الـريـاضيـــات والمـوسيقـــى

إعـداد

أ.د./ محمـــود إبراهيـــم بـــدر

أستاذ المناهج وطرق تعليم الرياضيات

وتكنولوجيا التعليم بكلية التربية جامعة بنها

الرياضيات والموسيقى

إعداد

أ.د./ محمود إبراهيم بدر

أستاذ المناهج وطرق تعليم الرياضيات

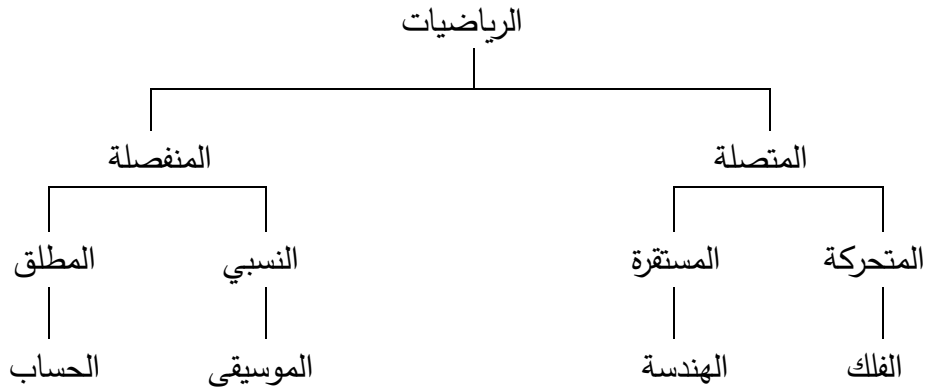
وتكنولوجيا التعليم بكلية التربية جامعة بنها

مقدمة :

ترتبط الرياضيات والموسيقى برباط خفي، فالذبذبات ترتبط بالنغمات tones في الميلوديا Melodies أو التوافق Harmonies فى النغم اللوني والإيقاع وفي كثير من الأشكال الموسيقية، ومسألة الذبذبات تتضح في متسلسلة فورير Fourier's series، وقد لمس سلفستر Sylvester (منشئ نظرية اللاتغير Invariance) العلاقة بين الرياضيات والفن الراقي الموجود في كتاباته.

كما أن الموسيقى شكلت جانبا مهما من حياة الرياضيين، فيعقوب Jacob) المشهور بأعماله في الدوال الناقصية) تذوق الموسيقى، كما كان بوانكاريه 'Poincare يفضل الاستمتاع بوقت فراغه مع الموسيقى ، كما لعب ابل على البيانو، كما أحب لاجرانج الموسيقى، بل ووصفها بأنها تساعده على حل المسائل الرياضية المعقدة، كما تأثر ديرشت Dirichlet المعروف بأعماله في التحليل ونظرية الأعداد بالموسيقى ، والمعروف أن أينشتين كان من هواة عزف الفيولينا.

وقد رأى فيثاغورث تقسيم الرياضيات كما يلي:



وقد ذكر بوثيس Boethios أن فيثاغورث قد أعجب بالأصوات التي تنتج من طرق الحديد بمطارق مختلفة الوزن – والتي ذكر أنها تمثل أصوات موسيقية، وقد طلب فيثاغورث من الحداد أن يستخدم مطارق أوزانها ٦، ٨، ٩، ١٢، والأعداد الأربعة السابقة ترتبط ببعضها البعض ببعض العلاقات مثل الوسط الحسابي والوسط الهندسي فمثلا :

(١٢ + ٦) \ ٢ = ٩ ، ٨ \ ١١ = (٢\١١)*(١١ \ ٦ + ١٢ \ ١)

أيضا ٨ \ ٦ = ٩\١٢ ، ٩ \ ٦ = ١٢ \ ٨

أما علاقات الوسط الهندسي فإنها تتضح كما يلي :

(٨ – ٦) \ (١٢ – ٨) = ٤ \٢ = ٢ \ ١

ويخبرنا بوثيس أن فيثاغورث استمر في ذلك حتى اكتشف العلاقة بين طول السلك المهتز والنغمة الناشئة عنه، فإذا نقص طول السلك إلي ٤\٣ من طوله الأصلي فإن النغمة الناشئة تكون هي النغمة الخامسة وإذا نقص طول السلك إلى ٣\٢ من طوله الأصلي فإن النغمة الناشئة هي النغمة الرابعة وإذا نقص إلى ٢\١ من طوله الأصلي فإن ذلك هو الأكتاف.

واكتشف فيثاغورث العلاقة بين ذبذبة السلك المهتز وسمكه وطوله والأعداد 2، 3، 4، – ومن المحتمل أن يكون قد عرف ذلك من الكهنة المصريين (784:7) –. كما قدم ما يعرف بسلم فيثاغورث الدياتونى حيث وضع نسبة ذبذبة النغمة الخامسة 3:2 وأصبحت النغمات الأثنى عشرة هي: C,C#,D,D#,E,F,F#,G,G#,A,A#,B كما وضع ما يعرف بكوما فيثاغورث وقيمتها 128:129.7 (314:17).

وقدم اقليدس بعض مبادىء الموسيقى وجاليليو صحح ما توصل إليه الرياضيين واشتق السلسلة التوافقية 1، 2\1، 3\1، ... وأثبت أن الأسلاك المتساوية الطول والواقعة تحت شد متساوي تتناسب عكسيا مع الذبذبة الناتجة منهم وتمكن أويلر من حل مشكلة الكوما comma آلتي أعاقت الموسيقيين فترة طويلة بأن جعل المسافة بين كل النغمات تساوى √2 وهنا أمكن للموسيقيين أن ينمذجوا العلاقة بين الرياضيات والموسيقى (314:17)، (315:10).

وفى أوائل القرن السابع عشر كتب ديكارت Descartes عن حركة الأسلاك وعلاقتها بالموسيقى كما درس تايلور ودالمبرت مشكلة اهتزاز الأسلاك أيضا، كما يعرف ديرشت بدراسة مشكلة اهتزاز الأسلاك، كما يعرف هلمهولتز Helmholtz وسلفستر Sylvester بدمجه المعرفة الرياضية والموسيقية معا(783:7–787).

ويعرف هلموهلتز Helmholtz كأحد المعاصرين الذين مزجوا بين الرياضيات والموسيقى.

ولقد ظلت الرياضيات والموسيقى مصنفتين معا كعلم واحد حوالي ألف عام وقد أسس شارليماجن Charlemagne في القرن الثامن عشر المدارس الكنسية آلتي أعتمدت في جزء من مناهجها على أعمال فيثاغورث، وقد بدأ فصل الرياضيات عن الموسيقى في عصر النهضة الأوربية في القرنين القرنين الرابع عشر والخامس عشر، أبان ما يعرف بعصر النهضة الأوربية (593:12).

و قد ذكر كوكستر Coxeter أن التشابه بين الموسيقى والرياضيات يبدأ عند مرحلة الإبداع، فالتلحين أو التأليف الموسيقى يبدو عمله مشابها لاكتشاف الحقائق الرياضية، وأن كلاهما يعتبرا مجردين ، لذا فقد رأى أن فترات التطور والازدهار الرياضي يصاحبها تطور وازدهار موسيقى.

كما قارن الرياضيون التربويون مثل سكمب Skemp بين الرياضيات والموسيقى، فالرياضيات تشبه الموسيقى، تحتاج لتمثيل الأحداث فيزيائيا والتفاعل الإنساني قبل الترميز، والنماذج الرياضية – الصامتة – تشبه النغمات الموسيقية والعلاقات الأنية تشبه الهارموني والبرهان يشبه الميلودى، ويعلق على ذلك بأن الرياضيات موسيقا صامته.

و من الموضوعات الرياضية المهمة التماثل Symmetry الذي يعد أحد المبادئ الموجهة لعمل الملحن، فيستخدم الانتقال Transposition بطريقة مشابهة لمفهومه الرياضي – وهذا يتضح في مقطوعة Fugue لباخ حيث تظهر الفكرة الرئيسية لثاني مرة ولكن في مفتاح مختلف –، وكما يعرف في الموسيقى – نفس المقطوعة – بحيلة باخ بعكس الفكرة Inverting a Theme وهى مشابهة للانعكاس الرياضي، وفكرة Reflection Dilation الانعكاس مع التكبير في الرياضيات مشابهة لما استخدمه باخ ويعرف Wedge Fugue.

وقد ذكر فيثاغورث أن الأسلاك آلتي تتكون من نفس النوع وتحت نفس الشد تعطى رنين أكتاف إذا ما قسمت بنسب 1:2 و2:3 أو 3:4 على الترتيب - ومن المحتمل أن يكون فيثاغورث قد تعلم ذلك من الكهنة المصريين القدماء - وطريقته تحوى الإبداع الرياضي فقد اعتبر أن التوافق consonant يقترن بالأعداد 1، 2، 3 و4 ، فقد أخذ عدة أسلاك متساوية الطول واعتبر أن النغمة دو C هي النغمة الأساسية وباستخدام تقسيم السلك إلى نصفين

متساويين أو آلي ثلاثة أجزاء متساوية أوالى خمسة أجزاء متساوية أو إلى سبعة أجزاء متساوية أمكنه تحديد نغمات ما يعرف بسلم فيثاغورث الدياتونى :

–––––––––––––––––––––––*
––––––––––––––––––*–––––––*
––––––––––*––––*––––––*––––––*
––––––––*––––*––––*––––*––––*––––*

وقد حدد فيثاغورث بعد النغمتين فا F، صول G بالنسبتين 4/3، 3/2 على الترتيب من النغمة الأساسية C وتوصل إلى ما يعرف بسلم فيثاغورث الدياتونى diatonic Pythagorean scale وذبذبات نغماتـه النسبية هي :

C	D	E	F	G	A	B	C
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

فمثلا ذبذبة النغمة فا F = 4/3 × ذبذبة النغمة الأساسية C

و من الواضح أن النسبة بين ذبذبة كل نغمة إلى ذبذبة النغمة التالية لها =9/8 فيما عدا (فا F , مى E حيث النسبة)، (دو C , سى B) حيث النسبة 256/243 وهنا يظهر نصف نغمة.

C	D	E	F	G	A	B	C
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
	W	W	S	W	W	W	S

حيث يشير الرمز S إلي نصف نغمة والرمز W إلي نغمة كاملة.

دالة توليد الذبذبات للنغمات الغربية

$$f = 55 * 2^{(O+\frac{P-22}{12})}$$

حيث O رقم الأكتاف و p رقم النغمة داخل الأكتاف

$$f = 55 * 2^{((((INT(P/12)+1)+((((P\ MOD\ 12)+1))-22)/12))}$$

حيث p رقم النغمة

أما دالة توليد النغمات المقترحة للموسيقي العربية فهي

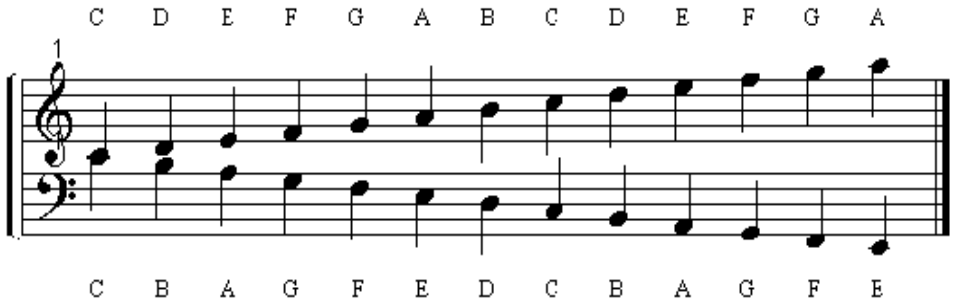
$$f = 55 * 2^{(O+\frac{P-22}{24})}$$

هندســـة التحويـــلات :

توجد روابط عديدة بين الرياضيات والموسيقي ، تبدأ تلك الروابط من أبسط قواعد الموسيقي متمثلة في زمن النغمة الذي يعبر عنه إما بوحدة أو ٤\٣ أو نصف وحثي اللحن الموسيقي وتعد هندسة التحويلات أحد الموضوعات الرياضية التي لها دور في الموسيقي حيث يستخدم مؤلفوا المقطوعات الموسيقية الانتقال والانعكاس والدوران في تأليف مقطوعاتهم فمثلا استخدم الانتقالات باخ S. Bach .J في تركيب مقطوعاته الموسيقية وأما جون باشليبل Johann Pachelbel فاستخدم الانعكاس واجور استرافنسكي Igor Stravinsky فاستخدم الدوران والروابط بين الرياضيات والموسيقي مستخدمة في المدرسة الثانوية حيث تستخدم في التدريس لحث الطلاب ورفع دافعيتهم

ويعد معيار الترابط من معايير مجلس معلمي الرياضيات في الولايات المتحدة الامريكية NCTM حيث وردة في Curriculum and Evaluation Standards (1989) وفي لائحة المراجعة عام ٢٠٠٠م Principles and Standards for School Mathematics (2000), ويمثل في مناهج الرياضيات فيما قبل الصف الثاني عشر مما يشجع المعلمين علي الربط بين الرياضيات والموسيقي من خلال السياقات خارج الفصل ومن خلال النماذج.

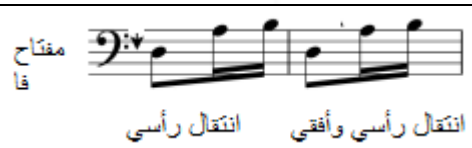
مفتاح صول :

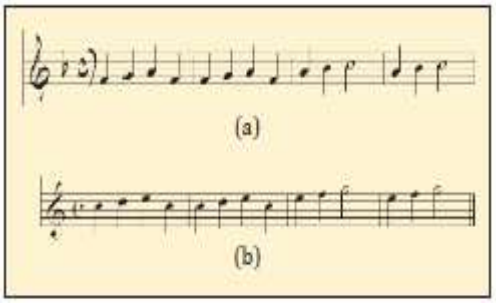


الانتقالاتTranslations :

يعرف الانتقال بأنه إزاحة شيء أو هدف من موضع إلى آخر والموسيقيون استخدموا الانتقالات بطريقتين :

الانتقال الأفقي ويعني به إزاحة اللحن إلى موضع زمني متأخر وهذا معروف في الموسيقي وهو تكرار اللحن أو جزء.

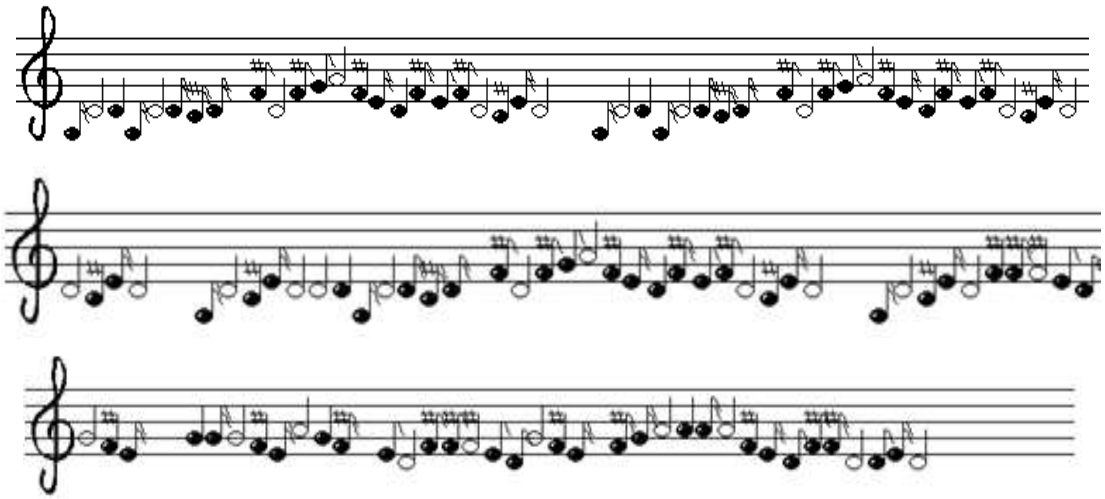
النغمة				النغمة		
C	F	A		C	F	A
D	A	B		D	A	B



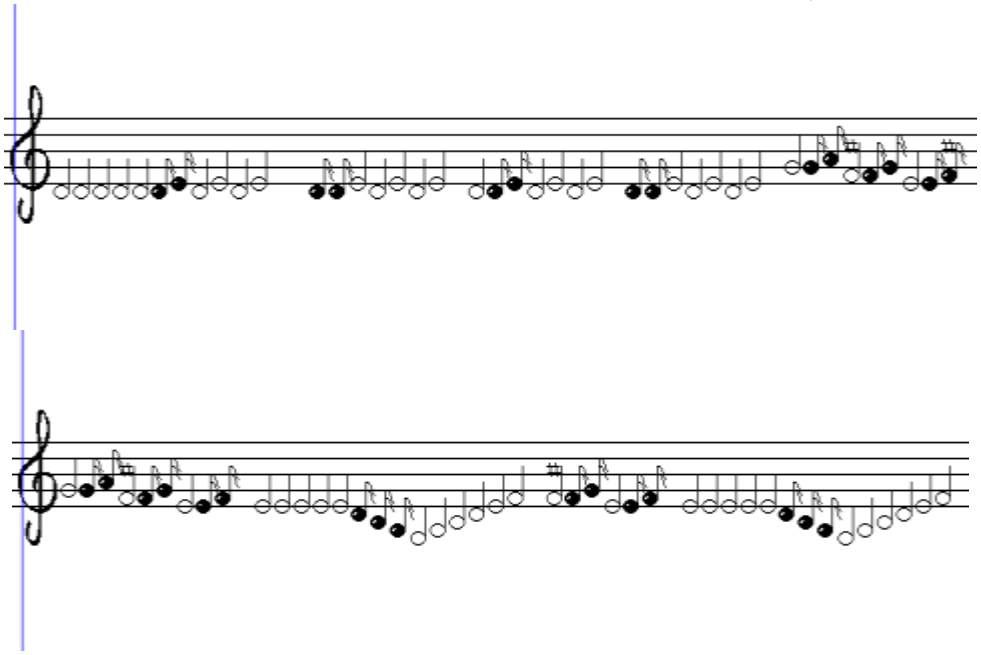
فا	صول	لا	فا	فا	صول	لا	صول	لا	ري	مي	لا	ري	مي
لا	ري	مي	دو	دو	ري	مي	دو	مي	فا	صول	مي	فا	صول

ومعظم المقاطع الموسيقية العربية والأجنبية تحوي ذلك التكرار ومثال ذلك موسيقي عيد الميلاد.

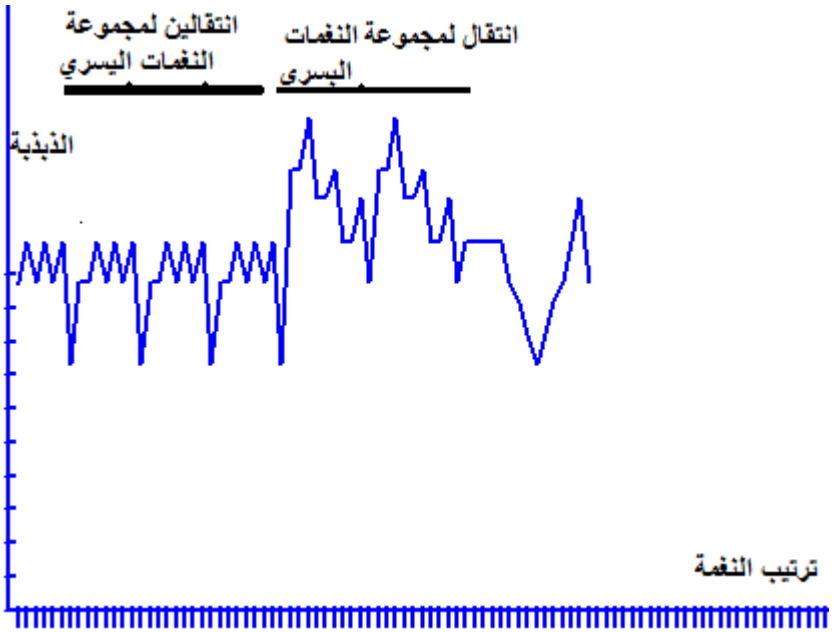
النـوع الثـاني مـن الانتقـالات هـو الانتقـال الرأسـي عبـر الأوتـار والسـلالم الموسـيقية والأوكتافات ويطلق الموسيقيون عليه transposition ونسمعه كتغير في المفتاح أو النغمة (حاد إلي غليظ وبالعكس).

مقطوعة بلادي بلادي لسيد درويش

مقطوعة السلام الجمهوري بعد حذف علامة المازورة

ونلاحظ تكرار في الجزء الأول وينتقل لوسط الجزء الثاني وهذا يرجع لطبيعة التكرار في النشيد النشيد الوطني لسيد للموسيقار سيد درويش.



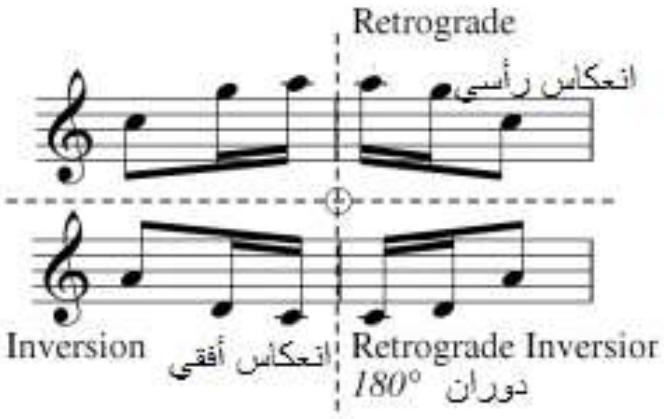
مقطوعة يا مطرة رخي رحي لأميمة أمين

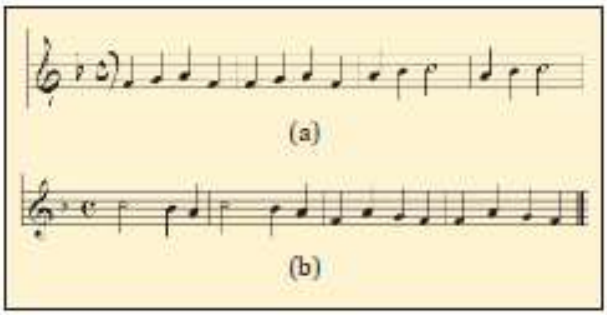


رسم توضيحي يوضح ترتيب النغمة وذبذبتها لمقطوعة يا مطرة

ونلاحظ وجود انتقالين لتجمع من النغمات ثم انتقال لتجمع واحد من النغمات مع العلم أن الانتقال من اليسار لليمين

الانعكاســـــــات:

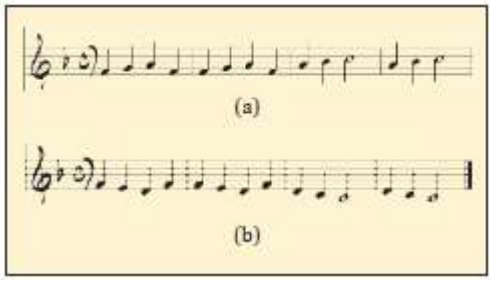




دو	سي	لا	دو	سي	لا	فا	لا	صول	فا	فا	لا	صول	فا
C	B	A	C	B	A	F	A	G	F	F	A	G	F
F	G	A	F	F	G	A	F	A	B	C	A	B	C

والانعكاس أيضا لدي الموسيقيون يكون إما رأسي أو أفقي، فإذا تم عكس جزء من اللحن مثلا عبر خط عمودي في نهاية مازورة، فإن الموسيقيين يطلقون عليه retrograde وهنا يظهر اللحن كما لو يعزف من الخلف للأمام كما بالشكل أعلاه.

واذا تم عكس اللحن عبر خط أفقي أو فراغ في السلم الموسيقي فإن الموسيقيين يطلقون عليه inversion كما بالمثال التالي:

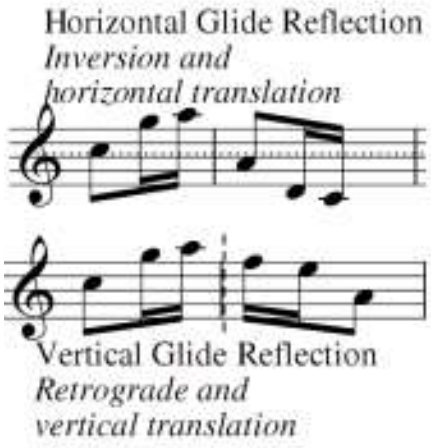
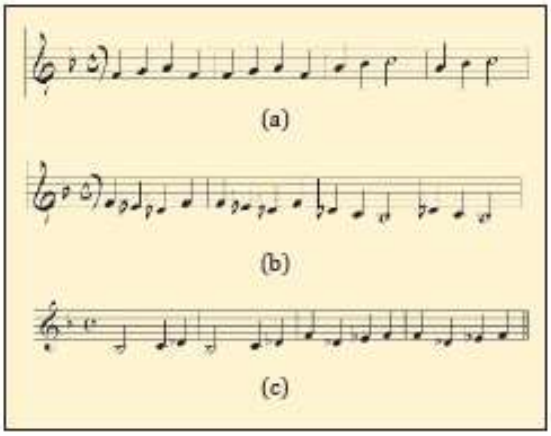


دو	سي	لا	لا	دو	لا	فا	دو	صول	فا	فا	لا	صول	فا
C	B	A	A	C	A	F	C	G	F	F	A	G	F
B	C	D	B	C	D	F	D	E	F	F	D	E	F

انعكاس حول نغمة الصول الابتدائية

وهذا الانعكاس لا يحافظ علي المسافة الرياضية أو الموسيقية.

الـــــــدوران:

هي تحويلات تحافظ على المسافة الموجودة ولها نقطة ثابتة

وأحـــد الـــدورانات يســـمي inversion retrograde ويتكـــون مـــن نـــوعين الانعكـاس ويعنـي بـه قلـب اللحـن ثـم عزفـه مـن الخلـف للأمـام حيـث يـدور بزاويـة ١٨٠ درجة حول أول نغمه في اللحن

المـراجـــــع

- Cooper; Brett D. & Barger;Rita, Listening to Geometry , Mathematics Teacher ,Vol. 103 , No. 2 ,2009 ,PP108-115
- Galante;Daniela , The Role of music to learn Geometrical Transformation, http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/7985/Proceedings-636pages-Dresden2009_189-194.pdf
- Hart;vi, Mathematics and Music Boxes, http://vihart.com/wp-content/uploads/2016/08/Vi-Hart-ESMA2010-Music-Box.pdf