



تأثير عدم تجانس التباين و/ أو عدم الاعتدال على اختبار T للعينتين: دراسة محاكاة

أ/ رماح عبدالدايم الصاوي

مدرس مساعد بقسم الاحصاء

والرياضة والتأمين

كلية التجارة - جامعة الاسكندرية

The Effect of Heterogeneity and/or Nonnormality on two Sample T test: A Simulation Study

Abstract

The two sample T test is considered the most popular test to compare two independent groups. It is a UMPU test (Uniformly Most Powerful Unbiased test) under the assumption of normality and homogeneity of variance, but under violation of these assumptions is the two sample T test still performs well? The aim of this article is to answer this question through an extended simulation study to examine the performance of the two sample T test for various shapes of data. *

ملخص البحث

يعد اختبار T من أكثر الاختبارات الاحصائية شيوعاً واستخداماً لمقارنة متوسطي مجتمعين مستقلين حيث يكون هو أفضل الاختبارات الاحصائية UMPU (Uniformly Most Powerful Unbiased test) عند تحقق افتراضى الاعتدال وتجانس التباينات ولكن هل يظل اختبار T له أداء جيد عند مخالفة افتراضات هذا الاختبار؟ يحاول البحث الحالى الاجابة عن السؤال من خلال دراسة محاكاة موسعة للوقوف على أداء هذا الاختبار فى ظل الأنماط المختلفة من البيانات.

*البحث مشتق من رسالة دكتوراه بعنوان " تأثير الابتعاد عن الافتراضات الأساسية لاجراء اختبار تساوى متوسطى مجتمعين

مستقلين: دراسة محاكاة " تحت اشراف الاستاذ الدكتور / عادل محمود حلاوة، والاستاذ الدكتور/ اسامة عبد العزيز حسين

متوسطى مجتمعين مستقلين حيث يعطى نتائج مضللة بالنسبة لمستوى المعنوية الحقيقي ومن ثم قوة الاختبار مما يؤدي إلى اتخاذ قرارات خاطئة.

لذا فان هذا البحث يهتم بدراسة مدى متانة (robustness) اختبار T إذا كان تباينا مجتمعى الدراسة غير متساويين و/ أو توزيعا المجتمعين المسحوب منهما العينتين غير معتدلين وذلك من خلال دراسة محاكاة يتم فيها دراسة أداء اختبار T للعينتين حيث يتم دراسة تأثير الابتعاد عن الافتراضات الخاصة بالاختبار على متانة (robustness) هذا الاختبار أى مدى اقتراب مستوى المعنوية التجريبي (empirical level) من مستوى المعنوية الاسمى α (nominal level) بالإضافة الى دراسة قوة الاختبار التجريبية (empirical Power) لهذا الاختبار.

وتعتمد دراسة المحاكاة على عدة عوامل وهي:

1. أحجام العينات والنسبة بينهما (أكبر من أم أقل من أم تساوى الواحد).
2. التباينات والنسبة بينهما.
3. درجات مختلفة من التقرب.
4. درجات مختلفة من الالتواء (الالتواء متساوى أم غير متساوى وهل هو فى نفس الاتجاه أم فى اتجاهين مختلفين).

٢- الخصائص النظرية لإحصائية اختبار T للعينتين

(١-٢) إحصائية اختبار T

تأخذ إحصائية اختبار T للفرق بين متوسطى مجتمعين مستقلين الشكل التالى:

١- مقدمة

كثيراً ما نحتاج فى الواقع العملى إلى مقارنة مجموعتين من البيانات من خلال اختبار ادعاء معين عن الفرق بين متوسطى مجتمعين مستقلين. وفى هذا الصدد فإن اختبار T يعد من أكثر الاختبارات الاحصائية شيوعاً واستخداماً سواء للاحصائيين أو غير الاحصائيين حيث يعتبر اختبار T هو أفضل الاختبارات الاحصائية (Uniformly Most Powerful Un-biased test) بشرط تحقق افتراضات هذا الاختبار وهذه الافتراضات هي:

1. افتراض استقلال المشاهدات (independence) .
2. افتراض تبعية المشاهدات لنفس التوزيع (identical distribution) .
3. افتراض اعتدال توزيعى مجتمعى الدراسة (normality) .
4. افتراض تساوى تباينى مجتمعى الدراسة (homogeneity of variance) .

وفى أغلب التطبيقات العملية فإن الافتراضين الأخيرين نادراً ما يتحققان مما يؤدي إلى عدم صلاحية هذا الاختبار وبالتالي لا يمكن الاعتماد على نتائجه حيث أنه يعطى نتائج مضللة والتي تؤدي إلى قرارات خاطئة.

وقد أشار Micceri (1989) الى عدم تبعية أغلب التطبيقات العملية للتوزيع المعتدل بالإضافة إلى عدم تساوى تباينات مجتمعات الدراسة ومن ثم فإنه من الخطأ استخدام اختبار T للفرق بين

$$P_2(x) = -b_1 b_0^{-3} H_5(x) - b_2 a_0^{-2} H_3(x) - b_3 a_0^{-1} H_1(x) - \left(T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right)$$

$$H_1(x) = x, H_2(x) = x^2 - 1, H_3 = x^3 - 3x$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, H_5 = x^5 - 10x^3 + 15x$$

$$a_0 = d_1^2 + d_2^2$$

$$a_1 = \gamma_1 \left[\frac{1}{6} d_1^3 \lambda_1^{-1} - \frac{1}{2} d_1 d_3 a_0 + \gamma_2 \left[-\frac{1}{6} d_2^3 \lambda_2^{-1} + \frac{1}{2} d_2 d_4 a_0 \right] \right]$$

$$a_2 = \gamma_2 \left(\frac{1}{2} d_2 d_4 \right) - \gamma_1 \left(\frac{1}{2} d_1 d_3 \right), b_1 = \frac{1}{2} a_1^2$$

$$b_2 = \kappa_1 \left[-\frac{1}{4} d_1^2 d_3 \lambda_1^{-1} a_0 + \frac{1}{8} a_0^2 d_3^2 + \frac{1}{24} d_1^4 \lambda_1^{-2} \right] +$$

$$\kappa_2 \left[-\frac{1}{4} d_2^2 d_4 \lambda_2^{-1} a_0 + \frac{1}{8} a_0^2 d_4^2 + \frac{1}{24} d_2^4 \lambda_2^{-2} \right] +$$

$$\gamma_1^2 \left[-\frac{1}{3} d_1^4 d_3 \lambda_1^{-1} + d_1^2 d_3^2 a_0 \right] + \gamma_2^2 \left[-\frac{1}{3} d_2^4 d_4 \lambda_2^{-1} + d_2^2 d_4^2 a_0 \right]$$

$$+ \gamma_1 \gamma_2 \left[\frac{1}{3} d_1 d_2 (d_2^2 d_3 \lambda_2^{-1} + d_1^2 d_4 \lambda_1^{-1}) \right] + 2 d_1 d_2 d_3 d_4 a_0$$

$$+ \frac{1}{4} a_0^2 (d_3^2 + d_4^2)$$

$$b_3 = \kappa_1 \left[-\frac{1}{2} d_1^2 d_3 \lambda_1^{-1} + \frac{1}{2} a_0 d_3^2 \right] +$$

$$\kappa_2 \left[-\frac{1}{2} d_2^2 d_4 \lambda_2^{-1} + \frac{1}{2} a_0 d_4^2 \right]$$

$$b_3 = \kappa_1 \left[-\frac{1}{2} d_1^2 d_3 \lambda_1^{-1} + \frac{1}{2} a_0 d_3^2 \right] +$$

$$\kappa_2 \left[-\frac{1}{2} d_2^2 d_4 \lambda_2^{-1} + \frac{1}{2} a_0 d_4^2 \right]$$

$$b_3 = \kappa_1 \left[-\frac{1}{2} d_1^2 d_3 \lambda_1^{-1} + \frac{1}{2} a_0 d_3^2 \right] +$$

$$\kappa_2 \left[-\frac{1}{2} d_2^2 d_4 \lambda_2^{-1} + \frac{1}{2} a_0 d_4^2 \right]$$

والتي لها توزيع T بدرجات حرية $(n_1 + n_2 - 2)$ عند تحقق افتراض الاعتدال و افتراض تجانس التباينات.

(٢-٢) التوزيع التقاربي لاحصائية T

للعينتين في حالة عدم اعتدال

توزيع مجتمعي الدراسة

اهتمت العديد من الدراسات بدراسة الخصائص النظرية لاحصائية T للعينتين في حالة عدم تحقق الافتراضات النظرية لهذا الاختبار حيث قامت هذه الدراسات بدراسة التوزيع التقاربي لهذه الاحصائية حيث تم تقريب توزيع احصائية T بالتوزيع المعتدل من خلال استخدام مفكوك Edgeworth ومفكوك Cornish-Fisher.

(١-٢-٢) مفكوك Edgeworth

لاحصائية T للعينتين في ظل صحة

فرض العدم

قدم Xu et al. (2009) مفكوك Edgeworth للدالة التراكمية Cumulative distribution function لاحصائية T للعينتين في ظل صحة فرض العدم والذي يأخذ الشكل التالي:

$$F_T(x) = \Phi(a_0^{-1/2}x) + N^{-1/2} P_1(a_0^{-1/2}x) \phi(a_0^{-1/2}x)$$

$$+ N^{-1} P_2(a_0^{-1/2}x) \phi(a_0^{-1/2}x) + o(N^{-1})$$

حيث:

$$P_1(x) = -a_1 a_0^{-3/2} H_2(x) - a_2 a_0^{-1/2}$$

$$P_2(x) = (\gamma_1^* - \gamma_2^*)^2 \beta_1 H_5(x) + (\gamma_1 d_1 d_3 - \gamma_2 d_2 d_4)^2 + a_0 (d_3^2 + d_4^2 - 2c)$$

$$[\tau_1 (\kappa_1^* + \kappa_2^*) + \tau_2 (\gamma_1^* - \gamma_2^*)^2 + \tau_3] H_3(x) + [\xi_1 (\gamma_1^* - \gamma_2^*)^2 + \xi_2] H_1(x)$$

$$d_1 = \frac{\lambda_2 \rho_1}{\sqrt{\lambda_1^2 \rho_1^2 + \lambda_2^2 \rho_2^2}}, d_2 = \frac{\lambda_1 \rho_2}{\sqrt{\lambda_1^2 \rho_1^2 + \lambda_2^2 \rho_2^2}}$$

$$d_3 = \frac{\lambda_1 \rho_1^2}{(\lambda_1^2 \rho_1^2 + \lambda_2^2 \rho_2^2)}, d_4 = \frac{\lambda_2 \rho_2^2}{(\lambda_1^2 \rho_1^2 + \lambda_2^2 \rho_2^2)}$$

$$\gamma_j^* = \gamma_j \sigma^3, \kappa_j^* = \kappa_j \sigma^4$$

و α_j و β_1 و τ_j و ξ_j هي دوال في σ_1^2 و σ_2^2

فقط حيث:

$$\alpha_1 = -\sqrt{2} \eta^3 / 3, \alpha_2 = -\sqrt{2} \eta^3 / 2, \beta_1 = -\eta^6 / 9, \tau_1 = \eta^4 / 6$$

$$\tau_2 = -4\eta^6 / 3, \tau_3 = -(d_3^2 + d_4^2) / 4, \xi_1 = -2\eta^6$$

$$\xi_2 = -d_3^2 + d_4^2, \eta = 1 / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

ومن هنا يتضح أنه كلما اقترب العزم المركزي الثالث للمجتمعين من بعضهما البعض كلما اقترب توزيع احصائية T من التوزيع المعتدل المعياري مع زيادة أحجام العينات .

٣- إذا كان التوزيعان لهما نفس الشكل (identical distributions) وكان الاختلاف فقط في

معلمة الموقع حيث $G_1(x) = G_2(x + \mu)$ فان

$$a_0 = 1, a_2 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{6} (\gamma (\lambda_2^3 \lambda_1^{-1} - \lambda_1^3 \lambda_2^{-1})), b_1 = \frac{1}{2} (a_1^2)$$

$$b_2 = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{24} \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}\right) \kappa + \frac{1}{4}, b_3 = 1$$

وعندما تكون أحجام العينات متساوية ($n_1 = n_2$) فان:

$$c = 2 - (\lambda_1^2 \rho_1^2 + \lambda_2^2 \rho_2^2)^{-1}$$

$$\lambda_j = (n_j / N)^{1/2}, N = n_1 + n_2, \rho_j = [\sigma_j^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^{1/2}, j = 1, 2$$

$$\gamma_j = \mu_{3j} / \sigma_j^3, \kappa_j = \mu_{4j} / \sigma_j^4$$

حيث μ_3 هي العزم المركزي الثالث و μ_4 هي العزم المركزي الرابع .

بعض الحالات الخاصة لاحصائية T

١- اذا كانت التوزيعات معتدلة والتباينات مختلفة (Behrens-Fisher Problem) في هذه

الحالة نجد أن $(P_1(x) = 0)$ حيث $(\gamma_1 = \gamma_2 = 0)$ لأن $(a_1 = a_2 = 0)$

وبالتالي فان:

$$(b_1 = \frac{1}{2} a_1^2 = 0)$$

و

$$P_2(x) = -\frac{1}{4} (d_3^2 + d_4^2) H_3(x) + (2c - d_3^2 - d_4^2) H_1(x)$$

٢- عندما تكون أحجام العينات متساوية فان

إحصائية T تكون مساوية لاحصائية Welch (1938) احصائية T في حالة عدم

تساوى التباينات) حيث $(a_0 = 1)$ و

وبالتالي فان $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2)$

$$P_1(x) = (\gamma_2^* - \gamma_1^*) [\alpha_2 H_2(x) + \alpha_1]$$

وعائلة توزيعات لمدا المعممة (generalized lambda distribution) التي قدمها Ramberg et al. (1979) لدراسة تأثير اختلاف التباينات و/أو عدم اعتدال توزيع مجتمعي الدراسة على خصائص احصائية الاختبار محل البحث.

والهدف من عائلة توزيعات لمدا المعممة هو تغطية الأنماط المختلفة للابتعاد عن التوزيع المعتدل لدراسة تأثير الدرجات المختلفة للالتواء والتفرطح على مستوى المعنوية التجريبي وقوة الاختبار التجريبي لاختبار T.

٣-٢ معالم دراسة المحاكاة

تهدف دراسة المحاكاة في هذا البحث الى دراسة أداء اختبار T من حيث مستوى المعنوية التجريبي وقوة الاختبار التجريبي لهذا الاختبار حيث تم توليد خمسة الاف عينة عشوائيه ببذره مبدئيه (initial seed) (٥١٢٢٠٠٨) من التوزيع المعتدل (normal distribution) لدراسة تاثير اختلاف التباين على أداء هذه الاختبارات كذلك أيضا تم توليد خمسة الاف عينة من عائلة توزيعات لمدا المعممة (generalized lambda distribution) باستخدام لغة البرمجة الاحصائية R (version 4.3.1) وذلك لدراسة تأثير اختلاف التباينات و/أو عدم اعتدال توزيعي مجتمعي الدراسة على أداء احصائية الاختبار محل البحث.

أيضا تم دراسة تأثير اختلاف حجمي العينتين على أداء احصائية الاختبار حيث تم دراسة أحجام عينات "n_j" (١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠) لكل عينه من العينتين بمتوسط صفر وانحراف معياري (٠،٢٥، ٠،٥، ١، ٢، ٣، ٤، ٥) بالاضافه الى قيم معامل الالتواء γ (صفر، ١٠، ٠،٥، ٤، ٤، ٢،٥، ١،٨، ٤،

$$P_1(x) = 0, P_2(x) = \left(\frac{1}{12}\kappa - \frac{1}{4}\right) H_3(x) - H_1(x)$$

حيث:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \mu_3/\sigma^3, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa = \mu_4/\sigma^4$$

أى فى هذه الحالة لا يوجد تأثير للالتواء على توزيع إحصائية T.

(٢-٢-٢) مفكوك Cornish-Fisher

لاحصائية اختبار T للعينتين

أوضح Wang et al. (2017) أن مفكوك Cornish-Fisher لمئينات (quantiles) التوزيع الاحتمالي للاحصائية T ($F_T(x)$) يكون كالتالى:

$$\eta_\alpha(\delta_N) = t_\alpha^{cf} + c_N + N^{-1/2}a_{21}z_\alpha/2 + N^{-1}R_\alpha(\delta_N) + o(N^{-3/2})$$

حيث:

$$\varepsilon < \alpha < 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0$$

$$T_\alpha^{cf} = z_\alpha + N^{-1/2}p_1(z_\alpha|\delta_N = 0) = z_\alpha + N^{-1/2}[a_{11} + a_{31}(z_\alpha^2 - 1)/6]$$

و

$$R_\alpha(\delta_N) = p_1(z_\alpha|\delta_N)(3a_{21} + 2a_{31}z_\alpha)/6 - z_\alpha p_1(z_\alpha|\delta_N)^2/2 + p_2(z_\alpha|\delta_N)$$

وقد أوضحت Yuen and Dixon (1973) من خلال دراسة محاكاة أنه كلما زادت درجة التلويث (contamination) للتوزيع المعتدل (أى كلما زادت كثافة أطراف توزيعي مجتمعي الدراسة) كلما أصبح اختبار T محافظا (Conservative)

٣-٢ دراسة المحاكاة ونتائجها

٣-١ التوزيعات الاحتمالية المستخدمة

لتحقيق الهدف من هذا البحث تم استخدام كلا من التوزيع المعتدل (normal distribution)

حيث أن نتائج دراسة المحاكاة كثيرة جدا فقد تم عرض بعض الأشكال البيانية والجداول التى تقى بالغرض من البحث فى الملحق ، وبدراسة هذه الأشكال البيانية والجداول يمكن استنتاج ما يلى :

أولاً: فى حالة اعتدال توزيعى مجتمعى

الدراسة فانه يتضح من شكل (١)

وشكل (٢) بالاضافة الى جدول (١)

مايلى:

إذا كانت أحجام العينات متساوية فان اختبار T يكون متين (robust) حيث يقترب مستوى المعنوية التجريبى من مستوى المعنوية الاسمى سواء كانت التباينات متساوية أو غير متساوية .

تزداد قوة الاختبار مع اقتراب النسبة (σ_1/σ_2) من الواحد الصحيح كما تقترب قوة الاختبار من الواحد الصحيح مع زيادة أحجام العينات.

أما إذا كانت أحجام العينات غير متساوية فان اختبار T يكون متين عندما تكون التباينات متساوية بينما يصبح اختبار T متحررا (متحفظا) جدا إذا كانت العينة صغيرة (كبيرة) الحجم مسحوبة من المجتمع ذى التباين الكبير .

ثانياً: إذا كان توزيعاً مجتمعى الدراسة

متماثلين

١- حالة تجانس التباينات يتضح من شكل

(٣) وجدول (٢) ما يلى:

يكون اختبار T متين سواء كانت أحجام العينات متساوية أو غير متساوية وسواء كان التوزيعان لهما نفس درجة التقطح أم لا.

٢- حالة عدم تجانس التباينات بدراسة شكل

(٤) وجدول (٣) يمكن استنتاج ما يلى:

٦,٥، ١٤,٧، ١٨,٥) للتوزيعات المتماثلة بينما كانت قيم K فى حالة التوزيعات غير المتماثلة هى (٤ ، ٨ ، ١٨ ، ٢٢) حيث تعكس قيم هذه المعاملات الأنماط المختلفة لتوزيعات البيانات ، وقد تم أخذ هذه القيم للمعالم حتى يسهل مقارنة النتائج مع نتائج الدراسات السابقة.

وعندما يكون مستوى المعنوية الاسمى (nominal level) هو ٥% فان هذا العدد من العينات المولدة لكل توليفة يجعل الحد الأقصى لخطأ تقدير مستوى المعنوية الاسمى هو ٠,٠٠٧٩ بدرجة ثقة ٩٩% ومن ثم فان الاختبار الذى يزيد مستوى المعنوية التجريبى (empirical level) الخاص به عن ٠,٠٥٧٩ يعد اختباراً متحرراً (liberal) وبالتالي يكون غير صالح (invalid test).

ولحساب قوى الاختبار التجريبية (empirical power) المصاحبة للاختبار فاننا نضع القيمة

$$\mu_{10} - \mu_{20} = (\mu_1 - \mu_2) \pm \delta\sigma$$

حيث:

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$$

وتكون الاشارة موجبة اذا كنا بصدد اختبار طرف أيمن بينما تكون الاشارة سالبة اذا كنا بصدد اختبار طرف أيسر حيث تأخذ δ القيم (٠ ، ٠,٥ ، ٠,١٠ ، ٠,٢٥ ، ٠,٥ ، ٠,٧٥) بما يضمن تغطية مناطق مختلفة من مدى دالة القوة (The power function) وقد تم حساب مستوى المعنوية على أنه متوسط عدد مرات رفض فرض العدم عندما $(\delta = 0)$ بمستوى معنوية اسمى $(\alpha=0.05)$ بينما تكون قوة الاختبار التجريبية هى متوسط عدد مرات رفض فرض العدم عندما $(\delta \neq 0)$.

٣-٣ نتائج دراسة المحاكاة

درجة الالتواء الصغيرة حيث يصبح اختبار T متحفظ بغض النظر عن اتجاه الاختبار مع زيادة المقدار $|\gamma_1 - \gamma_2|$.

٢- حالة عدم تجانس التباينات يتضح من شكل (٦) و جدول (٥) ما يلى:

إذا كانت أحجام العينات متساوية يصبح اختبار T متحفظا (متحررا) إذا كان اتجاه الاختبار عكس (نفس أو اختبار طرفين) اتجاه الالتواء ويزداد الأمر سوءا مع زيادة درجة الالتواء سواء كان توزيعا مجتمعى الدراسة لهما نفس الشكل أم لا.

أما إذا كانت أحجام العينات غير متساوية فإن اختبار T يكون متحفظ (متحرر) جدا إذا كانت العينة صغيرة (كبيرة) الحجم مسحوبة من المجتمع ذى التباين الصغير بغض النظر عن اتجاه الاختبار وتزداد حدة ذلك مع زيادة درجة الالتواء.

رابعا: إذا كان توزيعا مجتمعى الدراسة لهما اتجاهات التواء مختلفة

١- حالة تجانس التباينات بدراسة شكل (٧) و جدول (٦) يتضح ما يلى:

- يكون اختبار T متحفظ (متحرر) إذا كان الاختبار ذو طرف أيسر (أيمن) بينما يكون الاختبار ذو الطرفين متين عند درجة الالتواء الصغيرة ويصبح متحررا مع زيادة المقدار $|\gamma_1 - \gamma_2|$ سواء كان التوزيعان لهما نفس الشكل أم لا وسواء كانت أحجام العينات متساوية أو غير متساوية.

٢- حالة عدم تجانس التباينات يتضح من شكل (٨) و جدول (٧) ما يلى:

- إذا كانت أحجام العينات متساوية فإن اختبار T يكون متحفظا (متحررا) إذا كان الاختبار ذو

إذا كانت أحجام العينات متساوية فإن اختبار T يكون متين باستثناء الحجم الصغير للعينات عندما يكون توزيعا مجتمعى الدراسة لهما أطراف قصيرة.

أما إذا كانت أحجام العينات غير متساوية فإن اختبار T يكون متحفظ (متحرر) جدا إذا كانت العينة صغيرة (كبيرة) الحجم مسحوبة من المجتمع ذى التباين الصغير ويزداد الأمر سوءا مع ابتعاد ابتعاد جمعى العينتين عن بعضهما البعض.

تكون قوة الاختبار فى حالة عدم تساوى التباينات أقل من تلك الخاصة بحالة تساوى التباينات .

ثالثا: إذا كان توزيعا مجتمعى الدراسة غير متماثلين (الالتواء فى نفس الاتجاه)

١- حالة تجانس التباينات يتضح من شكل (٥) و جدول (٤) ما يلى:

- إذا كان توزيعا مجتمعى الدراسة لهما نفس الشكل فإن اختبار T يكون متين سواء كانت أحجام العينات متساوية أو غير متساوية.

- إذا كان توزيعا مجتمعى الدراسة ليس لهما نفس الشكل فإن اختبار T يكون متين عندما يكون المقدار $|\gamma_1 - \gamma_2|$ صغير بينما يصبح اختبار T متحفظا (متحررا) إذا كان اتجاه الاختبار عكس (نفس) اتجاه الالتواء مع زيادة المقدار $|\gamma_1 - \gamma_2|$ سواء كانت أحجام العينات متساوية أو غير متساوية .

يكون الاختبار ذو الطرفين متين عندما تكون أحجام العينات متساوية بينما يصبح متحرر مع زيادة المقدار $|\gamma_1 - \gamma_2|$ عندما تكون أحجام العينات غير متساوية باستثناء الحالة التى تكون فيها العينة كبيرة الحجم مسحوبة من المجتمع ذى

المراجع

- 1- Lehman, E.L. & Romano, J.P. (2005). Testing statistical hypotheses. Third edition, Springer, New Yo-rk.
- 2- Micceri, T. (1989). The unicorn, the normal curve, and other improbable creatures. *Psychological Bulletin*, 105, 156-166.
- 3- Ramberg, J.S. Dudewicz, E.J. Tadikamalla, P.R. and Mykytka, E.F. (1979). A probability distribution and its uses in fitting data. *Technometrics*, 21, 201-214.
- 4- Wang, H. Tong, B. Zang, H. and Li, X. (2017). New two sample tests for skewed populations and their connection to theoretical power of bootstrap-t test. *TEST*, 26(3), 661-683.
- 5- Welch, B.L. (1938). The Significance of the difference between two means when the variances are unequal. *Biometrika*, 29, 350-362.
- 6- Wilcox, R.R. (2005). New method for comparing groups. *Current Direction in psychological science*, 14 (5), 272-275
- 7- Xu, J. Cui, X. & Gupta, A.K. (2009). Improved statistics for contrasting means of two samples under non-normality. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 62(1), 21-40.
- 8- Yuen, K.K. & Dixon, W.L. (1973). The approximate behavior and performance of two-sample trimmed t. *Biometrika*, 60, 369-374.

طرف أيسر (أيمن أو طرفين) سواء كان توزيعاً

مجتمعي الدراسة لهما نفس الشكل أم لا

أما إذا كانت أحجام العينات غير متساوية فإن

اختبار T يكون متحفظ (متحرر) إذا كانت العينة

صغيرة (كبيرة) الحجم مسحوبة من المجتمع ذي

التباين الصغير بغض النظر عن اتجاه الاختبار.

يكون الاختبار ذو الطرفين متيناً فقط عند درجة

الالتواء الصغيرة إذا كانت أحجام العينات متساوية

وليست صغيرة جداً..

بصفة عامة يتحسن أداء الاختبار من حيث

المتانة ومن حيث قوة الاختبار مع زيادة أحجام

العينات.

الخلاصة والتوصيات

- يكون اختبار T متيناً عندما تكون أحجام

العينات متساوية أو عندما تكون التباينات

متساوية.

- يكون اختبار T متيناً عندما يكون التوزيعان

غير متمائلين ولكن لهما نفس الشكل.

يوصى البحث بدراسة اختبارات أخرى مثل

الاختبارات التي تأخذ في الاعتبار عدم اعتدال

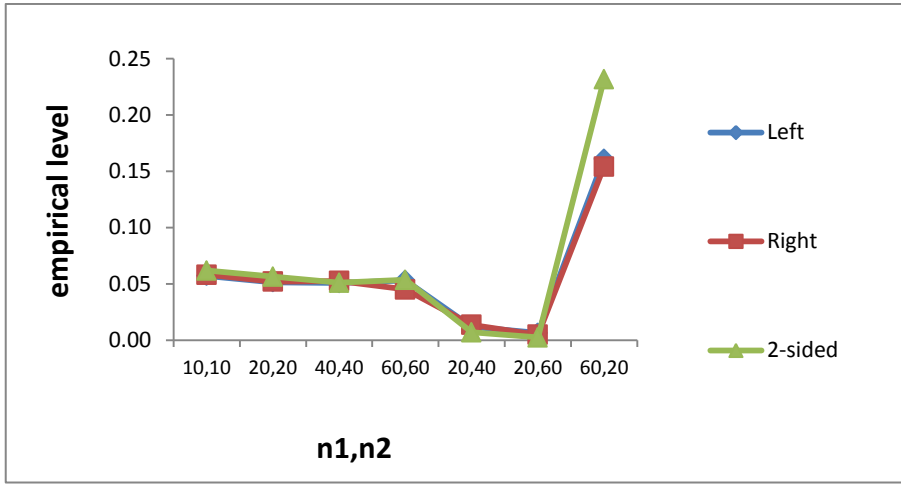
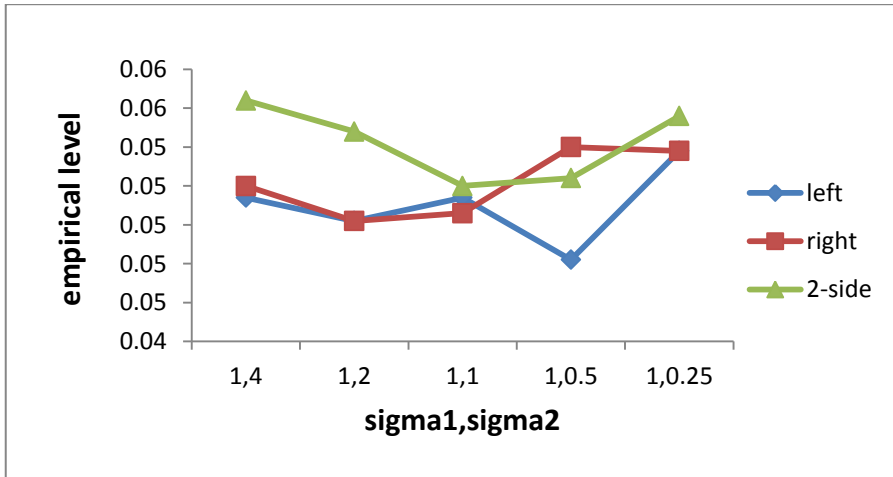
توزيعي مجتمعي الدراسة واختلاف التباينات مثل

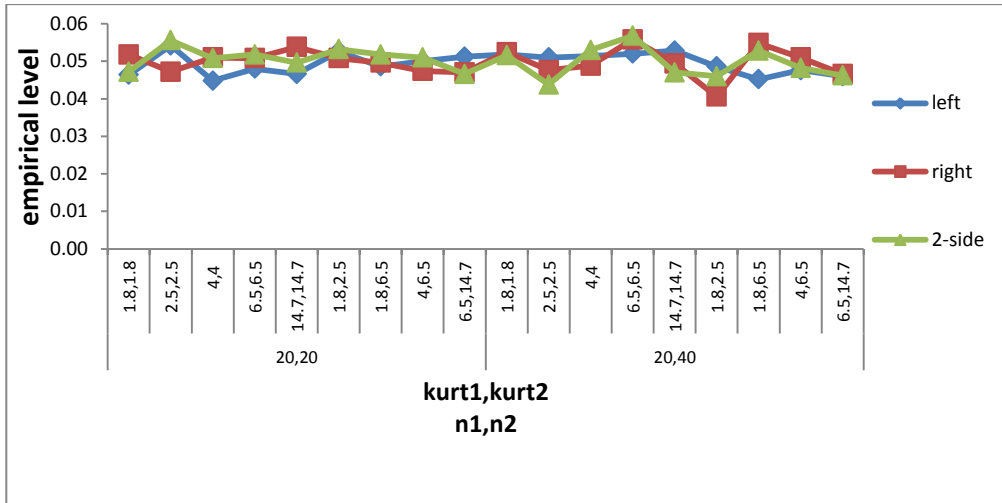
احصائيتي Johnson و Hall أو الاختبارات

المتينة (robust) أو استخدام طريقة bootstrap

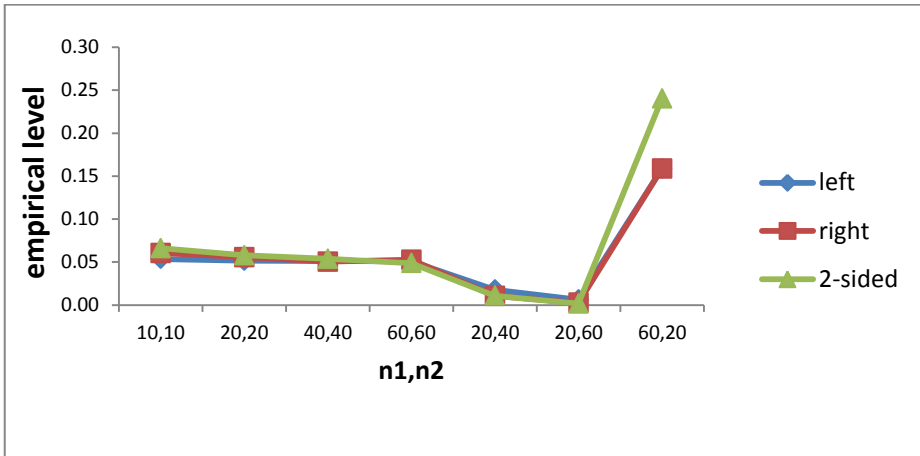
مع احصائيات الاختبار السابقة.

الملحق

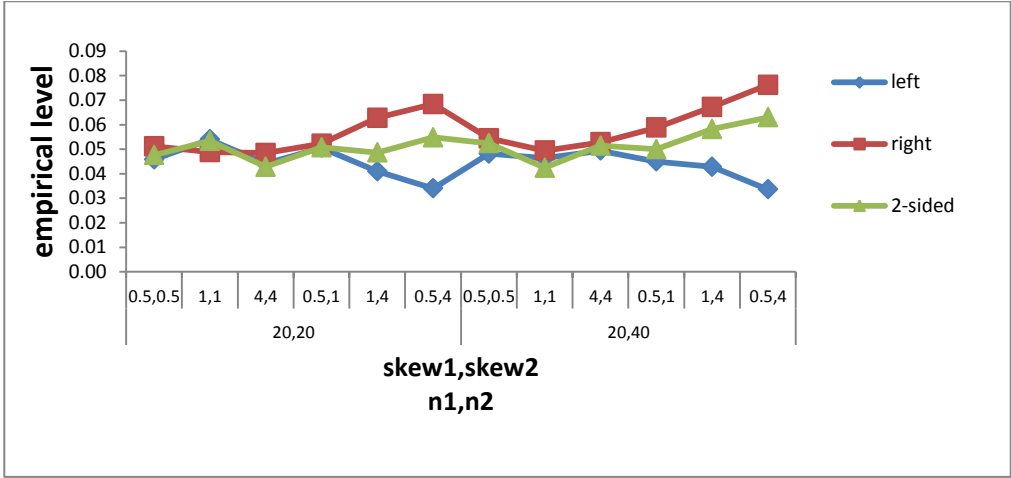
شكل (١): مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيع المعتدل عندما $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 4$ شكل (٢): مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيع المعتدل عندما $n_1 = n_2 = 20$



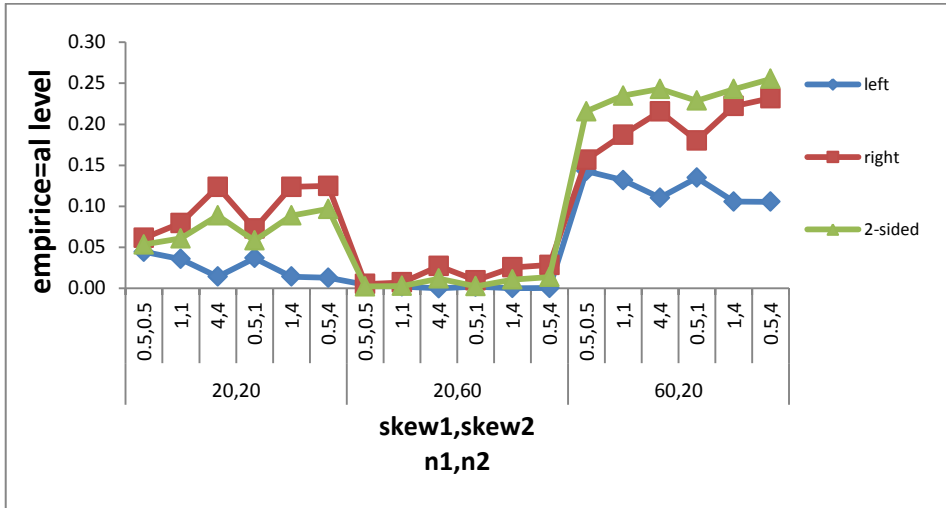
شكل (٣): مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيعات المتماثلة عندما $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$



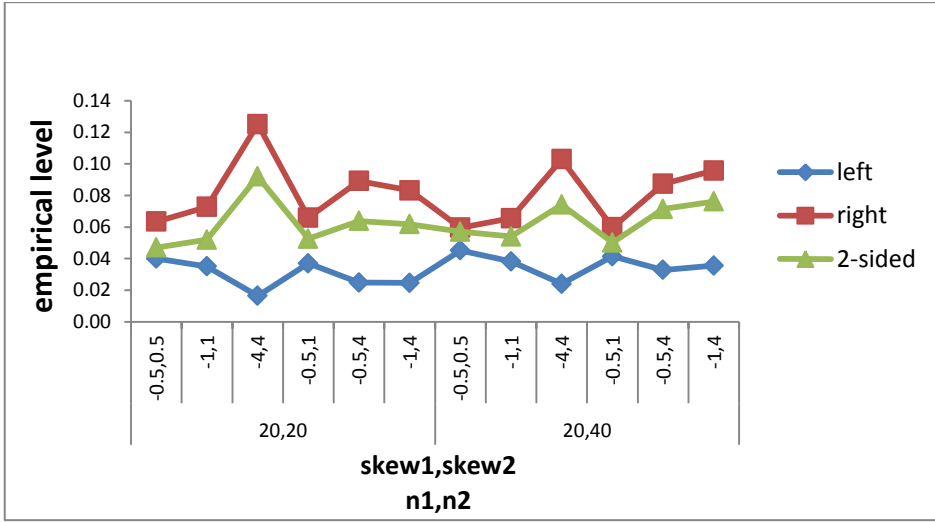
شكل (٤): مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيعات المتماثلة عندما $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 4$



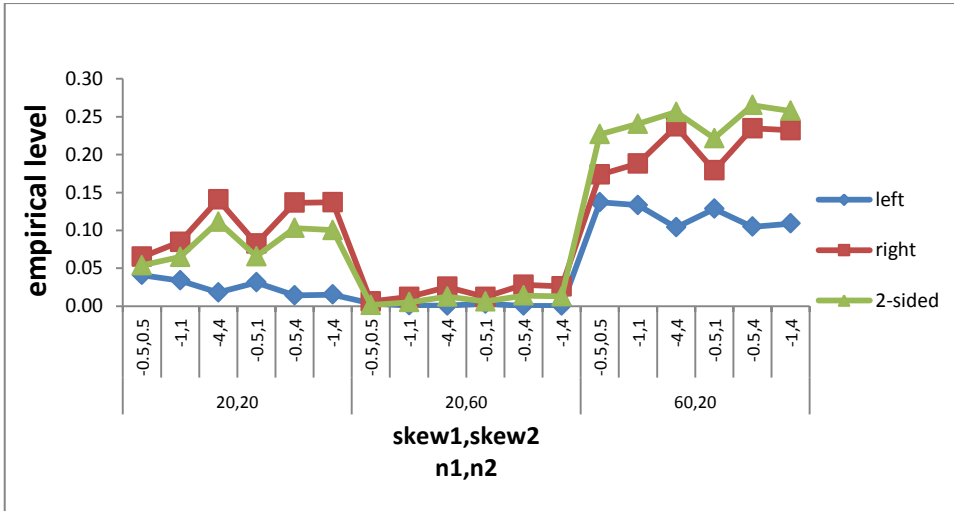
شكل (٥): مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيعات الملتوية لليمين عندما $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$



شكل (٦): مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيعات الملتوية لليمين عندما $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 4$



شكل(٧):مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيعات المتلوية التي لها اتجاهات مختلفة عندما $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$



شكل(٨):مستويات المعنوية التجريبية لاختبار T التوزيعات المتلوية التي لها اتجاهات مختلفة عندما $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 4$

جدول (1)

لاختبار التجريبية الاختبار وقوى المعنوية مستويات T عندما المعدلة للتوزيعات للعينتين $\sigma_1 = 1$

σ_2	δ	$n_1 = n_2 = 10$			$n_1 = n_2 = 20$			$n_1 = n_2 = 40$			$n_1 = n_2 = 60$			$n_1 = 20, n_2 = 40$			$n_1 = 20, n_2 = 60$			$n_1 = 60, n_2 = 20$		
		left	right	2-sided	left	right	2-sided	left	right	2-sided	left	right	2-sided	left	right	2-sided	left	right	2-sided	left	right	2-sided
0.25	0	0.0510	0.0588	0.0626	0.0538	0.0538	0.0556	0.0466	0.0508	0.0492	0.0536	0.0500	0.0516	0.1100	0.1112	0.1508	0.1514	0.1574	0.2236	0.0036	0.0048	0.0024
	-0.25	0.1188	0.0218	0.0794	0.1672	0.0086	0.1086	0.2488	0.0038	0.1588	0.3168	0.0026	0.2166	0.3092	0.0300	0.2494	0.3756	0.0480	0.3356	0.0692	0.0000	0.0238
	-0.5	0.2580	0.0046	0.1704	0.3874	0.0032	0.2764	0.6050	0.0002	0.4730	0.7478	0.0000	0.6342	0.5724	0.0052	0.4818	0.6418	0.0080	0.5666	0.3320	0.0000	0.1800
	-0.75	0.4082	0.0016	0.2948	0.6432	0.0000	0.5104	0.8832	0.0000	0.8062	0.9660	0.0000	0.9354	0.7960	0.0004	0.7248	0.8558	0.0008	0.8062	0.7210	0.0000	0.5370
	0.25	0.0204	0.1228	0.0842	0.0110	0.1662	0.0984	0.0072	0.2498	0.1564	0.0024	0.3160	0.0312	0.3090	0.2514	0.0488	0.3754	0.3306	0.0000	0.0614	0.0000	0.0204
	0.5	0.0060	0.2478	0.1628	0.0014	0.3670	0.2554	0.0002	0.6096	0.4828	0.0000	0.7498	0.6364	0.0050	0.5598	0.4736	0.0090	0.6612	0.5880	0.0000	0.3216	0.1658
	0.75	0.0016	0.4140	0.2980	0.0006	0.6408	0.5168	0.0000	0.8900	0.8134	0.0000	0.9692	0.9382	0.0004	0.7996	0.7304	0.0018	0.8562	0.8100	0.0000	0.7402	0.5446
0.5	0	0.0490	0.0476	0.0498	0.0482	0.0540	0.0524	0.0542	0.0516	0.0540	0.0470	0.0522	0.0478	0.0906	0.0790	0.1018	0.1146	0.1132	0.1472	0.0132	0.0114	0.0088
	-0.25	0.1412	0.0166	0.0908	0.1836	0.0090	0.1130	0.2722	0.0046	0.1780	0.3588	0.0032	0.2490	0.2798	0.0172	0.2132	0.3376	0.0236	0.2692	0.1204	0.0008	0.0566
	-0.5	0.2694	0.0042	0.1758	0.4350	0.0012	0.3098	0.6724	0.0000	0.5524	0.8242	0.0000	0.7242	0.5968	0.0018	0.4964	0.6492	0.0034	0.5602	0.4646	0.0002	0.3134
	-0.75	0.4610	0.0012	0.3370	0.7230	0.0002	0.5958	0.9312	0.0000	0.8768	0.9854	0.0000	0.9702	0.8342	0.0000	0.7648	0.8880	0.0002	0.8398	0.8478	0.0000	0.7228
	0.25	0.0160	0.1278	0.0804	0.0086	0.1888	0.1230	0.0044	0.2732	0.1758	0.0018	0.3566	0.2452	0.0168	0.2962	0.2160	0.0216	0.3528	0.2834	0.0006	0.1272	0.0602
	0.5	0.0026	0.2822	0.1850	0.0008	0.4320	0.3108	0.0000	0.6796	0.5476	0.0000	0.8218	0.7326	0.0010	0.5904	0.4828	0.0010	0.6424	0.5536	0.0000	0.4644	0.3074
	0.75	0.0008	0.4646	0.3402	0.0000	0.7158	0.5916	0.0000	0.9340	0.8820	0.0000	0.9884	0.9742	0.0000	0.8442	0.7702	0.0000	0.8858	0.8270	0.0000	0.8474	0.7172
1	0	0.0530	0.0490	0.0494	0.0514	0.0506	0.0520	0.0494	0.0520	0.0502	0.0504	0.0468	0.0484	0.0536	0.0520	0.0512	0.0440	0.0544	0.0506	0.0462	0.0456	0.0476
	-0.25	0.1348	0.0140	0.0820	0.1948	0.0086	0.1202	0.2986	0.0028	0.1970	0.3830	0.0020	0.2734	0.2390	0.0076	0.1540	0.2508	0.0046	0.1648	0.2464	0.0052	0.1592
	-0.5	0.2822	0.0028	0.1790	0.4582	0.0006	0.3356	0.6978	0.0000	0.5872	0.8640	0.0000	0.7790	0.5646	0.0004	0.4334	0.6116	0.0002	0.4858	0.6082	0.0000	0.4866
	-0.75	0.4886	0.0008	0.3598	0.7588	0.0000	0.6466	0.9484	0.0000	0.9076	0.9926	0.0000	0.9822	0.8496	0.0000	0.7646	0.8914	0.0000	0.8194	0.8912	0.0000	0.8208
	0.25	0.0146	0.1354	0.0846	0.0088	0.1936	0.1208	0.0022	0.2990	0.1980	0.0020	0.3790	0.2658	0.0062	0.2294	0.1436	0.0060	0.2530	0.1654	0.0042	0.2386	0.1486
	0.5	0.0038	0.2834	0.1806	0.0010	0.4542	0.3316	0.0000	0.7100	0.6002	0.0000	0.8512	0.7656	0.0002	0.5646	0.4428	0.0008	0.6034	0.4846	0.0000	0.6016	0.4768
	0.75	0.0006	0.4838	0.3524	0.0000	0.7576	0.6440	0.0000	0.9500	0.9044	0.0000	0.9940	0.9828	0.0000	0.8574	0.7684	0.0000	0.8962	0.8198	0.0000	0.8864	0.8172
2	0	0.0490	0.0552	0.0550	0.0502	0.0502	0.0548	0.0540	0.0514	0.0574	0.0556	0.0498	0.0578	0.0228	0.0228	0.0180	0.0106	0.0122	0.0082	0.1190	0.1124	0.1524
	-0.25	0.1314	0.0188	0.0858	0.1900	0.0080	0.1206	0.2804	0.0036	0.1850	0.3582	0.0020	0.2486	0.1504	0.0018	0.0752	0.1248	0.0004	0.0590	0.3488	0.0278	0.2804
	-0.5	0.2672	0.0046	0.1784	0.4240	0.0006	0.3032	0.6678	0.0002	0.5478	0.8342	0.0000	0.7362	0.4590	0.0000	0.3118	0.4694	0.0000	0.3060	0.6586	0.0024	0.5750
	-0.75	0.4536	0.0004	0.3262	0.7100	0.0000	0.5926	0.9414	0.0000	0.8890	0.9854	0.0000	0.9710	0.8078	0.0000	0.6736	0.8392	0.0000	0.7100	0.8874	0.0000	0.8374
	0.25	0.0164	0.1328	0.0882	0.0082	0.1808	0.1110	0.0042	0.2826	0.1854	0.0022	0.3660	0.2514	0.0016	0.1474	0.0786	0.0008	0.1268	0.0586	0.0222	0.3402	0.2738
	0.5	0.0050	0.2724	0.1760	0.0010	0.4294	0.3062	0.0000	0.6650	0.5474	0.0000	0.8298	0.7334	0.0002	0.4472	0.3058	0.0000	0.4764	0.3092	0.0032	0.6678	0.5782
	0.75	0.0016	0.4660	0.3346	0.0000	0.7164	0.6038	0.0000	0.9400	0.8888	0.0000	0.9854	0.9678	0.0000	0.8006	0.6660	0.0000	0.8506	0.7256	0.0002	0.8818	0.8294
4	0	0.0572	0.0582	0.0618	0.0514	0.0520	0.0564	0.0508	0.0526	0.0510	0.0532	0.0450	0.0536	0.0118	0.0136	0.0070	0.0064	0.0048	0.0024	0.1610	0.1542	0.2318
	-0.25	0.1320	0.0196	0.0834	0.1624	0.0128	0.1078	0.2448	0.0044	0.1652	0.3252	0.0018	0.2270	0.0922	0.0004	0.0366	0.0672	0.0002	0.0262	0.3606	0.0404	0.3150
	-0.5	0.2548	0.0052	0.1692	0.3830	0.0018	0.2722	0.6006	0.0002	0.4704	0.7630	0.0002	0.6586	0.3466	0.0000	0.2064	0.3222	0.0000	0.1704	0.6382	0.0100	0.5654
	-0.75	0.4080	0.0028	0.2926	0.6372	0.0000	0.5088	0.8828	0.0000	0.8012	0.9690	0.0000	0.9388	0.6976	0.0000	0.5320	0.7410	0.0000	0.5556	0.8550	0.0004	0.8008
	0.25	0.0182	0.1158	0.0784	0.0096	0.1646	0.1074	0.0044	0.2446	0.1600	0.0026	0.3214	0.2168	0.0006	0.1018	0.0476	0.0002	0.0674	0.0232	0.0404	0.3902	0.3448
	0.5	0.0066	0.2336	0.1526	0.0016	0.3900	0.2790	0.0008	0.6022	0.4752	0.0000	0.7524	0.6478	0.0002	0.3418	0.2066	0.0000	0.3234	0.1650	0.0084	0.6432	0.5702
	0.75	0.0008	0.4106	0.2924	0.0000	0.6352	0.5110	0.0000	0.8794	0.8046	0.0000	0.9710	0.9380	0.0000	0.7026	0.5354	0.0000	0.7378	0.5520	0.0000	0.8618	0.8074

جدول (2)																			
لاختبار التجريبية الاختبار وقوى المعنوية مستويات T المتماثلة للتوزيعات للعينتين عندما $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$																			
	δ	$n_1 = n_2 = 10$			$n_1 = n_2 = 20$			$n_1 = n_2 = 40$			$n_1 = n_2 = 60$			$n_1 = 20, n_2 = 40$			$n_1 = 20, n_2 = 60$		
		left	right	two-sided	left	right	two-sided	left	right	two-sided	left	right	two-sided	left	right	two-sided	left	right	two-sided
$\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$	0	0.0494	0.0556	0.0516	0.0464	0.0518	0.0472	0.0476	0.0514	0.0506	0.0482	0.0488	0.0506	0.0518	0.0524	0.0516	0.0484	0.0500	0.0540
	-0.5	0.2798	0.0040	0.1852	0.4626	0.0014	0.3334	0.7124	0.0002	0.5858	0.8568	0.0000	0.7768	0.5642	0.0000	0.4248	0.6030	0.0000	0.4726
	-0.75	0.4654	0.0012	0.3272	0.7596	0.0000	0.6336	0.9588	0.0000	0.9140	0.9912	0.0000	0.9814	0.8548	0.0000	0.7656	0.8924	0.0000	0.8172
	0.5	0.0020	0.2812	0.1784	0.0008	0.4606	0.3346	0.0000	0.7126	0.6006	0.0000	0.8620	0.7740	0.0004	0.5682	0.4386	0.0000	0.5994	0.4716
	0.75	0.0008	0.4730	0.3368	0.0000	0.7510	0.6308	0.0000	0.9520	0.9158	0.0000	0.9944	0.9854	0.0000	0.8548	0.7704	0.0000	0.8856	0.8112
$\kappa_1 = \kappa_2 = 2.5$	0	0.0504	0.0478	0.0518	0.0542	0.0472	0.0556	0.0518	0.0480	0.0504	0.0514	0.0480	0.0532	0.0510	0.0476	0.0438	0.0532	0.0444	0.0492
	-0.5	0.2760	0.0040	0.1750	0.4682	0.0008	0.3372	0.7114	0.0000	0.5964	0.8654	0.0000	0.7868	0.5542	0.0004	0.4338	0.6086	0.0000	0.4822
	-0.75	0.4906	0.0004	0.3588	0.7382	0.0000	0.6262	0.9518	0.0000	0.9082	0.9930	0.0000	0.9796	0.8530	0.0000	0.7638	0.8974	0.0000	0.8244
	0.5	0.0034	0.2736	0.1838	0.0010	0.4564	0.3312	0.0000	0.7266	0.6058	0.0000	0.8588	0.7712	0.0006	0.5550	0.4292	0.0002	0.6146	0.4870
	0.75	0.0010	0.4804	0.3522	0.0000	0.7504	0.6348	0.0000	0.9554	0.9112	0.0000	0.9922	0.9822	0.0000	0.8526	0.7666	0.0000	0.8970	0.8258
$\kappa_1 = \kappa_2 = 4$	0	0.0558	0.0540	0.0518	0.0448	0.0510	0.0508	0.0510	0.0524	0.0486	0.0470	0.0500	0.0490	0.0514	0.0488	0.0530	0.0518	0.0508	0.0490
	-0.5	0.2862	0.0038	0.1912	0.4774	0.0008	0.3436	0.7352	0.0000	0.6208	0.8582	0.0000	0.7714	0.5676	0.0004	0.4430	0.6074	0.0000	0.4892
	-0.75	0.4936	0.0000	0.3690	0.7582	0.0000	0.6456	0.9548	0.0000	0.9128	0.9934	0.0000	0.9840	0.8514	0.0000	0.7650	0.8910	0.0000	0.8170
	0.5	0.0028	0.3088	0.2074	0.0006	0.4610	0.3418	0.0000	0.7092	0.5938	0.0000	0.8564	0.7722	0.0004	0.5614	0.4350	0.0002	0.6128	0.4902
	0.75	0.0000	0.4954	0.3670	0.0002	0.7518	0.6410	0.0000	0.9538	0.9124	0.0000	0.9906	0.9802	0.0000	0.8664	0.7806	0.0000	0.8912	0.8148
$\kappa_1 = \kappa_2 = 6.5$	0	0.0536	0.0442	0.0456	0.0480	0.0508	0.0518	0.0516	0.0490	0.0510	0.0440	0.0464	0.0428	0.0520	0.0558	0.0568	0.0496	0.0526	0.0508
	-0.5	0.3120	0.0032	0.2064	0.4704	0.0006	0.3470	0.7168	0.0002	0.5952	0.8632	0.0000	0.7786	0.5758	0.0004	0.4474	0.6216	0.0000	0.4962
	-0.75	0.5164	0.0008	0.3888	0.7618	0.0000	0.6608	0.9540	0.0000	0.9112	0.9912	0.0000	0.9800	0.8710	0.0000	0.7846	0.8928	0.0000	0.8264
	0.5	0.0022	0.3168	0.2084	0.0002	0.4858	0.3628	0.0000	0.7208	0.6040	0.0000	0.8620	0.7836	0.0006	0.5842	0.4470	0.0000	0.6056	0.4862
	0.75	0.0004	0.5204	0.3930	0.0000	0.7524	0.6440	0.0000	0.9478	0.9044	0.0000	0.9902	0.9798	0.0000	0.8514	0.7672	0.0000	0.8950	0.8244
$\kappa_1 = \kappa_2 = 14.7$	0	0.0506	0.0492	0.0460	0.0466	0.0538	0.0496	0.0504	0.0442	0.0486	0.0512	0.0470	0.0478	0.0528	0.0494	0.0470	0.0522	0.0556	0.0570
	-0.5	0.3358	0.0016	0.2272	0.5090	0.0004	0.3830	0.7344	0.0000	0.6274	0.8626	0.0000	0.7808	0.5934	0.0002	0.4714	0.6306	0.0002	0.5066
	-0.75	0.5478	0.0000	0.4144	0.7716	0.0000	0.6710	0.9478	0.0000	0.9078	0.9872	0.0000	0.9730	0.8626	0.0000	0.7890	0.8968	0.0000	0.8304
	0.5	0.0022	0.3388	0.2280	0.0000	0.5026	0.3764	0.0000	0.7282	0.6252	0.0000	0.8658	0.7914	0.0002	0.5736	0.4562	0.0000	0.6170	0.4896
	0.75	0.0000	0.5452	0.4136	0.0000	0.7724	0.6714	0.0000	0.9504	0.9142	0.0000	0.9890	0.9772	0.0000	0.8554	0.7744	0.0000	0.8938	0.8292
$\kappa_1 = 1.8, \kappa_2 = 2.5$	0	0.0462	0.0486	0.0450	0.0526	0.0508	0.0532	0.0562	0.0434	0.0490	0.0492	0.0532	0.0502	0.0486	0.0460	0.0500	0.0478	0.0490	
	-0.5	0.2678	0.0034	0.1700	0.4660	0.0004	0.3426	0.7268	0.0002	0.6090	0.8644	0.0000	0.7816	0.5550	0.0002	0.4258	0.6104	0.0002	0.4758
	-0.75	0.4832	0.0006	0.3412	0.7530	0.0000	0.6342	0.9504	0.0000	0.9116	0.9904	0.0000	0.9840	0.8540	0.0000	0.7626	0.8876	0.0000	0.8086
	0.5	0.0036	0.2776	0.1780	0.0016	0.4630	0.3358	0.0002	0.7328	0.6120	0.0000	0.8574	0.7780	0.0002	0.5504	0.4188	0.0000	0.6110	0.4842
	0.75	0.0010	0.4618	0.3356	0.0000	0.7404	0.6276	0.0000	0.9528	0.9092	0.0000	0.9912	0.9826	0.0000	0.8572	0.7670	0.0000	0.9010	0.8312
$\kappa_1 = 1.8, \kappa_2 = 6.5$	0	0.0466	0.0526	0.0498	0.0486	0.0496	0.0518	0.0536	0.0448	0.0490	0.0570	0.0478	0.0580	0.0452	0.0548	0.0528	0.0522	0.0516	0.0546
	-0.5	0.2878	0.0032	0.1828	0.4888	0.0008	0.3604	0.7130	0.0000	0.5898	0.8506	0.0000	0.7664	0.5676	0.0000	0.4418	0.6254	0.0002	0.5000
	-0.75	0.5006	0.0002	0.3630	0.7738	0.0000	0.6614	0.9524	0.0000	0.9088	0.9924	0.0000	0.9822	0.8482	0.0000	0.7648	0.8944	0.0000	0.8254
	0.5	0.0026	0.2880	0.1810	0.0012	0.4650	0.3434	0.0000	0.7170	0.5996	0.0000	0.8568	0.7678	0.0000	0.5620	0.4352	0.0002	0.6122	0.4756
	0.75	0.0006	0.5002	0.3704	0.0000	0.7468	0.6316	0.0000	0.9530	0.9116	0.0000	0.9926	0.9802	0.0000	0.8616	0.7760	0.0000	0.8884	0.8122
$\kappa_1 = 4, \kappa_2 = 6.5$	0	0.0516	0.0512	0.0502	0.0500	0.0474	0.0510	0.0508	0.0454	0.0512	0.0538	0.0482	0.0544	0.0476	0.0510	0.0482	0.0470	0.0502	0.0542
	-0.5	0.2994	0.0040	0.2080	0.4592	0.0008	0.3352	0.7134	0.0002	0.5952	0.8642	0.0000	0.7830	0.5684	0.0002	0.4464	0.6048	0.0002	0.4822
	-0.75	0.5066	0.0006	0.3796	0.7614	0.0000	0.6548	0.9538	0.0000	0.9142	0.9910	0.0000	0.9816	0.8606	0.0000	0.7752	0.8916	0.0000	0.8148
	0.5	0.0032	0.2934	0.1978	0.0002	0.4798	0.3480	0.0000	0.7294	0.6194	0.0000	0.8548	0.7626	0.0006	0.5666	0.4394	0.0004	0.6070	0.4902
	0.75	0.0004	0.5182	0.3884	0.0000	0.7608	0.6474	0.0000	0.9522	0.9106	0.0000	0.9914	0.9812	0.0000	0.8568	0.7740	0.0000	0.8862	0.8122
$\kappa_1 = 6.5, \kappa_2 = 14.7$	0	0.0442	0.0534	0.0466	0.0512	0.0470	0.0466	0.0496	0.0490	0.0430	0.0478	0.0470	0.0450	0.0460	0.0466	0.0462	0.0534	0.0536	0.0552
	-0.5	0.3148	0.0018	0.2128	0.4860	0.0006	0.3692	0.7222	0.0000	0.6064	0.8606	0.0002	0.7818	0.5766	0.0000	0.4534	0.6284	0.0002	0.5114
	-0.75	0.5100	0.0006	0.3926	0.7678	0.0000	0.6616	0.9502	0.0000	0.9060	0.9912	0.0000	0.9802	0.8548	0.0000	0.7702	0.8970	0.0000	0.8290
	0.5	0.0018	0.3146	0.2094	0.0004	0.4884	0.3664	0.0000	0.7264	0.6170	0.0000	0.8552	0.7694	0.0002	0.5774	0.4578	0.0000	0.6190	0.5008
	0.75	0.0004	0.5254	0.4052	0.0000	0.7776	0.6646	0.0000	0.9446	0.9040	0.0000	0.9898	0.9794	0.0000	0.8494	0.7670	0.0000	0.8860	0.8180

