مجلة كلية التجارة للبحوث العلمية
كلية التجارة
جامعة الإسكندرية
العدد الأول– المجلد الرابع والخمسون – يناير ٢٠١٧

أ/هبة خميس إبراهيم أحمد شركس
المعيدة بقسم الإحصاء والرياضة والتأمين
كلية التجارة – جامعة الاسكندرية

مقارنة بعض الطرق العقابية لتقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً فى ظل وجود التعدد الخطى: دراسة محاكاة

A Comparison of Some Penalized Methods for Simultaneous Estimation and Variable Selection of the Linear Regression Model under Multicollinearity:A Simulation Study

ملخص البحث

يتناول البحث مقارنة بعض الطرق العقابية التى تستخدم فى تقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً فى ظل وجود التعدد الخطى. وقد تم إجراء دراسة محاكاة لمقارنة أداء تلك الطرق العقابية اشتملت على ١٢٠ حالة مختلفة ناتجة من تفاعل مستويات أربعة عوامل وهى: حجم العينة، وتباين حد الخطأ العشوائى، ودرجة الارتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية، وهيكل معالم انحدار النموذج الحقيقى. وقد تبين من نتائج دراسة المحاكاة أن طريقة **SEA-LASSO** تتفوق على الطريقتين SCAD و MCP من حيث النسبة المئوية للوصول إلى النموذج الحقيقى، كما أنها تُعد منافساً جيداً لهما من حيث دقة التقدير.

Abstract

The research introduces a comparison of some penalized methods for simultaneous variable selection and estimation of the linear regression model under multicollinearity. Asimulation study was conducted to compare the performance of these methods including 120 different situations resulting from interaction of four factors: sample size, random error variance, degree of linear correlation among explanatory variables, and regression parameters of the true model. The simulation study shows that SEA-LASSO method outperforms SCAD and MCP methods in terms of percentage of selecting the true model, and competes favorably with them in terms of estimation accuracy.

البحث مشتق من رسالة للحصول على درجة الماجستير فى الإحصاء التطبيقى تحت إشراف الأستاذ الدكتور/إمتثال محمد حسن أستاذ الإحصاء التطبيقى المتفرغ كلية التجارة - جامعة الإسكندرية والأستاذ الدكتور/محمد على محمد أحمد أستاذ الإحصاء التطبيقى المتفرغ كلية التجارة - جامعة الإسكندرية

١- مقدمــة

تُعد مشكلة اختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى من المشاكل الإحصائية التى نالت اهتمام الإحصائيين بشدة حتى وقتنا الحاضر. ويُعد اختيار المتغيرات هاماً فى ظل وجود عدد كبير من المتغيرات التفسيرية Explanatory Variab-les للحصول على نموذج مبسط Parsimonious Model. وتمثل هذه المشكلة تحدياً كبيراً فى ظل وجود التعدد (الازدواج) الخطى Multicollinearity بين المتغيرات التفسيرية، حيث تصعُب التفرقة بين تأثير كل متغير من المتغيرات التفسيرية المرتبطة على متغير الاستجابة ResponseVariable، وقد يؤدى ذلك إلى إسقاط بعض المتغيرات التفسيرية الهامة.

ويُعد اختيار الفئة الجزئية Subset Selec-tion أسلوباً غير مستقر Unstable، وذلك لأن أى تغيرات طفيفة فى البيانات يمكن أن تؤدى إلى تغيرات كبيرة فى النموذج الذى يتم اختياره (Breiman, 1995, 1996; Zou, 2006). كما أنه غير ممكن حسابياً فى ظل وجود عدد كبير من المتغيرات التفسيرية (Zou, 2006).

ولكى يتم التغلب على العيوب السابق ذكرها اقترح الباحثون العديد من الطرق العقابية Penalized Methods والتى تقوم بتقليص Shr-inkage مقدرات بعض معالم الانحدار Regre-ssion Parameters وجعل البعض الآخر مساوياً للصفر، ومن ثم تتمكن تلك الطرق العقابية من تقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً مع علاج مشكلة التعدد الخطى.

وتتبلور المشكلة الأساسية لهذه الدراسة فى الإجابة عن التساؤل التالى:

ما هى أفضل طريقة عقابية يمكن استخدامها لتقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً مع علاج مشكلة التعدد الخطى؟

وتهدف الدراسة الحالية إلى:

١- استعراض مجموعة من أهم الطرق العقابية التى تقوم بتقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً.

٢- تقييم الأداء التجريبى لبعض الطرق العقابية من حيث قدرتها على اختيار المتغيرات وعلاج مشكلة التعدد الخطى وذلك من خلال دراسة محاكاة موسعة.

٣- محاولة تلافى بعض نقاط الضعف التى صاحبت الكثير من دراسات المحاكاة السابقة.

وقد تم تقسيم البحث كالتالى: يتناول المبحث الثانى بعض الطرق العقابية المُستخدمة فى تقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً وهى: طريقة LASSO، وطريقة SCAD، وطريقة Adaptive LASSO، وحالة خاصة منها "SEA-LASSO"، وطريقة MCP. أما المبحث الثالث فقد تم تخصيصه لدراسة المحاكاة والتعليق على نتائج هذه الدراسة. ويتناول المبحث الرابع بعض النقاط المقترحة لبحوث مستقبلية.

٢- بعض الطرق العقابية لتقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً

٢-١ طريقة LASSO

تُعد طريقة (LASSO) Least Absolute Shrinkage and Selection Operator والتى قدمها Tibshirani (1996,1997) من أشهر

الطـرق العقابيــة المُســتخدمة فــى تقــدير واختيــار متغيــرات نمــوذج الانحــدار الخطــى آنيــاً. كمــا استُخدمت دالـة عقـاب LASSO علـى نطـاق واسـع فى كثير من التطبيقات الاحصائية (Zheng, 2008; Nardi and Rinaldo, 2011; Bien *et al.*, 2013; Kaul, 2014; Wu *et al.*, 2014). وتقــوم طريقــة LASSO بتقلــيص مقــدرات بعض معالم الانحدار وجعل البعض الآخر مساوياً للصفر، وبذلك فهى تقوم بالتقدير واختيار المتغيرات فى خطوة واحدة آنياً.

وبافتراض نموذج الانحدار الخطى المتعدد التالى:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (1)$$

حيث:

Y متجه الاستجابة Response أبعاده $n \times 1$.

X مصفوفة التصميم Design Matrix أبعادها $n \times p$.

β متجه معالم الانحدار أبعاده $p \times 1$.

ε متجه حد الخطأ العشوائى Random Error Term أبعــاده $n \times 1$، وتوقعــه مُســاوى للصــفر $[E(\varepsilon) = 0]$، وتباينه ثابت $[\mathrm{var}(\varepsilon) = \sigma^2]$.

يتم الحصول على مقدر LASSO من خلال تدنية دالة المربعات الصغرى العقابية التالية Penalized Least Squares Function (PLSF):

$$\hat{\beta}^{\mathrm{LASSO}} = \arg\min_{\beta}[\|\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta\|^2 + \lambda_1\|\beta\|_1] \qquad (2)$$

حيث:

- $\|\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta\|^2 = (\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta)$ هو مجموع مربعات الخطأ Sum of Squared Error (SSE).
- $\|\beta\|_1 = \sum_{j=1}^{p}|\beta_j|$ هو مجموع القيم المُطلقة لمعالم الانحدار، ويُطلق عليه L_1-norm للمتجه β.
- $\lambda_1 \geq 0$ هى معلمة الضبط Tuning Parameter التى تتحكم فى مقدار التقليص المُطبق على مقدرات معالم الانحدار.
- $\lambda_1\|\beta\|_1$ هى دالة عقاب L_1-norm (ويُطلق عليها أيضاً دالة عقاب LASSO) والتى تُمكن طريقة LASSO - باختيار ملائم لقيمة معلمة الضبط λ_1 - من تقليص مقدرات بعض معالم الانحدار وجعل البعض الآخر مساوياً للصفر، وبذلك فهى تقوم بتقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً.

ويُلاحظ من المعادلة (2) أنه إذا تم وضع قيمة معلمة الضبط $\lambda_1 = 0$ يتم الحصول على مقدر المربعات الصغرى العادية Ordinary Least Squares (OLS) للمتجه β.

٢-٢ طريقة SCAD

اقترح Fan and Li (2001) طريقة (SCAD) Smoothly Clipped Absolute Deviation والتى تقوم بتقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطــى آنيــاً باســتخدام دالــة عقــاب SCAD (Fan,1997; Fan and Li, 2001).

ويتم الحصول على مقدر SCAD من خلال تدنية دالة المربعات الصغرى العقابية (PLSF) التالية:

$$\hat{\beta}^{\mathrm{SCAD}} = \arg\min_{\beta}[\|\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta\|^2 + \sum_{j=1}^{p}\mathrm{P}_{\lambda,a}^{\mathrm{SCAD}}] \qquad (3)$$

وتأخذ دالة عقاب SCAD الصيغة التالية (Clarke *et al.*, 2009):

(4)

$$P^{SCAD}_{\lambda,a} = \begin{cases} \lambda_1|\beta_j| & if \quad |\beta_j| \le \lambda_1 \\ -\dfrac{(\beta_j^2 - 2a\lambda_1|\beta_j| + \lambda_1^2)}{2(a-1)} & if \quad \lambda_1 < |\beta_j| \le a\lambda_1 \\ \dfrac{(a+1)\lambda_1^2}{2} & if \quad |\beta_j| > a\lambda_1 \end{cases}$$

حيث: $\lambda_1 \ge 0$ و $a > 2$ معلمتى الضبط. وقد قام Fan and Li (2001) بوضع قيمة معلمة الضبط $a = 3.7$.

وتأخذ المشتقة الأولى لدالة عقاب **SCAD** الصيغة التالية (Fan, 1997; Fan and Li, 2001):

$$P'^{SCAD}_{\lambda_1,a} = \lambda_1[I(|\beta_j| \le \lambda_1) + \frac{(a\lambda_1 - |\beta_j|)_+}{(a-1)\lambda_1} I(|\beta_j| > \lambda_1)] \qquad (5)$$

حيث:

$I(.)$ دالة المؤشر Indicator Function. فعلى سبيل المثال؛ إذا كان g هو شرط معين، فإن دالة المؤشر $I(g) = 1$ إذا تحقق الشرط g، بينما تكون $I(g) = 0$ إذا لم يتحقق الشرط g. ومن ثم فإن دالة المؤشر $I(|\beta_j| \le \lambda_1)$ مُعرّفة كما يلى:

$$I(|\beta_j| \le \lambda_1) = \begin{cases} 1 \;, & if \quad |\beta_j| \le \lambda_1 \\ 0 \;, & if \quad |\beta_j| > \lambda_1 \end{cases} \qquad (6)$$

- المقدار $(a\lambda_1 - |\beta_j|)_+$ مُعرّف كما يلى

$$(a\lambda_1 - |\beta_j|)_+ = \begin{cases} a\lambda_1 - |\beta_j| & , if \quad (a\lambda_1 - |\beta_j|) > 0 \\ 0 & , if \quad (a\lambda_1 - |\beta_j|) \le 0 \end{cases} \qquad (7)$$

وقد اهتم العديد من الباحثين بدراسة السلوك التقاربى للمقدر **SCAD**، واتفقوا على أن مقدر **SCAD** يتميز بأنه أوراكل Oracle تقاربياً[(1)] مع اختيار ملائم لقيمة معلمة الضبط λ_1 (Fan and Li, 2001; Fan and Peng, 2004; Kim *et al.*, 2008).

ونظراً لتميز مقدر SCAD بخصائص نظرية جيدة فقد استخدمه Garcia *et al.*(2010) فى ظل وجود بيانات مفقودة Missing Data. واستخدمه Liu *et al.* (2011) فى النماذج الخطية الجزئية الجمعية شبه المعلمية Semiparametric Additive Partial Linear Models. كما استخدمه Zhao *et al.* (2014) فى نماذج المعاملات المتغيرة Varying Coefficients Models الخطية الجزئية شبه المعلمية. واستخدمه Qiu *et al.* (2015) فى نماذج المعاملات المتغيرة بأخطاء مرتبطة ذاتياً Autoregressive Errors. وتجدر الإشارة إلى أن جميع هذه الدراسات اتفقت على وضع قيمة معلمة الضبط $a = 3.7$ لدالة عقاب SCAD. بناءً على تلك الدراسات تم استخدام هذه القيمة لمعلمة الضبط a عند تنفيذ طريقة SCAD فى دراسة المحاكاة الحالية.

٣-٢ طريقة Adaptive LASSO

أوضح Zou(2006) أن مقدر LASSO غير متسق فى اختيار المتغيرات. وللتغلب على هذا القصور فى طريقة LASSO، اقترح Zou (2006) طريقة Adaptive LASSO (AL). وتقوم طريقة AL بوضع أوزان مرنة Adaptive Weights فى دالة عقاب L_1-norm لكى يُصبح مقدار التقليص المُطبق على مقدرات معالم الانحدار مختلفاً، وذلك على خلاف طريقة LASSO والتى تقوم بفرض نفس العقاب على مقدرات جميع معالم الانحدار.

ويتم الحصول على مقدر AL على النحو التالى (Zou, 2006):

$$\hat{\beta}^{AL} = \arg\min_{\beta}[\|Y - X\beta\|^2 + \lambda_1 \sum_{j=1}^{p} \hat{w}_j |\beta_j|] \qquad (8)$$

حيث: $\hat{w}_j$ هى أوزان مرنة، اقترح Zou (2006) أن يتم حسابها كما يلى:

$$\hat{w}_j = \frac{1}{\left|\hat{\beta}_j^{initial}\right|^{\gamma}} \qquad (9)$$

حيث:

- $\hat{\beta}_j^{initial}$ هو مقدر مبدئى Initial Estimator لمعلمة الانحدار β_j.
- $\gamma > 0$ معلمة الضبط.

وقد اتفقت الكثير من الدراسات الإحصائية التى تناولت طريقة AL على وضع قيمة معلمة الضبط $\gamma = 1$، على سبيل المثال: Zhang and Lu (2007)، و Garcia *et al.* (2010)، ودراسة Lian (2012)، و Lu *et al.* (2012)، وأيضاً Zeng *et al.* (2014).

وقد تم دراسة المقدر AL من عدة جوانب مختلفة. فعلى سبيل المثال: انصب اهتمام Huang *et al.* (2008) على دراسة الخصائص التقاربية للمقدر AL وأوضحوا أنه يُعد أوراكل Oracle تقاربياً. واستخدم Garcia *et al.* (2010) مقدر AL فى ظل وجود بيانات مفقودة. وقام Lu *et al.* (20-12) بدراسة سلوك مقدر AL فى ظل خطأ توصيف النموذج Model Misspecification، وأوضحوا أن مقدر AL يظل أوراكل Oracle تقاربياً.

[1] يُطلق على المقدر العقابى Penalized Estimator أنه أوراكل Oracle تقاربياً إذا توافرت فيه الخاصيتين التاليتين (Fan and Li, 2001; Zou, 2006):

أ- متسق فى اختيار المتغيرات Consistent in Variable Selection.

ب- معتدل تقاربياً Asymptotically Normal.

ونظراً لتميز المقدر AL بخصائص نظرية جيدة فقد تم استخدامه على نطاق واسع فى كثير من التطبيقات الإحصائية (Zhang and Lu, 2007; Lian, 2012; Zeng *et al.*, 2014; Caner and Fan, 2015; Yang and Wu, 2016)

٢-٤ طريقة SEA-LASSO

يعتمد أداء طريقة AL من حيث اختيار المتغيرات على الأوزان المرنة $\hat{w}_j$، وبالتبعية فهو يعتمد على المقدر المبدئى المُستخدم فى حساب تلك الأوزان. وتطبيقياً، لحساب الأوزان المرنة استخدم Zou (2006) تقديرات المربعات الصغرى العادية OLS. إلا أن مقدر OLS يعانى من قصور فى الأداء فى ظل وجود التعدد الخطى، مما يجعل الأوزان المرنة $\hat{w}_j$ غير مستقرة، وينعكس ذلك سلباً على أداء طريقة AL. لذا اقترح Qian and Yang (2013) أن تؤخذ فى الاعتبار الأخطاء المعيارية لمقدرات OLS عند حساب الأوزان المرنة لطريقة AL، وقدما طريقة Standard Error Adjusted Adaptive LASSO (SEA-LASSO).

- ويتم الحصول على مقدر SEA-LASSO (SEA) **من خلال تدنية دالة المربعات الصغرى العقابية (PLSF) التالية:**

$$\hat{\beta}^{SEA} = \arg\min_{\beta}\left[\|Y - X\beta\|^2 + \lambda_1 \sum_{j=1}^{p} \hat{w}_j^{SEA}\left|\beta_j\right|\right] \qquad (10)$$

ويتم حساب الأوزان المرنة لمقدر SEA-LASSO على النحو التالى:

$$\hat{w}_j^{\text{SEA}} = \left(\frac{sd_j^{\text{OLS}}}{\left|\hat{\beta}_j^{\text{OLS}}\right|}\right)^{\gamma} \qquad (11)$$

حيث:

- $\hat{\beta}_j^{\text{OLS}}$ هو مقدر المربعات الصغرى العادية OLS لمعلمة الانحدار β_j.
- sd_j^{OLS} هو الخطأ المعيارى للمقدر β_j^{OLS}.

وقام Qian and Yang (2013) بوضع قيمة معلمة الضبط $\gamma = 1$. وقد تم استخدام هذه القيمة عند تنفيذ طريقة SEA-LASSO فى دراسة المحاكاة الحالية. وبالنظر إلى المعادلة (10) يتضح أن مقدر SEA-LASSO ما هو إلا مقدر AL مع تعديل حساب الأوزان المرنة له. وقد أوضح Qian and Yang (2013) أنه باختيار ملائم لقيمة معلمة الضبط λ_1 يتميز مقدر SEA-LASSO بأنه أوراكل Oracle تقاربياً.

واتبع Algamal and Lee (2015) فكرة SEA-LASSO فى نموذج انحدار بواسون PoissonRegression Model، واتفقا مع دراسة Qian and Yang (2013) على وضع قيمة معلمة الضبط $\gamma = 1$.

٢-٥ طريقة MCP

اقترح Zhang (2010) طريقة Minimax Concave Penalty (MCP) والتى تقوم بتقدير واختيار متغيرات نموذج الانحدار الخطى آنياً باستخدام دالة عقاب MCP، وتتغلب على قصور طريقة LASSO من حيث عدم اتساقها فى اختيار المتغيرات.

ويتم الحصول على مقدرMCP كما يلى:

$$\hat{\beta}^{\text{MCP}} = \arg\min_{\beta}\left[\|\mathrm{Y} - \mathrm{X}\beta\|^2 + \sum_{j=1}^{p} \mathrm{P}_{\lambda_1,a}^{\text{MCP}}\right] \qquad (12)$$

وتأخذ دالة عقاب MCP الصيغة التالية:

$$\mathrm{P}_{\lambda_1,a}^{\text{MCP}} = \lambda_1 \int_0^{|\beta_j|} \left(1 - \frac{h}{a\lambda_1}\right)_+ dh \qquad (13)$$

حيث: $a > 0$ معلمة الضبط. وفى دراسة المحاكاة الحالية تم وضع $a = 3$.

٣- دراسة المحاكاة

تم مقارنة أداء الطرق العقابية: SCAD وMCP وSEA-LASSO باستخدام دراسة محاكاة اشتملت على 120 حالة مختلفة ناتجة من تفاعل مستويات أربعة عوامل. وقد تم استبعاد طريقة LASSO من دراسة المحاكاة نظراً لعدم تميزها بخصائص نظرية جيدة. ويتناول هذا المبحث العوامل المراد اختبار تأثير تغيير مستوياتها على أداء تلك الطرق العقابية، وبعض الجوانب البرمجية التى تم الاستناد إليها عند تنفيذ دراسة المحاكاة، وكذلك تحديد قيم معلمة الضبط λ_1 ومعيار اختيار أفضل قيمة لها، والأسس التى تم الاستناد إليها لتقييم أداء الطرق العقابية، وأخيراً تحليل نتائج دراسة المحاكاة.

٣-١ العوامل التى تم دراستها

١- حجم العينة:

تم اختيار أربعة مستويات من حجم العينة وهى: حجم عينة صغير $n = 25$، وحجم عينة متوسط $n = 50$، وحجم عينة كبير نسبياً $n = 200$، وحجم عينة كبير $n = 1000$.
وقد تم تحديد مستويات هذا العامل استناداً إلى دراسة مبدئية قامت بها الباحثة سبقت دراسة المحاكاة، اتضح منها وجود فروق جوهرية تحدث فى النتائج عند هذه المستويات من حجم العينة.

٢- تباين حد الخطأ العشوائى:

تم استخدام ثلاثة مستويات متدرجة لتباين حد الخطأ العشوائى وذلك لمُقارنة أداء الطرق العقابية عند مستويات مختلفة من التشويش Noise وهى: مستوى منخفض من التشويش $(\sigma^2 = 0.25)$، ثم تشويش متوسط $(\sigma^2 = 1)$، وتشويش مرتفع $(\sigma^2 = 3)$.

٣- درجة الارتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية:

تم استخدام خمسة مستويات مُتدرجة للارتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية (الموجودة وغير الموجودة فى النموذج الحقيقى) وهى: ارتباط متوسط $(\rho = 0.5)$، وارتباط قوى $(\rho = 0.7)$، وارتباط قوى جداً بمستويين $(\rho = 0.9$، $\rho = 0.95)$، وارتباط حاد $(\rho = 0.99)$.

٤- هيكل معالم انحدار النموذج الحقيقى:

لم يحظ هذا العامل باهتمام كافٍ فى دراسات المحاكاة السابقة. وقد تبين من خلال الدراسة المبدئية التى قامت بها الباحثة أن أداء الطرق العقابية قد يتأثر باختلاف أو تساوى معالم انحدار متغيرات النموذج الحقيقى. لذا تم استخدام مستويين لقيم معالم انحدار النموذج الحقيقى، وفى كلا المستويين تم وضع عدد متغيرات النموذج الحقيقى $p_1 = 2$ وعدد المتغيرات الكلى $p = 8$ وذلك على النحو التالى:

المستوى الأول: تساوى معالم انحدار متغيرات النموذج الحقيقى

$$\beta_j = 6 \quad for \quad j = 1,2$$

المستوى الثانى: اختلاف معالم انحدار متغيرات النموذج الحقيقى

$$\beta_j = 6 - j \quad for \quad j = 1,2$$

وفى كلا المستويين تكون:

$$\beta_j = 0 \quad for \quad j = 3,4,..,8$$

ومما سبق يمكن القول أن إجمالى عدد الحالات سيكون **120** حالة $(2 \times 4 \times 3 \times 5)$، ومن خلال هذه الحالات سيتم تقييم أداء الطرق العقابية محل الدراسة وفقاً لأسس التقييم. وبناءً على مستويات عوامل الدراسة السابقة تم توليد 1000 عينة من نموذج الانحدار الخطى $Y = X\beta + \varepsilon$ لكل حالة من حالات الدراسة على النحو التالى:

١- تم توليد حد الخطأ العشوائى من التوزيع المعتدل $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$.

٢- بداية تم توليد مصفوفة التصميم من توزيع معتدل متعدد المتغيرات بمتجه متوسطات صفرى $0_{p \times 1}$ ومصفوفة تغايرات تساوى مصفوفة الوحدة I_p. ولكى يتم الحصول على درجة الارتباط الخطى المطلوبة بين المتغيرات التفسيرية فقد تم اتباع الطريقة التى قدمها Hallawa and Azzam (1995) وهى طريقة تتميز بأنها تعطى نفس درجة الارتباط المطلوبة دون أى تقريب يذكر، مما يتيح إمكانية ملاحظة التأثير الحقيقى للارتباط الخطى المطلوب على أداء الطرق العقابية.

٣- اعتماداً على الخطوتين (١) و (٢) يتم الحصول على متجه الاستجابة بوضع $Y = X\beta + \varepsilon$.

٣-٢ بعض الجوانب البرمجية

قامت الباحثة بكتابة الكود البرمجى لتنفيذ دراسة المحاكاة باستخدام اللغة البرمجية R (الإصدار 3.2.1). وقد تم استخدام الحزمة

البرمجيـة glmnet للحصـول علـى تقـديرات طريقـة SEA–LASSO، واســتخدام الحزمـــة البرمجيـــة ncvreg للحصـول علـى تقـديرات طريقـة SCAD وطريقة MCP.

٣–٣ تحديد قيم معلمة الضبط λ_1 للطرق العقابيــة والمعيــار المُســتخدم فــى اختيارها

تم الاعتماد على قيم معلمة الضبط λ_1 التى تولدها الحزمتين البرمجيتين glmnet و ncvreg. وتعتمد الخصـائص النظريـة الجيدة للطرق العقابيـة محل الدراسـة علـى الاختيـار الملائـم لقيمـة معلمـة الضـبط λ_1. وتوجـد العديـد مـن المعـايير شـائعة الاستخدام لاختيارها، وهى على سبيل المثال:

١– معيار الملائمة المقطعية المعمم Generalized Cross–Validation (GCV) والـذى قدمـه Carven and Wahba (1979).

٢– المعيــار المعلومــاتى Akaike Information Criterion (AIC) (Akaike, 1973).

٣– المعيــار البــاييزى Bayesian Information Criterion (BIC) (Schwarz, 1978).

وقد أوضح Wang *et al.* (2007) أنه إذا تـم اسـتخدام المعيـار GCV لاختيـار قيمـة معلمـة الضـبط λ_1 لطريقـة SCAD سـيؤدى ذلـك إلـى اختيار نماذج زائدة التوفيق Over–Fitted Models لا يمكـن تجاهلهـا حتـى مـع زيـادة حجـم العينـة ($n \to \infty$). لـذلك اقترحـوا أن يـتم اسـتخدام المعيـار BIC لاختيـار قيمـة معلمـة الضـبط λ_1 لطريقـة SCAD لأنـه سـيكون قـادراً علـى اختيـار النموذج الحقيقى. كما استخدم Qian and Yang (2013) المعيار BIC لاختيار قيمة معلمة الضبط λ_1 لطريقة SEA–LASSO.

وبنـاءً علـى ذلـك، تـم اسـتخدام المعيـار BIC لاختيـار قيمـة معلمـة الضـبط λ_1 للطـرق العقابيـة محـل الدراسـة، والـذى تـم حسـابه – لكـل عينـة لكـل **حالة من حالات الدراسة – على النحو التالى:**

$$\text{BIC} = \ln\left(\frac{\|\text{Y} - \text{X}\hat{\beta}\|^2}{n}\right) + \frac{\ln(n)}{n} \times d\hat{f} \qquad (14)$$

حيـث: اتفقـت الكثيـر مـن الدراسـات الإحصـائية[١] علـى وضـع $d\hat{f}$ مسـاوية لعـدد التقـديرات الغيـر صفرية لمعالم الانحدار.

ويتم اختيـار أفضـل قيمـة لمعلمـة الضـبط λ_1 التـى تجعل قيمة المعيار BIC أقل ما يمكن.

٣–٤ أسس التقييم

للمقارنة بين الطرق العقابية محل الدراسة تم الاستناد إلـى أساسـي تقيـيم لكـل منهمـا وظيفـة معينـة **كمـا سيتضح عبر السياق التالى:**

١– النسبة المئوية للوصول إلى النموذج الحقيقى Percentage of True Model (PTM)

تسـاعد تلـك النسـبة فـى تقيـيم سـلوك الطـرق العقابيـة مـن حيـث مـدى قدرتهـا علـى الوصـول إلـى النموذج الحقيقى فى ظل حالـة معينـة، ويـتم تعريفهـا كما يلى:

$$\text{PTM} = \frac{\text{عدد مرات الوصول إلى النموذج الحقيقى}}{\text{عدد العينات}} \times 100 \qquad (15)$$

حيـــث: عـــدد العينـــات = 1000 عينـــة، و $0 \le \text{PTM} \le 100$.

(١) علـى سبيل المثـال: دراسة Wang *et al.* (2009)، Qian and Yang (2013)، Zeng *et al.* (2014)، Caner and Fan (2015).

ويتم تفسير تلك النسبة عندما تكون $\text{PTM}=0$ بأن الطريقة العقابية لم تستطع الوصول إلى النموذج الحقيقى فى جميع العينات. بينما يتم تفسير تلك النسبة عندما تكون $\text{PTM}=100$ بأن الطريقة العقابية استطاعت الوصول إلى النموذج الحقيقى فى جميع العينات. واستناداً إلى هذا الأساس فإن الطريقة العقابية التى تعطى أعلى نسبة PTM تكون هى الأفضل فى ظل الحالة المعنية.

٢- متوسط مربعات الخطأ

تم الاستناد إلى متوسط مربعات الخطأ Mean of Squared Errors (MSE) لتقييم أداء الطرق العقابية من حيث دقة التقدير، وقد تم حسابه لكل حالة من حالات الدراسة على النحو التالى:

$$\text{MSE}=\frac{\sum_{r=1}^{1000}\left\|\hat{\beta}_r-\beta\right\|^2}{1000} \qquad (16)$$

حيث: $\hat{\beta}_r$ هو تقدير متجه معالم الانحدار للعينة رقم r لطريقة عقابية ما.

واستناداً إلى هذا الأساس فإن الطريقة العقابية التى تعطى أقل متوسط مربعات خطأ MSE تكون هى الأفضل فى ظل الحالة المعنية.

٣-٥ تحليل نتائج دراسة المحاكاة

يتناول هذا المبحث التعليق على قدرة الطرق العقابية على الوصول إلى النموذج الحقيقى، وتقييم أداء الطرق العقابية من حيث دقة التقدير.

٣-٥-١ قدرة الطرق العقابية على الوصول إلى النموذج الحقيقى

١- تتفوق طريقة SEA-LASSO على طريقة SCAD وطريقة MCP فى 57 حالة من بين 60 حالة للمستوى الأول للمتجه β (جدول (١)). وقد كان هذا التفوق واضحاً فى العينات الصغيرة والمتوسطة.

٢- تتفوق طريقة SEA-LASSO على طريقة SCAD وطريقة MCP فى 54 حالة من بين 60 حالة للمستوى الثانى للمتجه β (جدول (٢)).

٣- يُلاحظ تحسن النسبة PTM لطريقة SCAD وطريقة MCP مع زيادة حجم العينة.

٤- استطاعت طريقة SEA-LASSO تحقيق نسبة PTM = 100% فى **69** حالة من الحالات الكلية. علماً بأن طريقة SCAD وطريقة MCP لم تستطع الوصول إلى نسبة PTM=100% فى أى حالة من حالات الدراسة.

٣-٥-٢ دقة التقدير

١- تعطى طريقة SEA-LASSO أقل MSE فى 25 حالة من أصل 30 حالة للعينات الصغيرة والمتوسطة عند المستوى الأول للمتجه β (جدول (١)).

٢- تعطى SEA-LASSO أقل MSE فى 25 حالة من بين 30 حالة للعينات الصغيرة والمتوسطة عند المستوى الثانى للمتجه β (جدول (٢)).

٣- تُعد طريقة SEA-LASSO الأفضل فى حالات العينات الكبيرة نسبياً $(n=200)$ فى ظل التشويش المتوسط والمرتفع وذلك بغض النظر عن تساوى أو اختلاف معالم انحدار متغيرات النموذج الحقيقى (الجدولان ١ ، ٢).

٤- ظهر تفوق طريقة SCAD وطريقة MCP فى حالات العينات الكبيرة $(n=1000)$، وقد كان هذا التفوق واضحاً فى الحالات الخاصة بالارتباط الحاد (الجدولان ١ ، ٢).

ويتضح من التحليل السابق أن طريقة SEA-LASSO تتفوق على الطريقتين SCAD وMCP من حيث القدرة على الوصول إلى النموذج الحقيقى - مُقاسة بالنسبة PTM - كما أنها تعتبر منافساً جيداً لهما من حيث متوسط مربعات الخطأ MSE.

٤- بعض النقاط المقترحة لبحوث مستقبلية

توصى الباحثة بما يلى فى شأن البحوث المستقبلية:

١- تقييم أداء الطرق العقابية محل الدراسة فى ظل صيغ أخرى لمصفوفة الارتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية، على سبيل المثال:

أ- أن يكون الارتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية الموجودة بالنموذج الحقيقى فقط؛ أى أن:

$$corr(X_i, X_j) = \begin{cases} \rho \quad for \quad i \neq j \in \{1,2,..,p_1\} \\ 1 \quad for \quad i = j \\ 0 \qquad otherwise \end{cases}$$

ب- وضع الارتباط الخطى بين المتغيرين X_i ، X_j مساوياً $\rho^{|i-j|}$.

٢- تقييم أداء الطرق العقابية فى ظل البيانات كثيرة الأبعاد High - Dimensional Data.

٣- تقييم أداء الطرق العقابية محل الدراسة فى ظل مشاكل إحصائية أخرى.

جدول (١)

النسبة المئوية للوصول إلى النموذج الحقيقى PTM، ومتوسط مربعات الخطأ MSE للطرق العقابية SCAD، MCP، SEA-LASSO (SEA) عند المستوى الأول لهيكل معالم انحدار النموذج الحقيقى ومستويات عوامل الدراسة الأخرى: حجم العينة n ، وتباين حد الخطأ العشوائى σ^2 ، ودرجة الارتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية ρ .

رقم الحالة	عوامل الدراسة			PTM			MSE		
	n	σ^2	ρ	SCAD	MCP	SEA	SCAD	MCP	SEA
1	25	0.25	0.5	70.3	60	100	0.0647	0.0733	0.0323
2	25	0.25	0.7	56.8	52.7	100	0.1309	0.1339	0.0497
3	25	0.25	0.9	54.1	54.1	100	0.3839	0.3837	0.1403
4	25	0.25	0.95	51.1	51.1	100	0.8025	0.8023	0.3436
5	25	0.25	0.99	54.2	54.4	97.7	3.7803	3.7688	3.7069
6	25	1	0.5	69.7	59.3	97.2	0.2626	0.3007	0.1343
7	25	1	0.7	59.4	53	98	0.5029	0.5274	0.2002
8	25	1	0.9	53.6	53.6	97	1.5719	1.5687	0.6550
9	25	1	0.95	53.1	53.2	93	3.2416	3.2300	1.6619
10	25	1	0.99	48	50.4	60.1	19.3654	17.7392	20.1899
11	25	3	0.5	71.3	61.4	71.2	0.7574	0.8578	0.6731
12	25	3	0.7	57.3	53	70.6	1.5328	1.5878	1.0822
13	25	3	0.9	50.7	50.6	71	4.6975	4.7018	3.1759
14	25	3	0.95	52.8	52.8	66.2	9.6111	9.5747	7.9505
15	25	3	0.99	19.1	35.2	20.9	71.5777	58.7080	64.2812
16	50	0.25	0.5	81.8	74.5	100	0.0253	0.0295	0.0179
17	50	0.25	0.7	75.4	70.4	100	0.0460	0.0492	0.0240
18	50	0.25	0.9	71.1	71.1	100	0.1450	0.1443	0.0752
19	50	0.25	0.95	71.2	71.3	100	0.2945	0.2935	0.1775
20	50	0.25	0.99	74.5	74.6	100	1.3243	1.3207	1.9221
21	50	1	0.5	81.7	74.2	100	0.1032	0.1167	0.0607
22	50	1	0.7	76.8	71.8	100	0.1839	0.1961	0.0869
23	50	1	0.9	72.8	72.7	100	0.5523	0.5490	0.2714
24	50	1	0.95	73.2	73.1	99.8	1.1191	1.1230	0.6497
25	50	1	0.99	69.4	69.5	85.3	5.8657	5.8189	8.0219

تابع جدول (١)

رقم الحالة	عوامل الدراسة			PTM			MSE		
	n	σ^2	ρ	SCAD	MCP	SEA	SCAD	MCP	SEA
26	50	3	0.5	83.2	76.4	90.7	0.2916	0.3338	0.2357
27	50	3	0.7	75.6	71.9	93.6	0.5480	0.5761	0.3319
28	50	3	0.9	70.4	70.3	90.6	1.7555	1.7600	1.0581
29	50	3	0.95	70.9	71.1	87.6	3.3680	3.3526	2.4607
30	50	3	0.99	52	63.7	50	30.7685	22.8570	31.6639
31	200	0.25	0.5	93.1	89.6	100	0.0046	0.0050	0.0069
32	200	0.25	0.7	89.2	87.7	100	0.0085	0.0089	0.0086
33	200	0.25	0.9	85.4	85.2	100	0.0276	0.0277	0.0214
34	200	0.25	0.95	87.9	87.9	100	0.0497	0.0496	0.0503
35	200	0.25	0.99	88.4	88.4	100	0.2297	0.2300	0.7791
36	200	1	0.5	93.9	91.2	100	0.0166	0.0181	0.0157
37	200	1	0.7	88.4	86.9	100	0.0351	0.0359	0.0242
38	200	1	0.9	87.1	87.1	100	0.1050	0.1050	0.0763
39	200	1	0.95	88.2	88.3	100	0.1903	0.1898	0.1765
40	200	1	0.99	87.8	87.8	99.7	0.9798	0.9797	2.0176
41	200	3	0.5	93.2	90.1	100	0.0540	0.0601	0.0447
42	200	3	0.7	89.3	87.8	100	0.0998	0.1053	0.0704
43	200	3	0.9	89.6	89.5	100	0.2680	0.2681	0.1970
44	200	3	0.95	88.6	88.6	100	0.5388	0.5388	0.4912
45	200	3	0.99	88.2	88.2	93.2	2.8919	2.8603	5.2444
46	1000	0.25	0.5	96.4	95.2	100	0.0008	0.0009	0.0039
47	1000	0.25	0.7	96.4	95.9	100	0.0013	0.0014	0.0042
48	1000	0.25	0.9	94.2	94.2	100	0.0041	0.0041	0.0067
49	1000	0.25	0.95	95.3	95.3	100	0.0070	0.0070	0.0122
50	1000	0.25	0.99	95.8	95.8	100	0.0343	0.0343	0.2971
51	1000	1	0.5	96.4	95	100	0.0032	0.0034	0.0057
52	1000	1	0.7	95	94.6	100	0.0056	0.0057	0.0075

تابع جدول (١)

رقم الحالة	عوامل الدراسة			PTM			MSE		
	n	σ^2	ρ	SCAD	MCP	SEA	SCAD	MCP	SEA
53	1000	1	0.9	95.8	95.8	100	0.0148	0.0147	0.0172
54	1000	1	0.95	94.8	94.9	100	0.0331	0.0330	0.0448
55	1000	1	0.99	94.9	94.9	100	0.1463	0.1463	0.6948
56	1000	3	0.5	96.9	95.7	100	0.0099	0.0104	0.0116
57	1000	3	0.7	94.5	93.7	100	0.0171	0.0175	0.0156
58	1000	3	0.9	96.5	96.4	100	0.0401	0.0403	0.0432
59	1000	3	0.95	95.1	95	100	0.0826	0.0830	0.1062
60	1000	3	0.99	95.4	95.4	100	0.4219	0.4219	1.3277

جـــدول (٢)

النسبة المئوية للوصول إلى النموذج الحقيقى PTM، ومتوسط مربعات الخطأ MSE للطرق العقابية SCAD وMCP و SEA-LASSO عند المستوى الثانى لهيكل معالم انحدار النموذج الحقيقى ومستويات عوامل الدراسة الأخرى:حجم العينة n ، تباين الخطأ العشوائى σ^2 ،و درجة الارتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية ρ .

رقم الحالة	عوامل الدراسة			PTM			MSE		
	n	σ^2	ρ	SCAD	MCP	SEA	SCAD	MCP	SEA
61	25	0.25	0.5	70	60.1	100	0.0651	0.0727	0.0305
62	25	0.25	0.7	57.2	52.7	100	0.1304	0.1339	0.0480
63	25	0.25	0.9	54.1	54.1	99.8	0.3841	0.3841	0.1347
64	25	0.25	0.95	51.1	51.1	99.6	0.8022	0.8009	0.2938
65	25	0.25	0.99	54.1	54.5	81.5	3.8186	3.7907	4.8587
66	25	1	0.5	69.9	59.5	82	0.2630	0.3006	0.1949
67	25	1	0.7	59.6	53	86.9	0.5019	0.5267	0.2828
68	25	1	0.9	53.7	53.6	83.6	1.5698	1.5688	0.9000
69	25	1	0.95	53.1	53.3	76.8	3.2550	3.2366	2.1703
70	25	1	0.99	35.1	40.3	39.2	22.7811	20.2298	21.2103
71	25	3	0.5	71	61.6	65.8	0.7581	0.8581	0.7103
72	25	3	0.7	57.8	53.3	63.4	1.5302	1.5851	1.1704

تابع جدول (٢)

رقم الحالة	عوامل الدراسة			PTM			MSE		
	n	σ^2	ρ	SCAD	MCP	SEA	SCAD	MCP	SEA
73	25	3	0.9	50.7	50.5	58.8	4.8317	4.8344	3.9204
74	25	3	0.95	48.1	49.1	51.2	11.6178	10.8531	10.3441
75	25	3	0.99	3.7	15.8	8.2	68.8175	55.7282	53.1747
76	50	0.25	0.5	81.5	74.5	100	0.0255	0.0296	0.0165
77	50	0.25	0.7	75.9	70.4	100	0.0458	0.0492	0.0231
78	50	0.25	0.9	71.1	71	100	0.1454	0.1447	0.0741
79	50	0.25	0.95	71.2	71.2	100	0.2945	0.2942	0.1636
80	50	0.25	0.99	74.6	74.7	96	1.3184	1.3187	2.1030
81	50	1	0.5	81.6	74.3	98.2	0.1035	0.1165	0.0656
82	50	1	0.7	76.3	71.7	98.9	0.1838	0.1966	0.0908
83	50	1	0.9	72.8	72.7	97.7	0.5504	0.5494	0.2908
84	50	1	0.95	73.3	73.1	94	1.1165	1.1220	0.6882
85	50	1	0.99	65.8	66.8	68.2	7.4348	6.8563	9.7659
86	50	3	0.5	83.2	75.9	80.2	0.2915	0.3366	0.2759
87	50	3	0.7	75.7	72	81.8	0.5468	0.5767	0.4220
88	50	3	0.9	70.5	70.4	80.2	1.7531	1.7561	1.3414
89	50	3	0.95	70.5	70.7	77.6	3.5359	3.5007	3.1179
90	50	3	0.99	22.3	38.4	25.6	35.0649	26.5534	32.3287
91	200	0.25	0.5	92.8	89.6	100	0.0046	0.0051	0.0055
92	200	0.25	0.7	89.3	87.7	100	0.0085	0.0089	0.0077
93	200	0.25	0.9	85.5	85.2	100	0.0275	0.0277	0.0275
94	200	0.25	0.95	87.9	87.9	100	0.0496	0.0496	0.0647
95	200	0.25	0.99	88.4	88.3	100	0.2297	0.2313	0.5727
96	200	1	0.5	94	91.3	100	0.0166	0.0181	0.0145
97	200	1	0.7	88.3	87	100	0.0352	0.0357	0.0231
98	200	1	0.9	87	87	100	0.1054	0.1054	0.0758
99	200	1	0.95	88.2	88.3	100	0.1903	0.1898	0.1692

تابع جدول (٢)

رقم الحالة	عوامل الدراسة			PTM			MSE		
	n	σ^2	ρ	**SCAD**	**MCP**	**SEA**	**SCAD**	**MCP**	**SEA**
100	200	1	0.99	87.8	87.8	95.2	0.9802	0.9800	2.2170
101	200	3	0.5	93.3	90.1	99.8	0.0541	0.0598	0.0437
102	200	3	0.7	89.3	87.8	99.7	0.0998	0.1051	0.0703
103	200	3	0.9	89.6	89.5	99.5	0.2686	0.2681	0.1901
104	200	3	0.95	88.7	88.7	99.1	0.5372	0.5372	0.4468
105	200	3	0.99	85.5	86.6	78.4	4.0356	3.5291	7.3190
106	1000	0.25	0.5	96.3	95.3	100	0.0008	0.0009	0.0026
107	1000	0.25	0.7	96.5	95.9	100	0.0013	0.0014	0.0034
108	1000	0.25	0.9	94.2	94.2	100	0.0040	0.0041	0.0137
109	1000	0.25	0.95	95.3	95.3	100	0.0070	0.0070	0.0388
110	1000	0.25	0.99	95.9	95.8	100	0.0341	0.0343	0.4451
111	1000	1	0.5	96.5	95.1	100	0.0032	0.0034	0.0045
112	1000	1	0.7	95	94.6	100	0.0056	0.0057	0.0067
113	1000	1	0.9	95.8	95.8	100	0.0148	0.0147	0.0218
114	1000	1	0.95	94.8	94.8	100	0.0332	0.0331	0.0630
115	1000	1	0.99	94.9	94.9	100	0.1463	0.1463	0.5359
116	1000	3	0.5	96.9	95.7	100	0.0099	0.0104	0.0103
117	1000	3	0.7	94.5	93.7	100	0.0171	0.0175	0.0146
118	1000	3	0.9	96.5	96.4	100	0.0401	0.0403	0.0441
119	1000	3	0.95	95	95	100	0.0830	0.0830	0.1074
120	1000	3	0.99	95.4	95.4	99.5	0.4219	0.4219	0.9848

مراجع الدراسة

[1] Akaike, H. (1973), "Information Theory as an Extension of the Maximum Likelihood Principle," in *B.N. Petrov, and F.Caski, Second International Symposium on Information Theory.* Akademiai Kiado, Budapest, pp.267-281.

[2] Algamal, Z.Y. and Lee, M.H. (2015), "Adjusted Adaptive LASSO in High-Dimensional Poisson Regression Model," *Modern Applied Science*, **9**, pp.170-177.

[3] Bien, J., Taylor, J., and Tibshirani, R. (2013), "A LASSO for Hierarchical Interactions," *The Annals of Statistics*, **41**, pp.1111-1141.

[4] Breiman, L. (1995), "Better Subset Regression Using the Nonnegative Garrote," *Technometrics*, **37**, pp.373-384.

[5] Breiman, L. (1996), "Heuristics of Instability and Stabilization in Model Selection," *The Annals of Statistics*, **24**, pp.2350-2383.

[6] Caner, M. and Fan, Q.(2015), "Hybrid Generalized Empirical Likelihood Estimators: Instrument Selection with Adaptive LASSO," *Journal of Econometrics*, **187**, pp.256-274.

[7] Carven, P. and Wahba, G. (19-79), " Smoothing Noisy Data with Spline Functions: Estimating the Correct Degree of Smoothing by the Method of Generalized Cross-Validation," *Numerische Mathematik*, **31**, p.377-403.

[8] Clarke, B., Fokoue, E., and Zh-ang, H.H. (2009), *Principles and Theory for Data Mining and Machine Learning*, Springer, New York.

[9] Fan, J. (1997), "Comments on 'Wavelets in Statistics: A Review' by A. Antoniadis," *Journal of the Italian Statistical Society*, **2**, pp-.131-138.

[10] Fan, J. and Li, R. (2001), "Variable Selection via Nonconcave Penalized Likelihood and its Oracle Pr-operties," *Journal of the American Statistical Association*, **96**, pp-.1348-1360.

[11] Fan, J. and Peng, H. (2004), "Nonconcave Penalized Likelihood with a Diverging Number of Parameters," *The Annals of Statistics*, **32**, pp-.928-961.

[12] Garcia, R.I., Ibrahim, J.G., and Zhu, H. (2010), "Variable Selection for Regression Models with Missing Data," *Statistica Sinica*, **20**, pp.149-165.

[13] Hallawa, A.M. and Azzam, A. H. (1995), "A New Method for Generating the Design Matrix of a Linear Regression Model," *The Eg-yptian Statistical Journal ISSR*, **39**, pp.106-119.

[14] Huang, J., Ma, S., and Zhang, C-H. (2008), "Adaptive LASSO for Sparse High-Dimensional Regression Models," *Statistica Sinica*, **18**, pp.1603-1618.

[15] Kaul, A. (2014), "LASSO with Long Memory Regression Errors," *Journal of Statistical Planning and Inference*, **153**, pp.11-26.

[16] Kim, Y.,Choi, H., and Oh, H-S. (2008), "Smoothly Clipped Absolu-te Deviation on High Dimensions," *Journal of the American Statistical Association*, **103**, pp.1665-1673.

[17] Lian, H. (2012), "Variable Selec-tion in High-Dimensional Partly Li-near Additive Models," *Journal of Nonparametric Statistics*, **24**, pp. 82-5-839.

[18] Liu, X.,Wang, L., and Liang, H. (2011),"Estimation and Variable Se-lection for Semiparametric Additive Partial Linear Models," *Statistica Si-nica*, **21**, pp.1225-1248.

[19] Lu, W., Goldberg, Y., and Fine, J.P. (2012)," On the Robustness of the Adaptive LASSO to Model Mis-specification," *Biometrika*, **99**, pp. 717-731.

[20] Nardi, Y. and Rinaldo, A. (20-11), "Autoregressive Process Mode-ling via the LASSO Procedure," *Journal of Multivariate Analysis*, **102**, pp. 528-549.

[21] Qian, W. and Yang, Y. (2013), "M-odel Selection via Standard Error Adjusted Adaptive LASSO," *Ann-als of the Institute of Statistical Mathematics*, **65**, pp.295-318.

[22] Qiu, J., Li, D., and You, J. (2015), "SCAD-Penalized Regression for Varying-Coefficient Models with Autoregressive Errors," *Journal of Multivariate Analysis*, **137**, pp.10-0-118.

[23] Schwarz, G. (1978), "Estimating the Dimension of a Model," *The An-nals of Statistics*, **6**, pp.461-464.

[24] Tibshirani, R. (1996), "Regres-sion Shrinkage and Selection via the LA-SSO," *Journal of the Royal Stati-stical Society*, Series B, **58**, pp.267-288.

[25] Tibshirani, R.(1997), "The LASSO Method for Variable Selection in the Cox Model," *Statistics in Medicine*, **16**, pp.385-395.

[26] Wang, H., Li, B., and Leng, C. (2009), "Shrinkage Tuning Param-eter Selection with a Diverging Nu-mber of Parameters," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, **71**, pp.671-683.

[27] Wang, H., Li, R., and Tsai, C-L. (2007),"Tuning Parameter Selec-tors for the Smoothly Clipped Absolute Deviation Method," *Bio-metrika*, **94**, pp. 553–568.

[28] Wu, L.,Yang, Y., and Liu, H. (20-14),"Nonnegative-LASSO and Ap-plication in Index Tracking," *Co-mputational Statistics and Data An-alysis*, **70**, pp.116-126.

[29] Yang, Y. and Wu, L. (2016), "N-onnegative Adaptive LASSO for Ultra-High Dimensional Regression Models and a Two-Stage Method Applied in Financial Modeling," *Journal of Statistical Planning and Inference*, **174**, pp.52-67.

[30] Zeng, P., Wei, Y., Zhao, Y., Liu, J., Liu, L., Zhang, R., Gou, J., Hu-ang, S., and Chen, F. (2014), "Vari-able Selection Approach for Zero-Inflated Count Data via Adaptive LASSO," *Journal of Applied Statis-tics*, **41**, pp. 879-894.

[31]Zhang, C-H. (2010), "Nearly Unbiased Variable Selection under Minimax Concave Penalty," *The Annals of Statistics*, **38**, pp.894-942.

[32] Zhang, H.H. and Lu, W. (20-07), "Adaptive LASSO for Cox's Proportional Hazards Model,"*Biometrika*, **94**, pp. 691-703.

[33] Zhao,W., Zhang, R., Liu, J., and Lv, Y. (2014), "Robust and Efficient Variable Selection for Semiparametric Partially Linear Varying Coefficient Model Based on Modal Regression," *Annals of The Institute of Statistical Mathematics*, **66**, pp.-165-191.

[34] Zheng, S. (2008), "Selection of Components and Degrees of Smo-othing via LASSO in High Dime-nsional Nonparametric Additive Models," *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, pp.164-175.

[35] Zou, H. (2006), "The Adaptive L-ASSO and its Oracle Properties," *Journal of the American Statistical Association*, **101**, pp.1418-1429.