6570	0.9500	1.1311	1.3801	2.4457	2.9879
K_9	0.7999	1.2399	1.4371	0.8999	1.6077	1.9146	4.2403	8.2088	9.9160
K_{10}	0.6152	0.8754	1.0172	0.6204	0.9438	1.1208	1.3506	2.4234	2.9063
K_{11}	0.6050	0.8290	0.9591	0.5817	0.8137	0.9598	0.5933	0.8054	0.9560
K_{12}	0.6068	0.8357	0.9725	0.5851	0.8236	0.9807	0.6008	0.8305	0.9978
K_{13}	0.6473	0.9151	1.1317	0.6222	0.8717	1.1447	0.5865	0.7863	0.9818
K_{14}	0.6957	0.9076	0.9842	0.6947	0.9672	1.0103	1.4377	1.3296	1.0291
K_{15}	0.7536	1.1058	1.2577	0.8800	1.4246	1.6770	3.6829	7.2910	8.7569
K_{16}	0.7126	1.0541	1.1718	0.8112	1.3257	1.4654	3.2529	5.6043	5.6588
K_{17}	0.8136	1.2887	1.4752	0.9807	1.7963	2.1252	5.3961	11.0739	13.1372
K_{18}	0.6488	0.9451	1.1064	0.6328	0.9691	1.1600	0.7331	1.0942	1.3256
K_{19}	0.7969	0.9009	0.9650	0.7815	0.8886	0.9619	0.7854	0.8868	0.9606
K_{20}	0.9389	0.8865	0.9490	0.9517	0.8849	0.9455	0.9462	0.8842	0.9430



شكل (١): أداء المقدرات وفقا لدرجة الارتباط بين المتغيرات المفسرة

$$(n = 25, p = 5,\ \sigma^2 = 0.1)$$



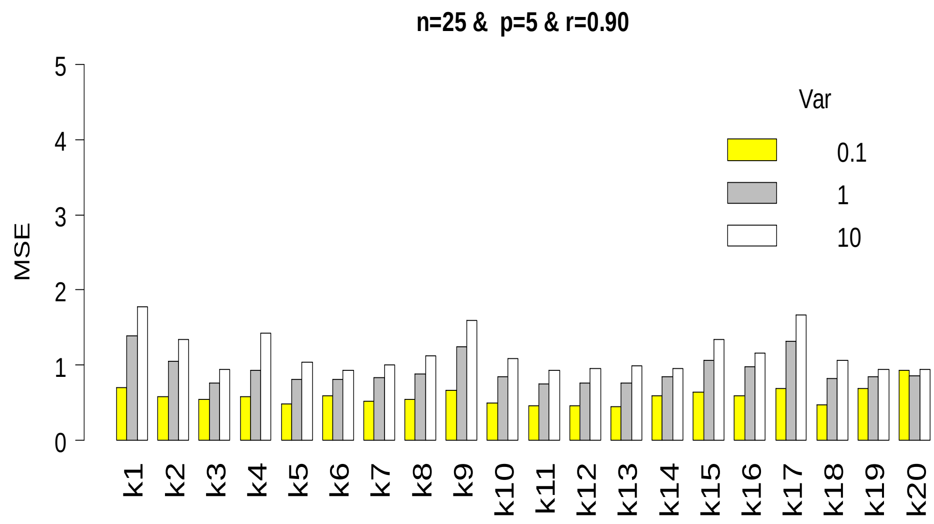
شكل (٢): أداء المقدرات وفقا لدرجة الارتباط بين المتغيرات المفسرة

$$(n = 25, p = 5,\ \sigma^2 = 10)$$

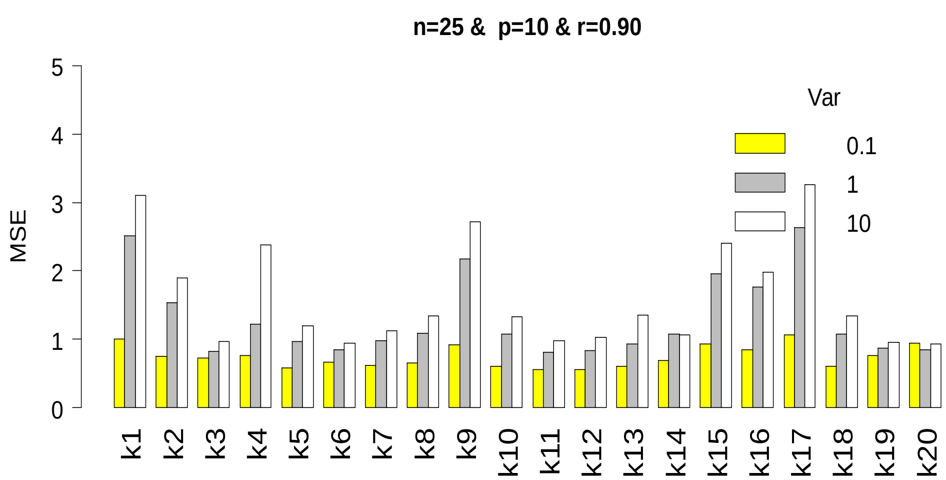
٥-٢ أداء المقدرات وفقا لتباين حد الخطأ العشوائي σ^2:

يمكن أن نرى من جدول (١) التغير في MSE وفقا لتباين حد الخطأ العشوائي. من الواضح أن زيادة σ^2 تؤدي إلي زيادة في MSE للمقدرات. وأن المقدرات (K1, K4, K9, K15, K17) في المعادلات(١٤ و١٧ و٢٣ و٣٣ و٣٥ على الترتيب) لهم MSE أكبر من باقي المقدرات.

وأنه عند قيم صغيرة من σ^2 لا يختلف أداء المقدرات كثيرا. وعند قيم كبيرة من σ^2 المقدرات الأفضل هى: K3, K6, K11, K19, K20 في المعادلات (١٦ و٢٠ و٢٧ و٣٨ و٣٩) من حيث أن لها MSE أقل من باقي المقدرات. ومن الشكلين (٣) و(٤) يمكن أن نجد أنه مع تغير σ^2 من 0.1 إلى 10 يزداد MSE للمقدرات وبشكل جوهري لغالبية المقدرات. كذلك نلاحظ أن لعدد المتغيرات المفسرة p تأثير كبير على الازدواج الخطي، حيث نجد أن الازدواج الخطي يزداد مع زيادة عدد المتغيرات المفسرة المرتبطة. وهذا يتضح عند الانتقال من شكل (٣) إلى شكل (٤).



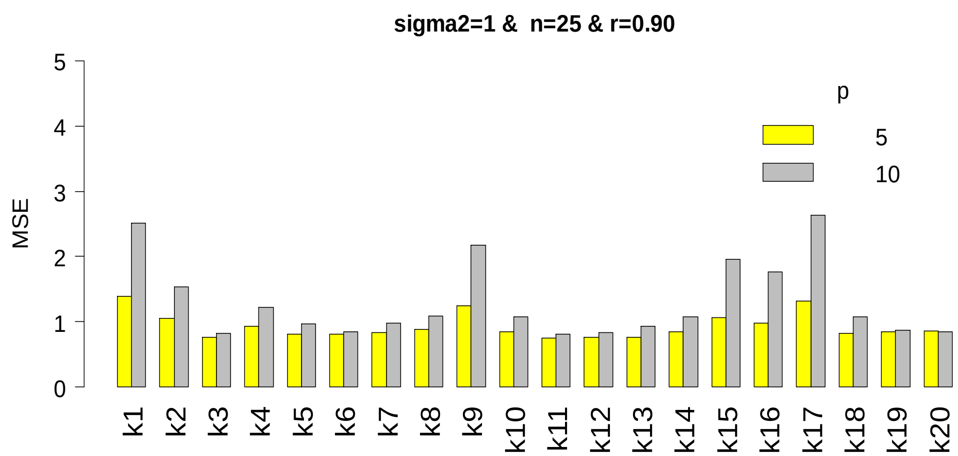
شكل (٣): أداء المقدرات وفقا لتباين حد الخطأ العشوائي σ^2 $(n = 25, p = 5,\ \rho = 0.90)$



شكل (٤): أداء المقدرات وفقا لتباين حد الخطأ العشوائي σ^2 $(n = 25, p = 10,\ \rho = 0.90)$

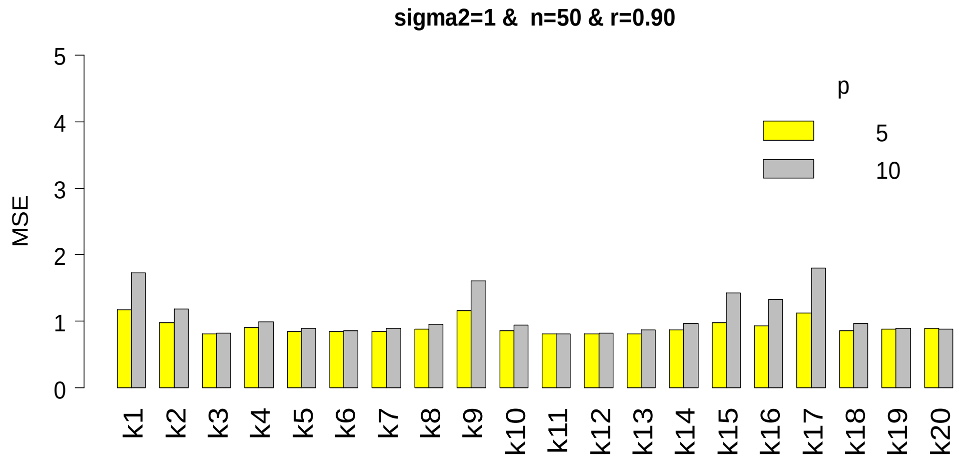
٥-٣ أداء المقدرات وفقا لعدد المتغيرات المفسرة p:

يمكن عرض أداء المقدرات وفقا لتغير عدد المتغيرات المفسرة (p) من الشكلين (٥) و (٦)، حيث يمثلان التوليفتين
$(n = 25,\ \sigma^2 = 1,\ \ \rho = 0.90)$
و$(n = 50,\ \sigma^2 = 1,\ \ \rho = 0.90)$.
ويتضح من الشكلين أن زيادة عدد المتغيرات المفسرة يؤدي إلى زيادة MSE للمقدرات. وأن مقدار تلك الزيادة في MSE قد يكون طفيفا لبعض المقدرات مثل: K20, K19, K12, K11, K3 (في المعادلات ١٦ و٢٧ و٢٨ و٣٨ و٣٩) ، بينما تكون تلك الزيادة كبيرة لمقدرات أخرى هى K17, K16, K15, K9, K1 (في المعادلات ١٤ و٢٣ و٣٣ و٣٤ و ٣٥). وعند زيادة عدد المتغيرات مع حجم عينة كبير، نجد أن تأثير عدد المتغيرات على زيادة MSE يكون أقل وضوحا. حيث تكون الزيادة بسيطة للمقدرات فيما عدا المقدرات K17, K16, K15, K9, K1 (في المعادلات ١٤ و٢٣ و٣٣ و٣٤ و ٣٥). وبشكل عام يمكن القول أن أفضل المقدرات هى: K20, K12, K11, K6, K3 (في المعادلات ١٦ و٢٠ و٢٧ و٢٨ و٣٩).



شكل (٥): أداء المقدرات وفقا لعدد المتغيرات المفسرة p

$$(n = 25, \sigma^2 = 1,\ \ \rho = 0.90)$$



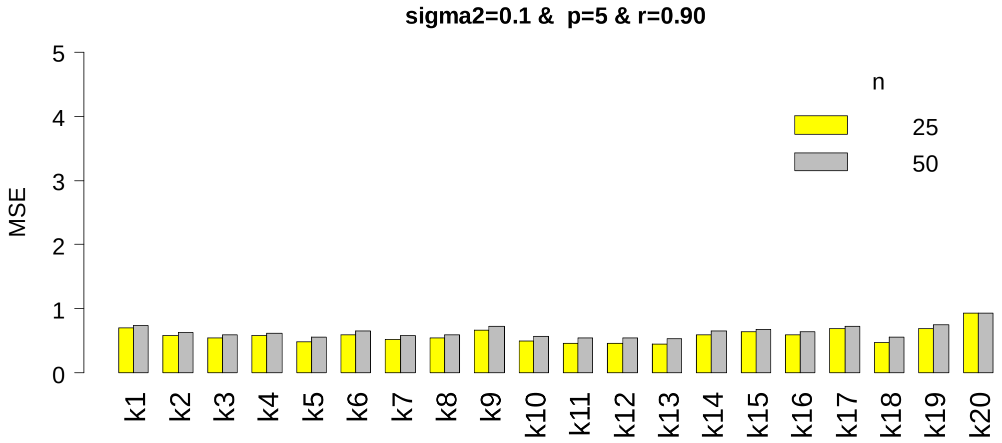
شكل (٦): أداء المقدرات وفقا لعدد المتغيرات المفسرة p

$$(n = 50, \sigma^2 = 1,\ \rho = 0.90)$$

٥-٤ أداء المقدرات وفقا لحجم العينة n:

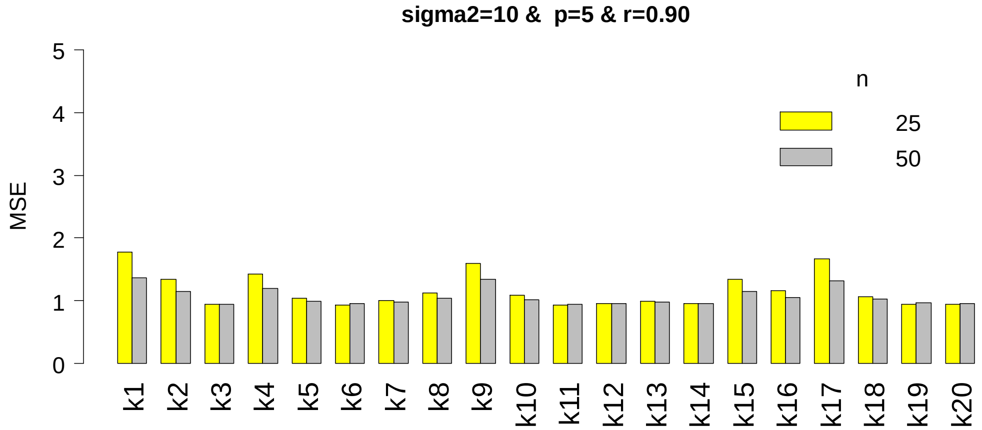
يمكن عرض أداء المقدرات وفقا لتغير حجم العينة من الشكلين (٧) و(٨). حيث يمثلان التوليفتان: $(\sigma^2 = 0.1,\ p = 5,\ \rho = 0.90)$ و $\sigma^2 = 10,\ p = 5,\ \rho = 0.90$. أن زيادة حجم العينة لا يؤدي إلى تغيرات جوهرية في MSE للمقدرات. وأن التغير الملحوظ في MSE يحدث عند التحرك من $\sigma^2 = 0.1$ إلى $\sigma^2 = 10$.

بشكل عام نجد أنه مع زيادة حجم العينة يحدث انخفاض في قيم MSE للمقدرات، وذلك عند قيم كبيرة من ρ وσ^2. وأن أداء المقدرات لايتغير كثيرا بتغير حجم العينة عند القيم الصغيرة من ρ وσ^2. وأن أداء المقدرات K3 , K13, K14, K19, K6,K11, K12،K20 (في المعادلات ١٦ و١٩ و٢٧ و٢٨ و٣٢ و٣٨ و٣٩) أفضل من باقي المقدرات.



شكل (٧): أداء المقدرات وفقا لحجم العينة n

$$(\sigma^2 = 0.1,\ p = 5,\ \rho = 0.90)$$



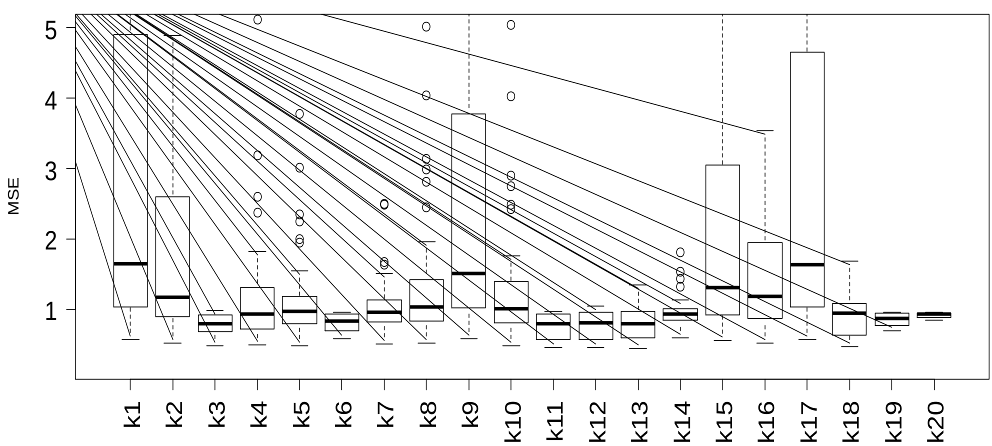
شكل (٨): أداء المقدرات وفقا لحجم العينة n

$$(\sigma^2 = 10,\ p = 5,\ \rho = 0.90)$$

٥-٥ مقارنة عامة لأداء المقدرات

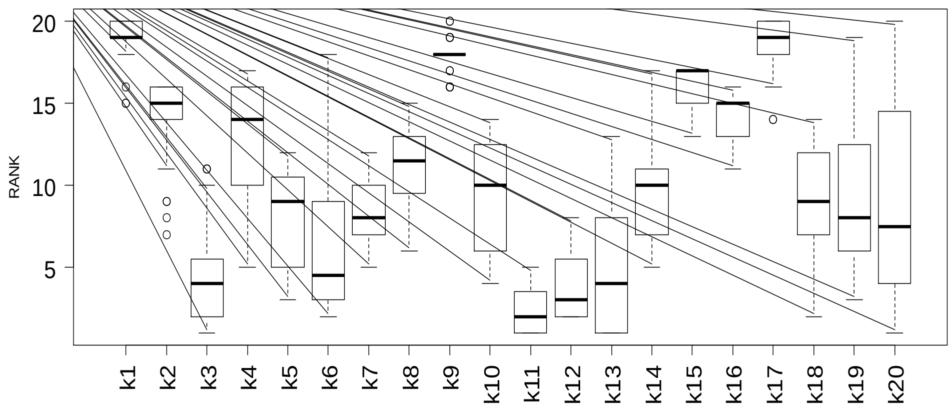
بعد تناول نتائج دراسة المحاكاة بشكل تفصيلي وفقا لكل عامل من عوامل المحاكاة، يمكن عرض النتائج بشكل اجمالي لتحديد أفضل المقدرات أداءً بشكل عام. ويتم استخلاص تلك النتائج الاجمالية باستخدام أكثر من وسيلة. أولا باستخدام الصناديق البيانية للمقدرات عند جميع توليفات دراسة المحاكاة (شكل ٩). ويمثل كل صندوق بياني 36 قيمة من قيم MSE لكل مقدر عند جميع التوليفات.

وتم قطع المحور الرأسي عند القيمة 5 حتى تكون المقارنة أسهل، حيث توجد قيم شاذة كبيرة (تصل إلى 24.3) تجعل من غير الممكن مقارنة المقدرات بعضها البعض. ويتضح من الشكل (٩) أن الصناديق البيانية التي تقع عند مستوى أدنى ولها وسيط أقل، ولا تحتوي على قيم شاذة كبيرة كثيرة هى من أفضل المقدرات.



شكل (٩): قيم MSE للمقدرات عند جميع التوليفات

ورغم ذلك إلا أنه بسبب تقارب أشكال الصناديق لأكثر من نصف المقدرات، نجد أنه تحديد أفضل المقدرات. لذك يمكن أيضا ترتيب المقدرات وفقا لقيم MSE بشكل تصاعدي عند كل توليفة من توليفات المحاكاة واعطاء "رتبة" لكل مقدر، بحيث المقدر الذي له أقل MSE داخل التوليفة يأخذ المرتبة "1"، وهكذا حتى يأخذ المقدر صاحب أكبر MSE المرتبة "20". وقد تم تمثيل تلك الرتب باستخدام الصناديق البيانية في الشكل (١٠). كما يمكن استخدام وسيط الرتب لكل مقدر، كوسيلة إضافية لتقييم أداء المقدرات. وبذلك يتم إعادة ترتيب المقدرات وفقا لوسيط الرتب (تصاعديا) حسب الأفضلية. وبناءً على ماسبق يمكن القول أن أفضل خمسة مقدرات هم: K6, K13, K3, , K11 K12 (في المعادلات ٢٧ و٢٨ و١٦ و٢٩ و٢٠). وأن أسوأ خمسة مقدرات هم : K16, K15, , K17 K9, K1 (في المعادلات ٣٥ و١٤ و٢٣ و٣٣ و٣٤).



شكل (١٠): رتب المقدرات عند جميع التوليفات

٦- الخلاصة

تناولت الدراسة مقارنة بين بعض مقدرات انحدار ريدج. عرضت الدراسة أولا مقدمة عن مشكلة الازدواج الخطي والمداخل المختلفة لعلاج المشكلة، واستخدام مقدر ريدج الذي يعتبر أشهر طرق علاج المشكلة. ثم عرضت الدراسة لعدد ٢٠ مقدر من مقدرات ريدج الأكثر شيوعا وأحدثها وأكثرها استخداما في دراسات المقارنة. ثم قامت الدراسة بالمقارنة بين تلك المقدرات وفقا لمعيار MSE. واستخدمت الدراسة أسلوب المحاكاة تبعا للعوامل التالية: درجة الارتباط بين المتغيرات المفسرة، وتباين حد الخطأ العشوائي، وعدد المتغيرات المفسرة، وحجم العينة. وقد بينت دراسة المحاكاة النتائج التالية: أن زيادة درجة الارتباط ρ له تأثير سلبي على MSE يتمثل في زيادة متوسط مربعات الخطأ للمقدرات.

وأن كلما زاد تباين حد الخطأ العشوائي σ^2 أثر ذلك سلبيا أيضا على MSE للمقدرات. وأن زيادة عدد المتغيرات المفسرة p يؤدي إلى زيادة MSE بشكل عام، وإن كان هذا التأثير قد يتناقص عند العينات الكبيرة. وبالتالي يمكن أن نستنتج أن كبر حجم العينة له تأثير إيجابي على MSE للمقدرات خاصة عند قيم كبيرة من σ^2 أو ρ. وبشكل عام يمكن القول أن أفضل خمسة مقدرات من حيث أن لهم أقل MSE من باقي المقدرات عند معظم توليفات المحاكاة هم: K11 و K12 (Muniz and Kibria ,2009) في المعادلتين ٢٧ و٢٨، ثم K3 (Lawless and Wang, 1976) في المعادلة١٦ و K13 (Al-Hassan ,2010)في المعادلة ٢٩، وأخيرا K6 (Kibria, 2003) في المعادلة ٢٠. وتوصي الدراسة الحالية الباحثين باستخدام تلك المقدرات عند استخدام انحدار ريدج.

المراجع الأجنبية

1- **Al-hassan, Y. (2010), "**Performance of new ridge regression estimators," Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Scie-nce, 9, 23-26.

2- **Alkhamisi, M. A., and Shukur, G. (2007)** "A Monte Carlo study of recent ridge parameters," Communications in Statistics—Simulation and Computation, 36, 535–547.

3- **Alkhamisi, M.A., and Shukur, G. (2008),** "Developing ridge parameters for SUR model," Communications in Statistics-Theory and Methods, 37, 544-564.

4- **Asar Yasin and Genç Aşır (20-17),** "A note on some new modifications of ridge estimators," Kuwait J. Sci., 44 , 3, 75-82.

5- **Azzam, A.M., Hallawa, A.M., and Kafsher, M.T. (1995),** "A new stochastic rule for computing the biasing factors in ridge regression," Economic and Business R-eview, 157-174.

6- **Batah, F. S. M., and Gore, S. D. (2009)**, "Ridge regression estimator: Combining unbiased and ordinary ridge regression methods of estimation," Surveys in Mathematics and its Applications, 4, 99-109.

7- **Dempster, A.P., Laird, N.M., and Rubin, D.B. (1977),** "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," Jour-nal of the Royal Statistical Society: S-eries B (Statistical Metho-dology), 39, 1-38.

8- **Dorugade, A.V. (2014),** "New ridge parameters for ridge regression," Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences, 15, 94–9

9- **Duzan, H., and Sharif, N. S. (2015),** "Ridge regression for solving the multicollinearity problem: Review of Methods and Models," Journal of Applied Science-s,15,392-404.

10- **Firinguetti, L. (1999),** "A generalized ridge regression estimator and its finite sample properties," Communications in Statistics-Theory and Methods, 28(5), 1217-1229.

11- **Gibbons, D. G. (1981),** "A simulation study of some ridge estimators," Journal of the American Statistical Association, 76, 131–139.

12- **Hallawa, A., and Azzam, A. (1995)**, "A new method for generating the design matrix of a linear regression model," The Egyptian Statistical Journal ISSR, Cairo Univ., 39,1, 106-119

13- **Hocking, R. R., Speed, F. M., and Lynn, M. J. (1976)**, "A class of biased estimators in linear regression," Technometrics, 18, 4, 425-437.

14- **Hoerl, A. E., and Kennard, R. W. (1970 a),** "Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems," Technometrics, 12, 55-67.

15- **Hoerl, A. E., and Kennard, R. W. (1970 b),** "Ridge regression: applications to non-orthogonal pr-oblems," Technometrics, 12, 69-82.

16- **Hoerl, A. E., Kennard, R.W. and Baldwin, K.F., (1975)**, "Ridge regression: some simulations," Communications in Statistics, 4, 105–123.

17- **Khalaf, G., and Iguernane, M. (2016)** "Multicollinearity and a ridge parameter estimation approach," Journal of Modern Applied Statistical Methods, 15, 2, 400-410.

18- **Khalaf, G., and Shukur, G. (2005)**, "Choosing ridge parameter for regression problem," Communications in Statistics – Theory and Methods, 34, 1177–118

19- **Kibria, B. M. G. (2003),** "Performance of some new ridge regression estimators" Communications in Statistics-Simulation and Computation, 32, 419-435.

20- **Lawless, J.F., and Wang, P. (1976),** "A simulation study of ridge and other regression estimators," Communications in Statistics – Theory and Methods, 14, 1589–1604.

21- **Lukman, A.F, and Ayinde, K. (2016)**, "Review and classifications of the ridge parameter estimation techniques," Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics, 46(113):1-1.

22- **Lukman, A.F, Ayinde, K., Adegoke, A.S., and Tosin, D. (2017),** "Some robust liu estimators," Zimbabwe Journal of Science and Technology , 12, 8-14

23- **Mansson, K., Shukur, G. and Kibria, B. G. (2010).** On some ridge regression estimators: A Monte Carlo simulation study under different error variances," Jo-urnal of Statistics, 17(1), 1-22.

24- **McDonald, G. C., and Galarneau D. I. (1975)**, "A Monte Carlo evaluation of some ridgetype estimators," Journal of the American Statistical Association, 70, 407-416.

25- **Muniz, G., and Kibria, B.G. (2009),** "On some ridge regression estimators: An empirical comparisons," Communications in Statistics - Simulation and computation, 38, 621-630.

26- **Muniz, G., Kibria, B.G., Mansson, K., and Shukur, G. (2012),** "On developing ridge regression parameters: A graphical investigation," Sort: Stat. Operations Res. Trans., 36, 115-138.

27- **Newhouse, J.P., and Oman, S.D. (1971),** "An evaluation of ridge estimators," Rand Corporation, P-716-PR, 1-28.

28- **Nomura, M. (1988),** "On the almost unbiased ridge regression estimation," Communications in Statistics-Simulation and Computation 17 (3), 729-743.

29- **Stein, C. M. (1960),** "Multiple regression, contributions to probability and statistics," Stanford University Press 424-443.