

**دراسة مقارنة لحتوى الكسور في كتب الرياضيات بالمملكة العربية
السعودية وسنغافورة**

**A comparative study of the content of fractions in mathematics books
in the Kingdom of Saudi Arabia and Singapore**

إعداد

د.سعاد مساعد الأحمدى

**أستاذ المناهج وطرق التدريس المشارك
كلية التربية - قسم المناهج وطرق التدريس
جامعة الامام محمد بن سعود الإسلامية**

الملخص:

هدف البحث إلى تحليل محتوى الكسور في كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية ومقارنته بكتب سنغافورة وذلك للكشف عن أوجه التشابه والاختلاف في الخصائص الفيزيائية للكتب، وطريقة عرض وتطوير البنية المعرفية للكسور وعملياتها الحسابية، ومواصفات فرص التعلم التي تتيحها للطلاب. وتم استخدام التحليل النوعي والكمي لتحليل الكتب. وأظهرت النتائج عناية الكتب السعودية بالمنظور الرياضي في عرض محتوى الكسور، مع قلة استخدام التمثيلات، ووجود تكرار في عرض الدروس، مع زيادة في عدد الدروس والفصول والتمارين بصورة أكبر بكثير مما هو مقدم في كتب سنغافورة. كما أظهر التحليل عناية الكتب السنغافورية ببناء وتطوير فهم عميق للمفاهيم الرياضية من خلال الرسوم التوضيحية المتعددة، مع تحقيق التوازن بين المعرفة المفاهيمية والإجرائية، وامتاز عرض المحتوى بقلة الكتابات اللفظية، وقلة عدد الكلمات في الصفحة الواحدة. الكلمات المفتاحية: تحليل الكتب، دراسة مقارنة، الكسور، جمع وطرح الكسور، ضرب وقسمة الكسور.

Abstract:

A comparative study of the content of fractions in mathematics books in the Kingdom of Saudi Arabia and Singapore

Prepared by: Souad Musaed Al-Ahmadi

Associate Professor of Curricula and Teaching Methods at Imam Muhammad bin Saud Islamic University

College of Education - Department of Curricula and Teaching Methods

The aim of the research is to analyze the content of fractions in mathematics books at the primary stage in the Kingdom of Saudi Arabia and compare it with the books of Singapore in order to detect the similarities and differences aspects in the physical properties of these books, the way to display and developing the knowledge structure of the fractions and their mathematical operations, and specifications of learning opportunities that are available to students. A qualitative and quantitative analysis was used to analyze the Books. The results showed the attention of Saudi books to the mathematical perspective in displaying the content of fractions, and lack of use of representations, with a repetition in the presentation of lessons, and an increase in the number of lessons, chapters and exercises much more than what is presented in Singapore books. The analysis showed also the interest of Singaporean books to building and developing a deep understanding of mathematical concepts through a variety of illustrations, with achieving a balance between conceptual and procedural knowledge, the content display is also characterized by a lack of verbal writings and a few number of words per page.

Keywords: Textbook analysis, Comparative study, Fractions, addition and subtraction Fractions, Multiplying and Dividing Fractions.

مقدمة:

يعد تعلم الرياضيات من المتطلبات الأساسية للحياة المستقبلية التي تسعى جميع المؤسسات التربوية لتحقيقه من خلال منظومتها التعليمية، لذا وجهت عنايتها في البحث عن كافة العناصر المؤثرة في تحقيق أهدافه، ومن ذلك البحث في دور الكتاب المدرسي باعتباره جزءاً من التعليم المؤسسي، والذي يمنح الطلاب فرصاً للوصول إلى المعرفة من خلال ما يوفره في موضوعاته وأنشطته من تسلسل منظم للأفكار والمعلومات، كما يدعم المعلمين في تيسير التعلم.

ويرى المجلس الوطني للبحوث (National Research Council (NRC, 2004) "أن المناهج تلعب دوراً حيوياً في الممارسة التعليمية، فهي حلقة الوصل الحاسمة بين المعايير وإجراءات المساءلة، كما أكدت العديد من الدراسات (Reyes, Reys & Chavez, 2004, Slavin, Lake, & Groff, 2009, Fan, Zhu, & Miao 2013) على أن أنماط وخصائص محتويات الرياضيات المعروضة في الكتب المدرسية تؤثر على فرص حصول الطلاب على المعلومات، والذي يظهر تأثيره في مستوى تحصيلهم.

وقد سعت المؤسسات التربوية لتقويم جودة تعليم الرياضيات لديها، لذا عقدت اللقاءات والمؤتمرات، لتحليل ومقارنة الكتب المدرسية على مستوى الدولة وعبر الدول ذات الثقافات المتنوعة مثل دول شرق آسيا والدول الأوروبية والولايات المتحدة الأمريكية، وذلك للكشف عن جودة وكفاءة كتبها الدراسية من حيث الخصائص العامة، وطبيعة المحتوى الرياضي وطريقة العرض، وخصائص عرض المهام والمشكلات الرياضية، والبحث عن أفضل التجارب والخبرات التي يمكن الاستفادة منها في إصلاح وتطوير نظامها.

13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany 2016 (ICME13,2016); the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT,2014); Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (Rezat et al. 2019)

ويعد محتوى الرياضيات وطرق تعليمه وتعلمه بالمرحلة الابتدائية القاعدة الأساسية للبناء المعرفي، ويعد مجال الأعداد أحد مجالات المحتوى الرياضي الأساسية التي يجب أن يمتلكها الأطفال من أجل تحقيق مستويات عالية في الرياضيات مستقبلاً (Richardson, 2012)، نظراً لما لها من أهمية في وصف الكميات والعلاقات، وتمثيل الأفكار العددية، وتعد الكسور أحد مواضيع مجال الأعداد الهامة، التي ينبغي

أن يتعلمها ويتقنها الطلاب، حيث أوضحت اللجنة الاستشارية الوطنية للرياضيات في الولايات المتحدة National Mathematics Advisory Panel (NMAP, 2008) أن فهم الكسور شرط مسبق للنجاح في علم الجبر، كما أكد يانق ووي (Yang & Wu, 2010) على أن الطلاب في المرحلة الابتدائية إن لم يكن لديهم فهم عميق وصحيح للكسور فإن قدرتهم على التقدم في تعلم الرياضيات ستكون محدودة، لذا ركزت جميع الأنظمة التعليمية على تضمينه في محتواها الدراسي، و اعتبر أحد مجالات الاختبارات الدولية، حيث خصص اختبار دراسة التوجهات الدولية للرياضيات والعلوم Trends in International Mathematics and Science Study (TIMMS, 2019)، 50% من أسئلة الصف الرابع لمجال الأعداد، منها 15% للكسور والكسور العشرية وبالرغم من أهمية الكسور إلا أن الدراسات أظهرت أن الطلاب يواجهون صعوبات في تعلمها، كما يواجه المعلمون صعوبات في تدريسها، وهذا يؤثر في تدني مستوى التحصيل الرياضي لدى الطلاب بشكل عام (السعيد، 2003؛ راشد، 2008؛ Siegler & Pyke, 2013).

ونظرا لما أظهرته نتائج الاختبارات الدولية من تقدم وارتفاع تحصيل طلاب دول شرق آسيا وفي مقدمتهم سنغافورة في الرياضيات، حيث حصد طلابها المراكز الأولى في اختبارات دراسة التوجهات الدولية في الرياضيات والعلوم، وكذلك في اختبارات برنامج التقييم الدولي للطلاب. منذ عام ٢٠٠٣ Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016)، فقد شجع ذلك العديد من الباحثين على إجراء العديد من الدراسات لمعرفة طرق عرض وتقديم المعرفة الرياضية بصورة عامة، وموضوع الكسور بصورة خاصة في الدول ذات الأداء المرتفع في الاختبارات الدولية، رغبة في تطوير كتبهم لتحسين مستوى تحصيل طلابهم (Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010; Yang, Reys & Wu, 2010 & Alajmi, 2012).

وفي ضوء ما سبق، وما أظهرته نتائج الاختبارات الوطنية والاختبارات الدولية والدراسات التربوية من ضعف مستوى التحصيل الرياضي لدى طلاب المملكة العربية السعودية بالمرحلة الابتدائية بصورة عامة والكسور بصورة خاصة، سعت الدراسة إلى محاولة الكشف عن طرق عرض كتب سنغافورة لمحتوى الكسور، ومقارنته بعرض كتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية في محاولة لتحديد التشابه والاختلاف في العرض ونقاط التميز التي يمكن الاستفادة منها.

الخلفية النظرية:

تعد كتب الرياضيات المدرسية أحد موارد التعلم الأساسية التي يتم من خلالها دعم تعلم الطلاب، فهي تساعد الطلاب على معرفة المحتوى المرغوب و عما يجب عليهم

فعله، والسلوكيات الرياضية التي يجب تشجيعها مما يسهم في تحسين تحصيلهم (Schmidt, Wang & McKnight, 2006)، وهذا يتطلب العناية بتصميمها والتأكد من كفايتها وجودتها.

ويرى ريس وريس وشافاز (Reys, Reys & Chavez, 2004) أن التقدم الكبير الذي حققته دول شرق آسيا في الاختبارات الدولية في الرياضيات، والاختلافات الملحوظة في الأداء بين الطلاب في مختلف الدول المشاركة قد يعزوا إلى الاختلافات في المناهج الرياضية، وهذا شجع الباحثين والتربويين على إجراء العديد من الدراسات عبر الوطنية لتحليل كتب الرياضيات المدرسية، والتي أظهرت وجود اختلافات كبيرة في تقديم وهيكله المواقف التربوية بين الكتب المدرسية في دول شرق آسيا وكتب الولايات المتحدة الأمريكية والدول الأوروبية (Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016; Charalambous, et al., 2010; Yang, Reys, & Wu, 2010; Fan, Zhu & Miao 2013)

وقد أظهرت الدراسات جوانب تميز في كتب دول شرق آسيا ومن ذلك ما أظهرته دراسة جينسبيرق ولينواند وانستروم وبولوك (Ginsburg, Leinwand, Anstrom & Pollock, 2005) من أن كتب رياضيات سنغافورة قد تم تصميمها لبناء فهم عميق للمفاهيم الرياضية مع الرسوم التوضيحية الملموسة التي توضح كيفية استخدام المفاهيم الرياضية المجردة لحل المشكلات بطرق مختلفة، كما تستخدم في عرضها للمحتوى نصوصاً صغيرة، تصاحبها نماذج تصويرية بسيطة ومباشرة، تجعل الطلاب يركزون في دروس الرياضيات بغض النظر عن مهاراتهم اللغوية، كما تتوقع من الطلاب إتقان المحتوى السابق، لذا يتم ترابط وتتابع المواضيع في كل فصل دون تكرار، كما تستخدم نموذج برونر (حسي؛ وشبه حسي؛ وتجريدي) في عرضها للمحتوى لتساعد الطلاب الوصول إلى مستويات عالية من المعرفة المفاهيمية والاجرائية، كما أظهرت دراسة كل من شميدت وونق وماك نايت (Schmidt, Wang & McKnight, 2005)؛ وهوفن وجارليك (Hoven & Garelick, 2007) أن معايير الدول التي احتلت المراكز المتقدمة في الاختبارات الدولية والتي منها سنغافورة، متوافقة بصورة كبيرة مع معايير الدولة المشتركة الأساسية في الرياضيات CCSSM، حيث أظهرت دراستهم أن الإطار العام لمناهج سنغافورة يدعم التحولات الثلاث الرئيسية المضمنة في المعايير المشتركة: التركيز، والتماسك، والصرامة، كما يركز على تطوير الاستيعاب المفاهيمي من خلال حل المشكلات الرياضية المتعدد الخطوات؛ ويضع أساساً قوياً في العدد والكم في الصفوف من الروضة إلى الصف الخامس، كما يعرض الموضوعات في إطار نهج إتقان حيث يكون موضوع التكرار محدوداً، كما ترى دراسة تشارلمبوس وآخرون (Charalambous et al, 2010) أن سبب الأداء الضعيف في الرياضيات لطلاب

الولايات المتحدة في الدراسات المقارنة الدولية قد يعود إلى نقص تركيز المناهج الدراسية على تعلم الطلاب.

فدولة سنغافورة تعتنى بمناهج الرياضيات، وتعمل على مراجعتها وتطويرها بشكل دوري من قبل وزارة التعليم، لتتماشى مع أحدث دورة دراسية وطنية، وبالرغم من وجود العديد من الشركات السنغافورية التي تصمم كتب دراسية لمناهج الرياضيات، إلا أنه لا يصرح باستخدامها واعتمادها في المدارس إلا بعد مراجعتها من قبل وزارة التعليم والتأكد من استيفائها لمعايير الدولة، كما أظهر الإطار العام لتعليم الرياضيات في سنغافورة أن استخدام الرياضيات لحل المشكلات هو مركز تعليم الرياضيات، مع إعطاء التركيز والاهتمام لخمس مكونات مترابطة هي الاستيعاب المفاهيمي، وإتقان المهارات والعمليات الرياضية، والاتجاهات ومهارات ما وراء المعرفة، كذلك حدد هدف منهج الرياضيات بالمرحلة الابتدائية هو تمكين الطلاب من اكتساب المفاهيم والمهارات الرياضية للاستخدام اليومي والتعلم المستمر في الرياضيات وتطوير التفكير والاستدلال والتواصل والتطبيق باستخدام نهج حل المشكلات، مع السعي لبناء الثقة لتعزيز الاهتمام بالرياضيات (Ministry of Education Singapore, 2013).

ووضح قسم تخطيط وتطوير المناهج في سنغافورة (Curriculum Planning and Development Division, 2012) أن الإطار العام لمناهج الرياضيات الذي يعمل به منذ ١٩٩٠ يؤكد على تطوير الفهم العميق للمفاهيم الرياضية وإدراك علاقاتها وتطبيقاتها، وهذا يتطلب إتاحة الفرص للطلاب لممارسة خبرات تعليمية متنوعة وتدريبات عملية على النشاط واستخدام الوسائل التقنية المساعدة بما يعينهم على ربط المفاهيم الرياضية المجردة بالخبرات الملموسة، كما يتطلب تطوير المهارات الرياضية إتاحة الفرصة للطلاب لاستخدام وممارسة هذه المهارات في إطار فهم المبادئ الرياضية الضمنية وليس مجرد إجراءات، كذلك العناية بالاتجاهات التي تتطلب معالجة الأفكار المؤثرة في تعلم الرياضيات مثل: المعتقدات الخاصة بالرياضيات ومدى جدواها، والاستمتاع بتعلم الرياضيات، والثقة باستخدام الرياضيات، والمثابرة على حل المسألة، وهذه الاتجاهات يمكن تشكيلها من خلال التصميم الجيد لأنشطة التعلم تمارس بطريقة ممتعة وذات معنى، وتشجع على تحملهم مسؤولية تعلمهم، بما يساهم في بناء الثقة، وقد أظهرت دراسة نوقروهو (Nugroho, 2010) جودة عرض المحتوى في كتب الصف الأول بسنغافورة، حيث استخدمت اللغة والرموز والصور البصرية لتعميق وتوضيح المفاهيم والعلاقات الرياضية، بطريقة تكاملية لشرح المفاهيم الرياضية البسيطة في خطوات موجهة للغاية، مع الانتقال من المفاهيم السهلة أو الأكثر شيوعاً إلى المفاهيم الجديدة أو الأكثر

صعوبة، مع توظف اللغة والعمليات الرياضية بعناية وفعالية، وبعدد قليل نسبياً من الكلمات في الصفحة الواحدة.

ويعد مجال الأعداد أحد مجالات المحتوى الرياضي الأساسية بالمرحلة الابتدائية، والذي يتم البدء بتعليمه عالمياً، نظراً لكونها القاعدة الأساسية للحساب، كما تعد الكسور أحد مكونات مجال الأعداد الهامة، التي توفر أساساً مفاهيمياً للعمل مع المعدلات والنسب المئوية والانحدار المرتبطة بمراحل دراسية متقدمة، ويرى الباحثين أن معرفتها تنبئ بمستوى التحصيل الرياضي لدى الطلاب، حيث أشار هيشت وفاقي (Hecht & Vagi, 2010) إلى أن الأطفال الذين يعانون من صعوبات مبكرة مع الكسور يميلون إلى أن يواجهوا صعوبات لاحقة، كما أظهرت دراسة سيفلر وآخرون (Siegler et al., 2012) في دراستهم الطولية إلى أن معرفة طلاب الصف الخامس بالكسور تنبأت بشكل فريد بمعرفة هؤلاء الطلاب للجبر وتحصيل الرياضيات الشامل في المدرسة الثانوية، وقد أظهرت دراسة تشانج وساري (Cheng & Sari, 2017) أن الدراسات التربوية التي تناولت محتوى الكتب المدرسية منذ عام ٢٠٠٦-٢٠١٥ كان تركيزها الأكبر بموضوع العدد والعمليات لدى طلاب المرحلة الابتدائية، كما أظهرت دراسته أن موضوع الكسور أيضاً كان من المواضيع المفضلة التي تم تناولها في كتب الجبر والحساب، وتعتبر الكسور أحد مواضيع مجال الأعداد المهمة.

فالكسور كأحد الأفكار الرياضية المجردة يجد الطلاب صعوبة في فهمها، لذا كان لابد من عرضها على المستوى المفاهيمي، والإجرائي بصورة مترابطة؛ لأنه بدون فهم مفاهيمي، تكون الإجراءات مربكة للغاية ويصعب تذكرها (Hecht & Vagi, 2010) ويتطلب تصور مفهومها و استيعابه استخدام التمثيلات كاليدويات، والصور، أو اللغة الشفهية، والرموز المكتوبة، والعرض في مواقف حياتية واقعية، لتوفير فرص تعلم أعلى، وكلما كان لدى الطلاب القدرة على الترجمة بطلاقة من تمثيل إلى آخر، يكون لديهم فهم أفضل للمفاهيم وأكثر نجاحاً في المراحل الدراسية القادمة (Siegler & Pyke, 2013) ويرى فان دي والي (Van de Walle, 2001) أن استخدام النماذج المرئية ضرورة في تعلم وفهم الكسور وعملياته، وأن استخدام نموذج المنطقة عند وصف مفهوم الكل للكسور باستخدام الدوائر والمستطيلات هو الغالب، أما خط الأعداد فيستخدم لترتيب ومقارنة الكسور، ومجموعة الأجزاء.

وقد أظهر العديد من الباحثين اهتمامهم بالدراسات عبر الوطنية لتحليل ومقارنة المحتوى الرياضي في كتب دول شرق آسيا مثل الصين وسنغافورة وكوريا، وتايوان، ومقارنتها بكتب الولايات المتحدة الأمريكية أو الدول الأوروبية مثل فنلندا، البانيا، المانيا، وهناك دراسات قارنتها بكتب باكستان وتركيا والكويت، ومن تلك الدراسات

دراسة يانغ وآخرون (Yang et. al., 2010) التي أظهرت أن عرض الكسور في الصفين الخامس والسادس في كتب سنغافورة بدأ متقدماً عن السلسلة الأمريكية والتايوانية، وكان محتواه أكبر، وتتعامل عينة كتب الولايات المتحدة مع المواقف الحقيقية في عرض أسئلتها بصورة أكبر من سلسلة تايوان وسنغافورة. كذلك أظهرت نتائج دراسة العجمي (Alajmi, 2011) إلى أن الكتب اليابانية عرضت الكسور بدء من الصف الثالث، واستخدمت النماذج الخطية وربطت الكسور بالقياس، و كان عدد صفحات دروس الكسور أقل من الكتب الأمريكية والكويتية التي بها تكرار في عرض الدروس، وتعرض الكسور بدء من الصف الأول، وتستخدم الكتب الأمريكية مواد ملموسة مثل اليديويات لتعلم إجراءات الكسور، بينما الكتب الكويتية فتستخدم التمثيل التصويري بنموذج المنطقة لتوضيح أفكار الكسور، وأن الكتب الكويتية ركزت على القواعد الإجرائية بصورة أكبر مع تقديم ملخص قاعدة كل إجراء رياضي بدء من الصف الخامس عند عرض العمليات على الكسور. كذلك أظهرت دراسة يانغ (Yang, 2018) أن الكتب الفنلندية تعنى بالتعريف الأساسي للكسور وتستخدم الرسوم البيانية بصورة عميقة بصورة أكبر مما تعرضه كتب تايوان، كذلك أظهرت دراسة داود (Daud, 2020) أنه وبالرغم من عناية كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في باكستان والصين بتمثيل الكسور واستخدامها للرموز والتمثيلات المتعددة، إلا أن الكتب الصينية أظهرت عناية فائقة بالتعريف الأساسي للكسور واستخدام الرسوم البيانية للكسور لتوضيح المفاهيم بصورة أكبر مما هو موجود في الكتب الباكستانية، كما كانت الأسئلة في الكتب الصينية مرتبطة بظروف الحياة الواقعية بصورة أكبر من الكتب الباكستانية.

مشكلة الدراسة وأسئلتها:

يعد موضوع الكسور كأحد مكونات مجال الأعداد، القاعدة الأساسية للبناء المفاهيمي في المراحل التالية، لذا تظهر أهمية العناية به في المرحلة الابتدائية، وحيث إن نتائج طلاب المملكة العربية السعودية في الاختبارات الدولية، قد أظهرت ضعفاً شديداً في التحصيل الرياضي، (TIMSS, 2003, 2007, 2011, 2015)، كذلك ما أشارت إليه نتائج الاختبارات الوطنية لعام ١٤٣٥/١٤٣٦هـ التي أعلنتها هيئة تقويم التعليم (٢٠١٦م) بالمملكة العربية السعودية، من ضعف عام في مستوى أداء الطلاب في الرياضيات.

كما أن نتائج الاختبارات الدولية قد أظهرت أيضاً أن طلاب دولة سنغافورة حققوا نتائج متقدمة ومستمرة، لذا ارتأت الباحثة الكشف عن طريقة عرض كتب سنغافورة لموضوع الكسور، لمعرفة الطريقة المتبعة لديهم في عرض المعرفة الرياضية،

وتحديد نقاط القوة والتركيز فيها ومقارنتها بكتب المملكة العربية السعودية، وعليه تسعى الدراسة إلى الإجابة عن سؤال الدراسة التالي:

كيف تم عرض محتوى الكسور في كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية وسنغافورة؟

ويتفرع منه الأسئلة الفرعية التالية:

١. ما الخصائص الفيزيائية لكتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية وكتب سنغافورة؟
٢. ما موضوعات الكسور وتطبيقاتها التي تناولتها كتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية وكتب سنغافورة؟ وكيف يتم تطويرها؟
٣. كيف عرضت كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية وسنغافورة مواضيع الكسور من حيث:
 - أ. مفهوم الكسر وتصنيفاته وتمثيلاته.
 - ب. تكافؤ وتبسيط الكسور ومقارنتها وترتيبها.
 - ج. عمليتي جمع وطرح الكسور؟
 - د. عمليتي ضرب وقسمة الكسور في كتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية وسنغافورة؟
٤. ما خصائص أسئلة محتوى الكسور في كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية بالمملكة العربية السعودية وسنغافورة؟

أهداف الدراسة:

تهدف الدراسة من خلال دراسة عبر وطنية إلى تحليل كتب الرياضيات المدرسية بالمرحلة الابتدائية بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية ومقارنتها بكتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية بدولة سنغافورة، وذلك للكشف عن فرص التعلم المباشرة التي تقدمها كتب الرياضيات المدرسية لطلاب المرحلة الابتدائية لتعلم الكسور بالإضافة إلى الكشف عن الخصائص العامة لمواصفات الكتاب المدرسي وطبيعة تتابع طرح موضوعات الكسور في الكتب.

أهمية الدراسة:

تظهر أهمية هذه الدراسة من أهمية الكتاب المدرسي ودوره في العملية التعليمية ومن أهمية موضوع الكسور الذي يعاني العديد من الطلاب في تحصيله، بالإضافة إلى أهمية المرحلة الابتدائية التي تعد قاعدة البناء للمراحل التعليمية التالية، لذا فقد تخدم نتائج هذه الدراسة مخططي المناهج في تفويم وتطوير محتوى الكسور في الكتب المدرسية، كما قد تخدم المعلمين والطلاب في التعرف على الطرق الفاعلة في عرض

وتعميق المعرفة المفاهيمية والإجرائية لموضوعات الكسور، وإيجاد الحلول لمعالجة الصعوبات التي يعاني منها الطلاب في تعلمهم.

منهج الدراسة:

في ضوء أهداف الدراسة تم استخدام منهج تحليل المحتوى بنوعيه الكمي والنوعي.

مجتمع الدراسة:

تحدد مجتمع الدراسة بكتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في كل من السعودية وسنغافورة، كتاب الطالب فقط ولم يتضمن التحليل كتب دليل المعلم أو كتب التدريبات، لارتباط التحليل بما يقدمه المحتوى الدراسي للطلاب بشكل مباشر وليس ما يقدمه المعلم من ممارسات.

وتتفق كلا الدولتين في نظامها التعليمي بالمرحلة الابتدائية بأن لهما ست صفوف دراسية، كما أن وزارة التعليم في الدولتين هي المسؤولة عن وضع الإطار العام للتعليم، وهي التي تصرح باعتماد الكتب الدراسية.

وتختلفان في أن وزارة التعليم في المملكة العربية السعودية تستخدم سلسلة كتب مدرسية موحدة في جميع أنحاء البلاد وهي المسؤولة عن توزيعها للمدارس، وقد اعتمدت الوزارة سلسلة كتب رياضيات أجنبية هي سلاسل شركة ماقروهيل الأمريكية والتي تم ترجمتها ومواءمتها من قبل شركة العبيكان، والكتب المستخدمة للتحليل هي النسخة المعتمدة طبعة ١٤٤١ هـ.

بينما في سنغافورة تعتمد وزارة التعليم الإطار العام للمنهج ومصفوفة المحتوى الرياضي وتترك للشركات الوطنية في سنغافورة إعداد تلك الكتب ولا تُطرح للمدارس إلا بعد اعتمادها من قبل المعهد الوطني للمعلمين، ومن تلك الشركات المعتمدة في سنغافورة منذ ٢٠٠١ شركة STAR PUBLISHING PTE LTD، لذا اعتمدت الباحثة هذه السلسلة بالتحليل، طبعة ٢٠١٨ وهي نفس الكتب المعتمدة حتى عام ٢٠٢٠م حسب ما أظهره موقع وزارة التعليم

<https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/approved-textbook-list>

عينة الدراسة:

تناولت الدراسة تحليل محتوى موضوعات الكسور في كتب رياضيات المرحلة الابتدائية، وبعد الاطلاع على محتوى الكتب في الدولتين تحدد ما يلي:

أ. عينة الدراسة من كتب الرياضيات بدولة سنغافورة من سلسلة STAR PUBLISHING PTE LTD والتي تتضمن موضوع الكسور هي (٨) كتب وهي (الصف الثاني الفصل الثاني، والصف الثالث الفصل الثاني، والصف الرابع والخامس والسادس الفصلين الأول والثاني).

ب. عينة الدراسة من كتب رياضيات المرحلة الابتدائية بالمملكة العربية السعودية الموحدة التي تتضمن موضوعات الكسور، وهي الكتب: (الصف الأول الفصل الدراسي الثاني، الصف الثاني الفصل الدراسي الثاني، الصف الثالث الفصل الدراسي الثاني، الصف الرابع الفصل الدراسي الثاني، الصف الخامس والسادس الفصيلين الأول والثاني) طبعة عام ١٤٤١هـ.

مصطلحات الدراسة:

محتوى الكسور: ويقصد به جميع مفردات موضوع الكسور الموجودة في كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية وسنغافورة من حيث مفاهيمه الأساسية وتمثيلاتة، وتصنيفاته، والعلاقات فيما بينها، والعمليات الأربع على الكسور.

إجراءات الدراسة وأدواتها:

لجمع البيانات اللازمة للإجابة على أسئلة الدراسة الخاصة بمقارنة محتوى الكسور في كتب المملكة العربية السعودية وسنغافورة، فقد تم مراجعة الأدب التربوي الخاص بنماذج وأطر تحليل محتوى الكتب المدرسية في المقارنات الدولية، مثل:

(Charalambous et al, 2010; Yang, Reys &Wu, 2010; Alajmi,2012; Daud, 2020)

والتي أظهرت أن تحليل المحتوى في الدراسات عبر الوطنية قد انتهج تحليلاً أفقياً يتم فيه التركيز على خصائص الكتب المدرسية العامة، وتحليلاً رأسياً يعتبر الكتاب المدرسي بيئة لبناء المعرفة ويبحث في كيفية عرض الكتب المدرسية لمفهوم رياضي، والبعض أضاف التحليل السياقي الذي يبحث في الطرق التي تستخدم بها الكتب المدرسية الأنشطة التعليمية من قبل المعلمين أو الطلاب. وقد أظهرت العديد من الدراسات استخدامها الاسلوبيين الأفقي والعمودي في التحليل.

وعلى ذلك قامت الباحثة بإجراء التحليل على مرحلتين:

المرحلة الأولى: استخدام التحليل الأفقي وفق فئتين: أحدها المعلومات الأساسية، والأخرى الهيكل العام للكتب، حيث تم تحديد في الفئة الأولى الخصائص المادية لكتب الرياضيات المدرسية، مثل حجم الكتاب وعدد صفحاته وفصوله، وعدد فصول ودروس الكسور وصفحاتها، ومتابعة تسلسل وتتابع مواضيع محتوى الكسور المقدمة بالمرحلة الابتدائية في كل دولة، وفي الفئة الثانية تم تحديد الهيكل العام للكتب وتنظيمها، لتوفير معلومات حول كيفية تعامل المؤلفين مع المحتوى، ولتقديم معلومات أولية عن الكتاب المقدم للطلاب في صف معين وفي المرحلة ككل.

المرحلة الثانية: استخدام التحليل الرأسي، من خلال تحليل جميع مكونات محتوى فصول ودروس موضوعات الكسور التي تقدمها كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية

من أنشطة، و تعريف و صورة و سؤال و مثال و تمرين عملي أو مشكلة ترتبط بموضوع الدرس، وذلك للكشف عن فئتين، أولها فئة بنية المحتوى الرياضي والممارسات الرياضية والتي يتم فيها الكشف عن كيفية نقل الكتاب المدرسي للمعرفة الرياضية في موضوعات الكسور للطلاب وماهي الممارسات الرياضية التي ينبغي للطلاب انجازها، وقد تم جمع بياناتها من عرض الدروس والامثلة المطروحة والفئة الثانية هي فرص التعلم التي ينبغي على الطلاب استيفائها والتي تم جمع بياناتها من الأسئلة المقدمة في الدروس وليس لها اجابة مكتوبة. ويتم فيها تحليل سياق السؤال، وأنواع الاستجابة المطلوبة، وعدد خطوات الحل، والجدول التالي يوضح الإطار العام للتحليل

الشكل ١: الإطار المستخدم لتحليل كتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية وسنغافورة:

التحليل الأفقي للكتب	
<p>ثانياً: موضوعات الكسور وتطبيقاتها وطرق تطويرها وتشمل مفردات محتوى كل درس في كل صف من حيث:</p> <ul style="list-style-type: none"> • مفردات مواضيع الكسور التي تمت تغطيتها في محتوى فصول ودروس الكسور في كل صف. • تسلسل موضوعات الكسور وتتابعها في كل صف وعبر الصفوف • وقد استخدمت للإجابة على سؤال الدراسة الثاني، حيث تم استخدام بطاقة تحليل لتحديد جميع مفردات مواضيع الكسور في كل درس من خلال رصد عناوين الدروس وأيضاً كافة المفردات من داخل كل درس، على سبيل المثال: عنوان الدرس الكسور الاعتيادية والمفردات من الداخل تتناول الكسور المتشابهة وغير المتشابهة 	<p>أولاً: الخصائص الفيزيائية والعمامة لكتب الرياضيات والتي استخدمت للإجابة على السؤال الأول للدراسة، ويقصد بها</p> <ol style="list-style-type: none"> ١- المعلومات الأساسية عن الكتب من حيث • عدد الكتب، الناشر وسنة النشر، المواد المصاحبة (مثل أدلة المعلمين والمواد المرجعية) وقد تم جمعها من موقع وزارة التعليم في الدولتين. • الهيكل العام لعرض الفصول والدروس ويهدف الى تحديد النمط العام المتبع في عرض الكتب للمحتوى الرياضي، وقد تم تحليل الهيكل العام لمحتوى الكتب تحليلاً نوعياً من خلال تحليل مكونات بناء كل فصل ومكونات بناء كل درس، لتحديد النمط العام لهيكل محتوى الكتب. ٢- الخصائص العمامة للكتب من حيث • عدد صفحات وفصول ودروس الكتب، وعدد فصول ودروس الكسور، وقد تم تحليلها كمياً باستخدام بطاقة تحليل الخصائص العمامة للكتب
التحليل الرأسي لمحتوى الكسور	
فرص التعلم المتاحة للطلاب	بنية المحتوى الرياضي
<p>تحليل جميع التمارين المعروضة في كتب عينة الدراسة، وتم التحليل وفقاً لإطار لي (Li,2000) واقتصر التحليل على</p> <p>نوع السياق المعروض (رياضي- توضيحي)؛</p> <p>- عدد الخطوات للحل (خطوة- متعدد الخطوات).</p> <p>- نوع الاستجابة (عددية- تعبير عددي- تعبير تمثيلي- شرح أو حل).</p> <p>ويقصد بالتمارين: جميع فرص التعلم التي تقدمها كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية للطلاب في موضوع الكسور وتطبيقاتها وغير محلولة.</p> <p>ويقصد السياق: المحتوى المصاغ به السؤال فيما إذا كان رياضي أي رموز أو مكون من عبارة واحدة، أو</p>	<p>تحليل المحتوى الرياضي المعروض في فصول ودروس الكسور في جميع كتب عينة الدراسة.</p> <p>واستخدمت نتائجها في الإجابة على أسئلة الدراسة الخاصة بالكشف عن كيفية عرض الكتب للمعرفة الرياضية الخاصة بالكسور (المفاهيم الأساسية للكسور، وتصنيفاتها، والعمليات الأربعة على الكسور)، وقد ركز التحليل على:-</p> <ul style="list-style-type: none"> • نوع وطريقة عرض البناء المفهومي للكسور (جزء- كل، أو مجموعة أجزاء، أو تقسمة أعداد كلية...). • وتم التحليل نوعياً، باعتبار وحدة التحليل هي الدرس بكل مكوناته من أنشطة وأمثلة وتعريف وقواعد وإجراءات لبحث كيفية عرض الدروس لمفهوم الكسر. • نماذج تمثيلات الكسور: وتشمل جميع الرسوم التوضيحية

<p>توضيحي ويقصد به مسألة لفظية لمشكلة رياضية. كما يقصد بعدد الخطوات أي حل السؤال فيما إذا كان يتم بخطوة واحدة أو يتطلب حله عدة خطوات. أما نوع الاستجابة: فيقصد بها صورة ناتج الحل فيما إذا كانت إجابة عدد، أو عبارة عددية، أو تعبير تمثيلي ويقصد به الرسومات التوضيحية التي ينبغي من الطلاب أدائها للحل.</p>	<p>للكسور المعروضة في جميع أنشطة محتوى الدرس أو في نشاط استعد، أو استكشف، وفي جميع الأمثلة المحلولة، سواء كانت تمثيلات واقعية مثل أفراس الفطائر أو نماذج توضيحية ويمثلها نموذجين هما: نموذج (جزء -كل) مثل تمثيل المنطقة الممثل بقرص الكسور، أو الشريط كشرط الكسور، والتمثيل على خط الأعداد، - نموذج مجموعة، الأجزاء مثل قطع العد. وتم تحليلها كميًا، واعتبار وحدة التحليل هي الرسومات التوضيحية في أنشطة استكشف أو الدروس • الممارسات الرياضية الصفية: وتشمل جميع الأنشطة التي تتيح للطلاب ممارسة المعرفة الرياضية في نشاط استعد أو استكشف أو في الأمثلة المعروضة في كل درس، وقد تم حصرها من حيث -عددها، ونوع بنائها للمعرفة (مفاهيمي أو إجرائي)، نوع النموذج المصاحب لها (جزء - كل، أو مجموعة الأجزاء) وتم تحليلها كميًا باستخدام بطاقة تحليل المحتوى واعتبار النشاط هو وحدة التحليل</p>
--	---

وقد تم عرض الإطار على مجموعة من المحكمين مختصي المناهج وطرق تدريس الرياضيات، للتأكد من سلامة ودقة الإطار، كما تم التأكد من ثبات التحليل من خلال إجراء التحليل من قبل ثلاثة محللين هم الباحثة ومشرفة رياضيات ومعلم، حيث تم اختيار عددا من الفصول وتحليل خصائص التمارين المعروضة فيها، وتم احتساب ثبات التحليل للتحقق من سلامة ودقة الترميز المحدد بالإطار العام، وكانت نسبته عالية.

إجابة أسئلة الدراسة:

للإجابة عن أسئلة الدراسة تم تحليل محتوى كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية (كتاب الطالب) في كل من المملكة العربية السعودية وسنغافورة، تحليلاً رأسياً على مستوى الصفوف، وأفقياً على مستوى الدروس في كل فصل لجميع موضوعات الكسور في فصول ودروس الكسور وتطبيقاتها وبحسب السؤال البحثي كما يلي: -

١. ما الخصائص الفيزيائية لكتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية وكتب سنغافورة؟

تم الإجابة عن سؤال الدراسة الأول، من خلال محورين الأول: نظام تعليم الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في كلا الدولتين والذي سيتم حصره من موقع وزارة التعليم في الدولتين، والمحور الثاني تحليل خصائص الكتب من حيث عدد الصفحات وعدد الفصول والموضوعات، وذلك للكشف عن خصائص المحتوى وتنظيمه وموازنته بالزمن المخصص لتقديمه.

أ. نظام تعليم الرياضيات المملكة العربية السعودية وسنغافورة:

تم الاطلاع على النظام التعليمي للدولتين من خلال موقع الوزارة لتحديد المعلومات الأساسية لكتب رياضيات الدولتين كما في الجدول (١):

جدول (١) المعلومات الأساسية لنظام تعليم الرياضيات في المملكة العربية السعودية وسنغافورة

الدولة	السعودية	سنغافورة
كتب الرياضيات	كتب الطالب: (٤) لكل صف دراسي وكتابين للطالب وكتابين للنشاط للمعلم: (٤) كتب لكل صف دراسي كتابين دليل المعلم وكتابين دليل التقويم	كتب الطالب: (٤) لكل صف دراسي كتابين للطالب وكتابين للنشاط للمعلم: (٤) كتب لكل صف دراسي كتابين دليل المعلم وكتابين دليل التقويم وهو كتاب مهارات التفكير والاستدلال
جهة الإصدار	كتب موحدة توزع من قبل وزارة التعليم	سلاسل متعددة معدة من قبل شركات مختصة في سنغافورة لبناء المناهج وفق الإطار العام لتعليم الرياضيات المعتمد من قبل وزارة التعليم، وهذه الكتب توزع بالمدارس بعد اعتمادها من قبل وزارة التعليم
نوع التعليم	الزامي	الزامي
عدد الحصص	الصف الأول ٣ حصص من الصف الثاني الى الصف سادس	الصف الأول والثاني ٨ حصص الصف الثالث والرابع ١١ حصة الصف الخامس والسادس ١٢ حصة
زمن الحصة	(٥) حصص ٤٥ دقيقة	٣٠ دقيقة

يتضح من الجدول (١) أنه عدد سنوات المرحلة الابتدائية في كلا الدولتين (٦) سنوات، وتعليمهما إلزامي، وتشمل كتب الرياضيات كتاب الطالب؛ وكتاب النشاط، ودليل للمعلم، وفي التعليم السعودي يوجد للمعلم أيضاً كتاب دليل التقويم وجميعها مرتبطة بصورة مباشرة بطرق تنوع تقويم تعلم محتوى كتاب الطالب، أما في سنغافورة فالمعلم كتاب مهارات التفكير، به مجموعة من الأنشطة والتدريبات مصاغة كمشكلات لفظية، تختص بمهارة تفكير أو استدلال، وهي مرتبطة بأهداف الإطار العام لتعلم الرياضيات السنغافوري الذي ركز على حل المشكلات والتفكير.

كما يظهر الجدول (١) عناية النظام السنغافوري بتعليم الرياضيات، حيث يبلغ عدد الساعات للصفين الأول والثاني في سنغافورة (٤) ساعات مقابل (٢:٢٥) ساعة في السعودية، وفي الصفين الثالث والرابع في سنغافورة مخصص لها (٥:٥٠) ساعات، وفي الصفين الخامس والسادس مخصص لها (٦) ساعات، بينما في السعودية فمخصص من الصف الثاني إلى الصف السادس (٣:٧٥) ساعات، هذه الزيادة في الزمن المخصص لتعلم الرياضيات في سنغافورة تكاد تكون ضعف الزمن المحدد لتعليم الرياضيات في السعودية، وهذا يعطي وقت أكبر للتعلم، ويخدم المعلمين في

مجلة تربويات الرياضيات – المجلد (٢٣) العدد (٢) يناير ٢٠٢٠م الجزء الثاني

تقديم المحتوى بدقة وعمق للطلاب، ويساعدهم على مساعدة المتعلمين للتعلم والتحقق من عمق معرفتهم، بالإضافة إلى إمكانية تنفيذ بقية المصادر الخاصة بتنمية التفكير.

٢. الخصائص العامة لكتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية وسنغافورة:

لتحديد الخصائص العامة الفيزيائية للكتب، تم تحليل محتوى جميع الكتب أفقياً لحساب عدد صفحاتها وعدد فصول كل صف، وعدد فصول وصفحات موضوعات الكسور وتطبيقاتها، حيث تم حساب كل الصفحات في كل كتاب، باستثناء الاختبارات الفصلية، والترامية، والجدول (٢) يوضح ذلك:

جدول (٢) مقارنة الخصائص العامة الفيزيائية لكتب رياضيات المرحلة الابتدائية بالمملكة العربية السعودية وسنغافورة

الدولة	الصف	عدد صفحات الكتاب			عدد الفصول في الكتاب			عدد فصول الكسور في الكتاب	رقم الفصل	عدد دروس الكسور	عدد صفحات الكسور
		١ ف	٢ ف	مجموع الصفحات	١ ف	٢ ف	المجموع				
سنغافورة عدد الكتب التي بها موضوع الكسور (٦) كتب	1	127	126	253	10	9	19	0	0	0	
	2	162	132	294	6	7	13	1	3	17	
	3	168	127	295	6	6	12	1	7	31	
	4	146	146	292	6	6	12	1	8	39	
	5	174	158	332	6	7	13	1	11	45	
	6	163	95	258	6	4	10	3	2,3,4	87	
المجموع				1724			79	7	46	219	
السعودية عدد الكتب التي بها موضوعات الكسور (٨) كتب	1	82	94	176	6	7	13	0	10	7	
	2	104	110	214	6	7	13	1	8	14	
	3	123	142	265	6	6	12	1	11	19	
	4	138	154	292	6	6	12	2	10-11	63	
	5	149	167	316	6	6	12	3	6,8,9	77	
	6	163	168	331	5	5	10	4	4,6,8	104	
المجموع			1594			72	11	60	284		

يظهر الجدول (٢) أن كلا الدولتين قدمتتا في الصفوف الابتدائية الثلاث الأولى موضوع الكسور في الفصل الدراسي الثاني، وفي الصفوف الابتدائية العليا بدأت سنغافورة بعرض موضوع الكسور في الفصل الدراسي الأول، بينما عرضت الكتب

السعودية موضوع الكسور بالفصل الدراسي الثاني في الصف الرابع، وفي الصفين الخامس والسادس عرضته في كلا الفصلين الدراسيين. كذلك يتضح من الجدول (٢) أن كتب سنغافورة قدمت موضوع الكسور في فصل واحد بدء من الصف الثاني إلى الصف الخامس، وفي الصف السادس قدمت الكسور وتطبيقاتها في (٣) فصول متتالية.

أما الكتب السعودية فقد عرضت موضوع الكسور في جميع الصفوف العليا من المرحلة الابتدائية في أكثر من فصل.

كذلك يظهر الجدول قلة عدد صفحات الكسور في الكتب السنغافورية مقارنة بالكتب السعودية حيث بلغت في سنغافورة (٢١٩) صفحة، بينما في الكتب السعودية فقد بلغت (٢٨٤) صفحة، أي بزيادة قدرها (٦٣) صفحة لصالح الكتب السعودية، وسيتم تحديد أسباب هذه الزيادة في الكتب السعودية من خلال تحليل محتوى الدرس.

٢. ما هيكل فصول ودروس موضوعات الكسور في كتب رياضيات الدولتين؟

للإجابة عن هذا السؤال تم تحليل محتوى الكتب أفقياً في الدولتين، وتحديد طريقة العرض المستخدمة في فصول ودروس موضوعات الكسور، وما إذا كانت تنهج أسلوب عرض ثابت عبر الصفوف، وفيما يلي عرض كل دولة:

أ- طريقة تنظيم محتوى كتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية

أظهرت نتائج تحليل محتوى فصول ودروس كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية أن لها أسلوب ثابت في العرض كما يلي:

يبدأ كل فصل بمدخل ونشاط التهيئة يليه عرض الدروس، يعرض في المدخل الفكرة العامة للفصل تصاغ كسؤال رئيس أو قضية أو عبارة تقريرية، ومثال لفظي مع اجابته، ويحدد العناصر والمفردات الأساسية التي سيتعلمها الطالب في الفصل، يلي المدخل نشاط التهيئة الذي يحتوي على مجموعة من الأسئلة التي ترتبط بالمحتوى الرياضي الجديد وهو من أدوات التقويم التشخيصي.

وبعد نشاط التهيئة يعرض الدروس والتي تنهج أيضاً أسلوب ثابت كما يلي:

- الدروس: في مقدمة الدرس يعرض الفكرة الرئيسية للدرس ونشاط استعداد يطرح فيه قضية أو مشكلة من واقع الحياة يليها تعليمات اجراء الحل ثم يعرض أمثلة من واقع الحياة كما يعرض قواعد وإجراءات الحل، يليها مجموعة من الأسئلة كما يلي:

- تأكد: وبه مجموعة من الأسئلة المتنوعة والمشابهة للأمثلة التي تم حلها في نشاط استعداد، مع طرح سؤال خاص بمهارات التواصل الرياضي، وقد يعرض خلف كل مثال في نشاط استعداد نشاط تحقق به عدة تمارين تشابه المثال، ثم يعرض نشاط تأكد.

- تدرب وحل المسائل والتي يطرح فيها مجموعة أكبر من الأسئلة المشابهة للأمثلة المحولة في نشاط استعداد مع التنوع في مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب.

- أسئلة خاصة بمهارات التفكير العليا.
- التدريب على الاختبار وهي ترتبط بدروس سابقة.
- مراجعة تراكمية تحوي مجموعة من الأسئلة ترتبط بدروس وفصول سابقة.
- الاستعداد للدرس اللاحق يعرض فيه سؤال يتطلب حله تذكر خبرة سابقة ذات أهمية في الدرس اللاحق.

ويظهر ازدحام صفحات الدروس بالكلمات والتمارين مع ضيق المساحة للرسومات التوضيحية للمفاهيم الرياضية وإجراءاتها.

ب - طريقة تنظيم محتوى كتب الرياضيات في سنغافورة:

انتهجت سلسلة STAR PUBLISHING PTELTD في سنغافورة أسلوب ثابت في عرضها للمحتوى الرياضي، الذي وزعته في عدة فصول مكونة من: نشاط التهيئة، وعرض الدروس، ونشاط مراجعة، ودرس مشكلات لفظية. تم عرضها كما يلي:

- نشاط تهيئة عنوانه "دعونا نتحدث عن" يعرض سؤال أساسي أو قضية بسيطة تعبر عن موضوع الفصل من خلال رسم تمثيلي لموقف حياتي يدار كحوار بين مجموعة من الشخصيات منها مجموعة أطفال يمثلون الشخصيات التي ستواجه خلال عرض المحتوى تقدم تلميحات أو تذكير،

- الدرس: يبدأ بنشاط "أنظر وتعلم": والذي أظهرت نتائج تحليل محتوى هذا النشاط في جميع كتب سلسلة سنغافورية أنه يبدأ بطرح موضوع الدرس كقضية أو مسألة بصورة لفظية، ثم تترجم بنموذج تصويري، موضح بعبارات لفظية، ثم يتدرج لتمثيل المفهوم من الصورة اللفظية مروراً بالنموذج التمثيلي إلى الصورة الرمزية، ويختم النشاط بكتابة حل المسألة بصورة لفظية مجردة، مع وجود تلميحات جانبية تعمق المفهوم، ثم يعرض عدة أمثلة أخرى لنفس الفكرة بتوسع ويتمثيل تصويري آخر. ثم يطرح مجموعة من التمارين المتنوعة والمتدرجة في العمق والتي أظهرت نتائج التحليل أن عرضها قد انتهج ترتيباً محدداً يكاد يكون ثابت في معظم الفصول، ويطلق عليها غالباً دعنا نمرح وهذه التدريبات هي:

نشاط تشابك الأيدي: يهدف إلى تشجيع الطلاب على استخدام اليديويات في الأنشطة لتعزيز فهم المفاهيم الرياضية.

ونشاط اعرض وقل: والذي يهدف إلى مساعدة الطلاب على التواصل ومشاركة ما تعلموه مع زملائهم في الفصل.

ونشاط زوج شارك: والذي يهدف إلى توفير الفرص للطلاب للعمل في أزواج لتقييم تعلمهم، ونشاط افعل وتعلم: والذي يهدف إلى تمكين الطلاب من التأكد من فهمهم للمفاهيم خلال أداء التدريب.

ونشاط العب وتعلم: ويهدف إلى اشراك الطلاب في الألعاب والانشطة لتعزيز فهم تماسك المفاهيم الرياضية.

ونشاط تكنولوجيا المعلومات: والذي يهدف إلى تمكين الطلاب من اظهار ما تعلموه أو القيام به باستخدام منصة تقنية.

ونشاط تقييم ذاتي: يهدف إلى مساعدة الطلاب لتأمل وتقييم تعلمهم تقنياً ذاتياً ويقدم مع نهاية كل فصل.

وفي نهاية الفصل يعرض تدريب دعونا نفكر: والذي يهدف إلى تشجيع الطلاب على التفكير والاستدلال أثناء حلهم للأنشطة أو التدريبات.

كذلك يوجد نشاط مراجعة الذي يعرض إذا كان المحتوى الجديد يرتبط بخبرة سابقة تم التعرض لها في صف سابق، ولا يشترط وجود دروس مراجعة في بداية كل فصل، وقد يتكرر نشاط المراجعة في الفصل الواحد عدة مرات.

ومما سبق يتضح أن كلا الدولتين تعرض بداية كل فصل الفكرة الرئيسة للفصل، كما اتبع تنظيم محتواها الرياضي منهجية ثابتة.

حيث ظهر عناية الكتب السعودية بتقديم بعض الحقائق المتعلقة بالدراسات الاجتماعية، والعلوم، والتاريخ، أو مواضيع أخرى، ثم تتبعها بمتطلبات ترتبط بموضوع الدرس، كما توجه على العمل بصورة فردية، وبالرغم من وجود أنشطة هيا نلعب إلا أنها ليست متوفرة في جميع الفصول، ولا يوجد في موضوع الكسور في جميع الصفوف إلا نشاط واحد هيا نلعب عرض في درس تكافؤ الكسور.

أما كتب سنغافورة فيغلب على جميع الأنشطة التي تقدم لعرض الدرس ارتباطها المباشر بموقف حياتي بسيط مثل تجزئة شريط أو فطيرة، أو استخدام القياس للأطوال أو الكميات، كما توجه لتنوع طريقة العمل (زوجي، مجموعات، فردي)، حيث يغلب على العرض التعلم النشط واستخدام الرياضيات كوسيلة لاكتساب المهارات الحياتية، وبناء الثقة وتعزيز الاهتمام بالرياضيات مع العناية بجانب المرح في التعلم، والتركيز على تقديم المعرفة الرياضية المفاهيمية بطريقة مرئية من خلال تمثيلات تصويرية ذات اتصال بالعالم الواقعي تيسر للطلاب فهمها وتصورها، والتوسع التدريجي لتطوير وفهم المفاهيم للوصول إلى المستوى التجريدي وفقاً لنظرية برونر (المحسوس، شبه المحسوس، التجريدي).

كما أظهر التحليل عناية الكتب السعودية بعرض الدروس وفق نموذج تعليمي يشتمل إعادة التعليم والتعزيز، وبدائل التوسع والاثراء ونشاطات قبلية وتقييم مصاحب للتعليم، كذلك يحتوي كل درس على أسئلة بناء تساعد الطلاب على التأكد والتدرب

على أفكار الدرس ومفرداته. ويتضح مع التقدم في الصفوف على المستوى الرأسي تكرار للعديد من الدروس والمفردات والأنشطة مع بعض التوسع، ولم يظهر التعلم باللعب إلا في نشاط واحد فقط (هيا نلعب) في درس تكافؤ الكسور.

٢. ما موضوعات الكسور وتطبيقاتها التي تناولتها كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية، وسنغافورة؟ وكيف يتم تطويرها؟

تم تحليل كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في الدولتين رأسيًا لتحديد موضوعات الكسور وطريقة تنظيمها وتسلسلها لتحديد متى يتم تقديم الموضوعات وكيف يتم تطويرها والجدول التالي يوضح محتوى الكسور في الكتب وطريقة تتابعها.

جدول (٣) محتوى مفردات موضوع الكسور وتطبيقاتها عبر الصفوف في كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في السعودية وسنغافورة

الكتب السنغافورية	الكتب السعودية
<p>- الصف الثاني الفصل الدراسي الثاني عرض في فصل الكسور ثلاث دروس، هي: مقدمة عن الكسور عرض فيها الأجزاء المتطابقة من الكل، وكسور الوحدة، وتسمية الكسور، ودرس مقارنة وترتيب كسور الوحدة، ودرس مقارنة وترتيب الكسور المتشابهة</p> <p>- الصف الثالث الفصل الثاني عرض في فصل الكسور درس مراجعة، ودرس فهم الكسور المتكافئة، ودرس إيجاد الكسور المتكافئة لكسور معطى بسطها أو مقامها، ودرس تبسيط الكسور، ودرس مراجعة، ودرس مقارنة الكسور غير المتشابهة عرض فيه: مقارنة الكسور باستخدام قرص الكسور وخط الكسور، ومقارنة الكسور بتوقع النصف، ومقارنة الكسور باستخدام الكسور المتكافئة، ودرس مقارنة وترتيب الكسور.</p> <p>- الصف الرابع الفصل الدراسي الأول عرض في فصل الكسور: درس الأعداد المختلطة تناول فيه فهم الأعداد المختلطة؛ وتبسيط الأعداد المختلطة، ودرس الكسور غير الفعلية التي عرض فيها فهم الكسور غير الفعلية، ودرس تحويل الكسور الذي عرض فيه التحويل بين الأعداد المختلطة والكسور غير الفعلية، ودرس مراجعة مقارنة وترتيب الكسور، ودرس مقارنة وترتيب الكسور غير المتشابهة، ودرس كسر المجموعة، ثم درس مشكلات لفظية.</p> <p>- الصف الرابع الفصل الدراسي الثاني عرض في فصل الكسور العشرية درس تحويل الكسور إلى كسور عشرية، ودرس تحويل الكسور العشرية إلى كسور.</p> <p>- الصف الخامس الفصل الدراسي الأول عرض في فصل الكسور درس قسمة الأعداد الصحيحة ككسور، ودرس تحويل الكسر إلى كسر عشري. كذلك عرض في فصل النسبة درس أفكار للنسبة، ودرس النسب المتكافئة، ودرس إيجاد خارج القسمة المعطى من خارج قسمة آخر والنسبة، ودرس مشكلات لفظية تحوي</p>	<p>- الصف الأول الفصل الدراسي الثاني عرض الكسور كجزء من فصل الأشكال الهندسية والكسور، من خلال درس الأجزاء المتطابقة ودرس النصف، والثالث والربع</p> <p>- الصف الثاني الفصل الدراسي الثاني عرض في فصل الكسور موضوع كسور الوحدة، والكسور الدالة على أكثر من جزء، والكسور المساوية للواحد</p> <p>- الصف الثالث الفصل الدراسي الثاني في فصل الكسور عرض موضوع تمثيل الكسور، والكسور كأجزاء من كل، والكسور كأجزاء من مجموعة، والكسور المتكافئة، ومقارنة الكسور وتمثيلها.</p> <p>- في الصف الرابع الفصل الدراسي الثاني عرض الكسور من خلال فصلين كما يلي: في فصل الكسور الاعتيادية عرض تمثيل الكسور على خط الأعداد، والكسور المتكافئة، ومقارنة الكسور وترتيبها، والأعداد الكسرية وفي فصل الكسور العشرية عرض استكشاف الكسور الاعتيادية، والكسور العشرية، والأعداد الكسرية، والكسور العشرية، وتكافؤ الكسور الاعتيادية والعشرية، والكسور العشرية، والكسور الاعتيادية والأعداد الكسرية.</p> <p>- في الصف الخامس الفصل الدراسي الأول عرض في فصل الكسور الاعتيادية موضوع القسمة والكسور الاعتيادية، وتمثيل الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية بالنماذج، والكسور غير الفعلية، والأعداد الكسرية، ومقارنة الكسور الاعتيادية والأعداد الكسرية وتقريب الكسور</p> <p>- والصف الخامس الفصل الدراسي الثاني عرض في فصل القواسم والمضاعفات موضوع الكسور المتكافئة، وتبسيط الكسور، ومقارنة الكسور الاعتيادية</p> <p>- الصف السادس الفصل الدراسي الأول عرض في</p>

الكتب السنغافورية	الكتب السعودية
نسب خارج قسمتين - الصف الخامس الفصل الدراسي الثاني عرض في فصل المعدل درس إيجاد المعدل، ودرس إيجاد المبلغ الكلي، ودرس إيجاد عدد الوحدات، ودرس حل مشكلات لفظية وفي فصل النسبة المئوية عرض درس مراجعة، ودرس معنى النسبة المئوية، ودرس التحويل بين الكسور والكسور العشرية، ودرس النسبة المئوية، ودرس نسبة خارج القسمة، ودرس حل مشكلات لفظية، ودرس التخفيضات مستوى المتعة - الصف السادس الفصل الدراسي الأول عرض في فصل الكسور موضوع قسمة الكسر الفعلي على عدد كلي، وقسمة العدد الكلي على كسر فعلي، وقسمة كسر فعلي على كسر فعلي، وعرض مشكلات لفظية وفي فصل النسبة عرض موضوع النسبة والكسور	فصل الكسور الاعتيادية والكسور العشرية موضوع الكسور المتكافئة، وتبسيط الكسور الاعتيادية، والاعداد الكسرية والكسور غير الفعلية، ومقارنة الكسور الاعتيادية وترتيبها، وكتابة الكسور العشرية في صورة كسور اعتيادية، وكتابة الكسور الاعتيادية في صورة كسور عشرية. - الصف السادس الفصل الدراسي الثاني عرض في فصل العمليات على الكسور الاعتيادية موضوع النسبة والمعدل، وجداول النسب، والتناسب، وحل التناسب. وفي فصل النسبة المئوية والاحتمال عرض: تمثيل النسبة المئوية، والنسب المئوية والكسور الاعتيادية، والنسب المئوية والكسور العشرية

ويظهر من الجدول (٣) أن كلا الدولتين عرضتا نفس الموضوعات باختلاف الترتيب والتتابع داخل الصف وعبر الصفوف.

كما أظهر التحليل أن الكتب السعودية تتبع تكرار عرض المفاهيم الجديدة في صفين متتاليين أو أكثر، ويكون عرضه في الصف الأول غير دقيق وعام بينما العرض بالصف التالي يكون أكثر ارتباطاً بالمحتوى وأعمق، حيث تكرر عرض مفهوم كسور الوحدة في الصفين الأول والثاني في الفصل الدراسي الثاني، كما تكرر عرض الكسر الاعتيادي في الفصل الدراسي الثاني من الصفين الثاني والرابع، وكذلك تكرر عرض العدد الكسري والكسور غير الفعلية في الصف الرابع الفصل الدراسي الثاني والصف الخامس الفصل الدراسي الأول، ولوحظ عند عرض هذا الدرس أول مرة في الصف الرابع طرحه إجراءات للتحويل من عدد كسري إلى كسر غير فعلي، استخدم جمع الكسور في التحويل من عدد كسري لكسر غير فعلي، وكذلك استخدم القسمة في التحويل من كسور غير فعلية إلى عدد كسري، وعبر عن الكسور كعملية قسمة وهذه المفاهيم سيتم عرضها في مستويات تالية، وفي الصف الخامس الفصل الدراسي الأول أعاد عرض الاعداد الكسرية والكسور غير الفعلية والتحويل بينهما في درسين مستقلين بتوسع وأكثر دقة وارتباط، وفي الصف السادس الفصل الدراسي الأول أعاد عرض التحويل من صورة لأخرى بنفس الطرق السابقة، كما ارتبط كل درس وتكراره بعدد كبير من التمارين تحمل نفس الهدف المعروض سابقاً.

بينما في كتب سنغافورة لم يظهر أي تكرار للدروس أو الموضوعات إلا إذا كان المفهوم الجديد يتطلب إجراءات تم عرضها في درس سابق، وتعرض كتذكير في صفحة واحدة مستقلة بعنوان دعونا نراجع ولا يرتبط بها أي تمارين.

ومما سبق يظهر عرض المحتوى عبر الصفوف التوسع والعمق في تطوير المحتوى، ولتحديد التطوير في عرض المحتوى داخل الصف قامت الباحثة باحتساب عدد

الأمثلة المعروضة في كل درس من دروس محتوى الكسور في كتب الدولتين، بالإضافة إلى تحديد مواصفات كل مثال، حيث تم تحليل أمثلة دروس الكسور في كتب الدولتين لتحديد نوع المعرفة المرجوة (مفاهيمية أو إجرائية) ونوع النموذج التمثيلي إن وجد في المثال من حيث: نموذج التمثيل جزء- كل، أو نموذج مجموعة الأجزاء، حيث قامت الباحثة مع اثنتين^١ من أصحاب الخبرة بالتحليل بعد مناقشة طريقة التحليل، و أظهر التحليل وجود أمثلة تم عرضها بطريقتين (مفاهيمية وإجرائية) وتم الاتفاق على حساب جميع طرق عرض الأمثلة المفاهيمية والإجرائية. ومن ثم حساب النسبة المئوية لكل نوع من أنواع المعرفة المفاهيمية أو الإجرائية بالمعادلة التالية:

النسبة المئوية للمعرفة (المفاهيمية/ إجرائية) في عرض أمثلة الكسور = (عدد المعرفة المفاهيمية/ الإجرائية) ÷ (عدد الأمثلة) × 100،

كذلك تم حساب جميع التمثيلات الموجودة في محتوى الكسور في جميع الكتب عينة الدراسة، وتم تصنيفها بحسب نموذج التمثيل (جزء-كل، أو مجموعة أجزاء)، كما تم تحديد نسبتها وفق المعادلة التالية:

نسبة نماذج التمثيل (جزء-كل/ مجموعة أجزاء) = (عدد نموذج التمثيل ÷ عدد جميع التمثيلات) × 100

وقد أظهرت نتائج التحليل ما يلي:

- مواصفات أمثلة كتب سنغافورة:

جدول (٤) مواصفات أمثلة محتوى الكسور في كتب الرياضيات

بالمرحلة الابتدائية في سنغافورة

مجموع التمثيلات	نوع التمثيل			طريقة العرض		عدد الأمثلة	الصف	
	مجموعة أجزاء	جزء- كل			اجرائي			مفاهيمي
		خط الاعداد	شريط الكسور	قرص الكسور				
			4	18	3	25	الثاني	
			19	13	18	27	الثالث	
	9	9	10	16	22	26	الرابع	
	2		12	12	27	22	الخامس	
			12	8	3	21	السادس	
144	11	9	57	67	73	121	المجموع	
	8%	6%	40%	47%	44%	73%	النسبة المئوية	

يتضح من الجدول (٤) أن عدد الأمثلة المعروضة في محتوى الكسور في كتب سنغافورة بلغ (١٦٦) مثالا، منها (١٢١) مثالا تم عرضه لتحقيق المعرفة المفاهيمية، مقابل (٧٣) مثالا للمعرفة الإجرائية، مما يوضح عناية كتب سنغافورة الشديد

^١ قام بالتحليل مع الباحثة مشرفة رياضيات وتحمل درجة الماجستير في المناهج وطرق التدريس، وكذلك معلم رياضيات يحمل درجة الدكتوراه في المناهج وطرق التدريس

بالمعرفة المفاهيمية، وبالنظر إلى تتابع عرض الأمثلة عبر الصفوف يتضح العناية الشديدة في جميع الصفوف بعرض المعرفة المفاهيمية، ولكن يظهر الفارق الكبير في التركيز على الجانب المعرفي المفاهيمي في الصفوف (الثاني، والسادس) حيث الصف الثاني هو بداية عرض مفهوم الكسر وتمثيلاته، وفي الصف السادس عرض قسمة الكسور التي يعاني العديد من الطلاب بصعوبات في فهمها لذا ظهر التركيز على العرض وتعميق البناء المفاهيمي بصورة أكبر في الكتابين.

كما يتضح عناية الكتب السنغافورية بالتمثيلات، حيث بلغ عدد التمثيلات التصويرية المصاحبة للأمثلة (١٤٤) تمثيلاً، تركز معظمها استخدام نموذج التمثيل جزء-كل، والتي يمثلها قرص الكسور وشريط الكسور وخط الأعداد، حيث بلغ عدد تمثيلات نموذج (جزء-كل) (١٣٣) تمثيلاً، وكان استخدام نموذج قرص الكسور هو الأكثر يليه شريط الكسور ومن ثم خط الأعداد، كما بلغ التمثيل بمجموعة الأجزاء (11) تمثيلاً وبدء من الصف الرابع بعد عرض درس مجموعة أجزاء.

- مواصفات عرض الأمثلة في محتوى الكسور بكتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية.

الجدول (٥) يوضح مواصفات أمثلة الكسور:

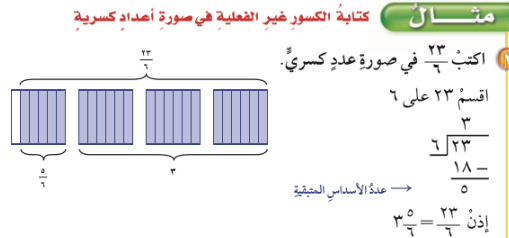
جدول (٥): مواصفات أمثلة محتوى الكسور في كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية

مجموع التمثيلات	نوع التمثيل				طريقة عرض الأمثلة		عدد الأمثلة	الصف
	مجموعة أجزاء	جزء- كل			اجرائي	مفاهيمي		
		خط الأعداد	شريط الكسور	قرص الكسور				
1	0	2	0	0	3	3	الأول	
1	0	1	4	2	3	7	الثاني	
6	0	3	1	1	8	9	الثالث	
9	10	8	3	8	20	25	الرابع	
1	6	11	6	22	23	40	الخامس	
9	4	10	3	47	24	65	السادس	
99	27	20	35	17	80	81	المجموع	
	27%	20%	35%	17%	54%	54%	النسبة المئوية	

يظهر من الجدول (٥) أن عدد الأمثلة في محتوى الكسور في الكتب السعودية بلغ (١٤٩) مثالاً، وأن هناك توازن في عرض المعرفة المفاهيمية والاجرائية، حيث بلغ عدد الأمثلة المعروضة لتحقيق المعرفة المفاهيمية (٨١) مثالاً، كما بلغ عدد الأمثلة الإجرائية (٨٠) مثالاً.

كما أظهر الجدول (٥) أن هناك تركيز في محتوى الصفوف (الأول، والثالث، والرابع) على عرض المعرفة المفاهيمية، أما في الصف السادس فظهر التركيز على

عرض المعرفة الإجرائية بصورة كبيرة، حيث عرض في الصف السادس العمليات الأربع على الكسور وغلب على العرض العناية الكبيرة بالمعرفة الإجرائية. وبالرغم مما أظهره التحليل من توازن في الجانب المعرفي والاجراني في عرض كتب المملكة العربية السعودية لمحتوى الكسور، إلا أن عرض المعرفة المفاهيمية ظهر مفكك حيث عرض في العديد من الأمثلة الجانب الإجرائي في يمين الصفحة وفي الجانب الأيسر يضع النموذج التمثيلي، دون أن تعليق، كذلك توجد عدة أمثلة في الكتب السعودية تم حلها بتطبيق القواعد الإجرائية، ولم يظهر العناية بالمعرفة المفاهيمية إلا عند التحقق من الحل، حيث عرض التمثيل التصويري الذي يوضح المفهوم أو العملية.



شكل (٢) مثال يوضح طريقة عرض المعرفة الرياضية في كتاب الرياضيات للصف السادس بالسعودية

كما أظهر التحليل أن عدد التمثيلات المصاحبة للأمثلة (٩٩) تمثيلاً، وكان التمثيل بنموذج جزء-كل هو الأكبر حيث بلغ (٧٢) تمثيلاً كان الأعلى فيها استخدام نموذج التمثيل بنموذج شريط الكسور، حيث بلغ (٣٥) تمثيلاً، تلاه التمثيل بنموذج مجموعة الأجزاء الذي احتل المرتبة الثانية في التمثيل وبلغ (٢٧) تمثيلاً ومن ثم التمثيل على خط الأعداد وأقلهم التمثيل بقرص الكسور.

وبمقارنة مواصفات الأمثلة في محتوى الكسور في كتب المملكة العربية السعودية وكتب سنغافورة يظهر لنا الجدول التالي ما يلي:

جدول (٦) مواصفات الأمثلة في محتوى الكسور في كتب المملكة العربية السعودية وكتب سنغافورة

مجموع التمثيلات	نوع التمثيل				نوع الامثلة				عدد الأمثلة	الدولة
	مجموع أجزاء	جزء- كل			المعرفة الإجرائية ونسبتها		المعرفة المفاهيمية ونسبتها			
		خط الاعداد	شريط الكسور	قرص الكسور	المعرفة الإجرائية ونسبتها	المعرفة المفاهيمية ونسبتها				
99	27	20	35	17	54%	80%	54%	81	149	السعودية
144	11	9	57	67	44%	73%	73%	121	166	سنغافورة

حيث يتضح أن الكتب السنغافورية عرضت عدد من الأمثلة أكثر من الأمثلة المعروضة في الكتب السعودية بزيادة قدرها (١٧) مثلاً، بالرغم من وجود دروس في الكتب السعودية لم تطرحها كتب سنغافورة كدروس التقدير، وكذلك دروس الاستكشاف، والدروس المكررة، وهذا يوضح عناية كتب سنغافورة على عرض أمثلة تفصيلية متعددة عند عرض المحتوى لتحقيق الفهم.

كما يتضح تركيز كتب سنغافورة على عرض المعرفة المفاهيمية في الأمثلة بصورة أكبر من الكتب السعودية، حيث بلغت نسبة المعرفة المفاهيمية في أمثلتها ٧٣%، بينما بلغت نسبة المعرفة المفاهيمية في أمثلة الكتب السعودية ٥٤%.

وقد صاحب عرض المعرفة المفاهيمية في كتب سنغافورة استخدام التمثيلات التصويرية المتعددة لتعميق الفهم، حيث ظهر زيادة في عرض التمثيلات المصاحبة للأمثلة في كتب سنغافورة عن تمثيلات الكتب السعودية ب (٤٤) تمثيلاً، وذلك لتعدد التمثيلات التي تستخدمها كتب سنغافورة في المثال الواحد وأيضاً في توضيح المفهوم أو العملية.

كما أظهر التحليل أن كلا الدولتين استخدمتا نموذج (الجزء- كل) بصورة أكبر من نموذج مجموعة الأجزاء، وقد ركزت كتب سنغافورة على نموذج القرص الدائري بينما ركزت الكتب السعودية على نموذج شريط الكسور، بالإضافة إلى عناية الكتب السعودية على استخدام نموذج مجموعة الأجزاء بصورة كبيرة عما استخدمته الكتب السنغافورية.

٢- كيف عرضت كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية

السعودية وسنغافورة موضوعات الكسور من حيث:

أ. مفهوم الكسر وتصنيفاته وتمثيلاته.

ب. تكافؤ وتبسيط الكسور ومقارنتها وترتيبها.

ج. عمليتي جمع وطرح الكسور.

د. عمليتي ضرب وقسمة الكسور.

للإجابة عن السؤال الثاني للدراسة تم استخدام منهج التحليل النوعي، وتم فيه تحليل عمودي لبنية محتوى موضوعات الكسور في جميع كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية بالدولتين، للكشف عن طريقة عرضه، ونوع التمثيلات المستخدمة في العرض، ومدى الترابط والعمق في العرض. وفيما يلي توضيح لكل جانب

أ. طريقة عرض كتب الرياضيات بالمملكة مفهوم الكسور وتصنيفاته وتمثيلاته.

أظهر التحليل أن كلا الدولتين قدمت موضوع الكسور بعد تعريف الطلاب بالأشكال الهندسية المستوية، والأعداد حتى (١٠٠) وجمع وطرح الأعداد.

كما أظهرت التحليل أن الكتب السعودية عرضت مقدمة الكسور خلال ثلاث الصفوف الأولى من المرحلة الابتدائية، حيث عرضت في الصف الأول في فصل الأشكال الهندسية (٣) دروس، هي الأجزاء المتطابقة والذي عرض كمدخل للكسور عرضته باستخدام نموذج تطابق مجموعة الأجزاء، ثم عرضت درس النصف، ودرس الثلث والرابع، وتم عرض نشاط واحد فقط في كل درس، وكما تم تمثيل درسي النصف والرابع والثلث بنموذج (جزء- كل) حيث مثل النصف باستخدام قرص دائري يمثل فطيرة، أما الثلث والرابع فقد مثلها بنموذج الشريط، وعبر عن مفهوم الكسر بالجزء لونه مخالف لبقية الأجزاء، كما أنه في درس النصف لم يذكر أو يعرف الكسر واكتفى بتمثيل تصويري واحد للمفهوم وقدمه كمعلومات لا تتجاوز (٣ اسطر) ومن ثم وجه الطلاب للتمارين لتحديد قيمة الجزء المحدد بلون مخالف أو تلوين أجزاء شكل معطى بحسب الرمز الذي يمثله، وفي درس الثلث والرابع ذكر في التلميح كلمة كسر لتوضيح قيمة العدد العلوي والسفلي للكسر، وكذلك في التمارين وجه الطلاب لإيجاد قيمة الكسر وهو لم يتطرق لهذا المفهوم ولم يعرفه، وفي الصف الثاني الفصل الدراسي الثاني عرف في نشاط استعد مفهوم الكسور وكسور الوحدة ولم يكتب الصيغة اللفظية للكسور واكتفى بالرموز، ثم عرض درس الكسور الدالة على أكثر من جزء بنفس الطريقة السابقة، والكسور المساوية للواحد، ولم يعرف الطلاب مفهوم البسط والمقام إلا في الصف الثالث، ولم يعرف الكسر إلا في الصف الثالث، وربطه بنموذج (جزء- كل)، و مجموعة أجزاء، حيث عرف الكسر بأنه عدد يمثل عدد الأجزاء المتطابقة من كل أو مجموعة أجزاء متطابقة.

أما كتب سنغافورة فقد عرضت مفهوم الكسور في الصف الثاني، وضحت في صفتين مفهوم الأجزاء المتطابقة، والنصف والرابع ومعنى الكسر وقيمه، وصيغته اللفظية، ورمزه، مع توضيح قيمة البسط والمقام في الكسر، ومعنى الوحدة المساوية لعدد الأجزاء بصورة مترابطة ومركزه وبطريقة مشوقة، مستخدمة نموذج (الجزء - الكل) باستخدام تمثيل تصويري لنموذج واقعي لفطير دائرية، توضح الوحدة (الكل)، ثم في صورة أخرى تمثيل للتجزئة المتطابقة، تارة إلى جزئيين وتارة إلى أربع أجزاء، للكل واجزائه نفس اللون، ليتضح معنى الأجزاء المتطابقة من الكل، وقد اتبعت كتب سنغافورة أسلوب ثابت في العرض لتعميق المفهوم، حيث تم تقديم نشاطين يعرضان بتوسع قضية أو مشكلة لفظية يتم تمثيلها بنموذج تصويري دقيق وواقعي يوضح مفهوم الكل كوحدة كاملة ومفهوم الجزء منه، مع إضافة تعبير رمزي يوضح مفهوم الجزء والكل كتابة ورمزاً، والتأكيد على دقة العبارات حيث استخدمت بشكل دائم عبارة الأجزاء المتطابقة من الكل (Equal parts of a whole)، مع توضيح مفهوم النصف والرابع بتكرار عبارة قطعة واحدة من قطعتين متطابقتين تسمى نصف واحد، أو قطعة واحدة من أربع قطع تسمى ربع واحد، مع وجود

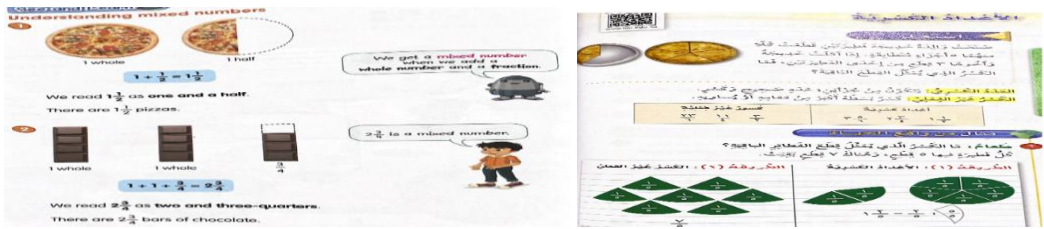
تلميحات جانبية تعمق المفهوم، واستخدام الألوان في الكتابات اللفظية للمفاهيم، ويختتم كل نشاط بصياغة لفظية مجردة تمثل الحل، ثم يتبعه بنشاط يعرض تمثيلات تصويرية أخرى واقعية لنفس الكسر، ولم يذكر اسم الكسر إلا في ختام الأنشطة حيث ذكر أن الرمز نصف وربع هي أمثلة للكسور. ثم عرض في المحور الثاني من الدرس مسميات ورموز كسور الوحدة وتناولها في صفحة واحدة مثل فيها كسور الوحدة إلى (١٢) جزء بتمثيل دائري محددًا قيمة كل تمثيل كتابة ورمزًا، ثم عرض تسمية الكسور الاعتيادية لأكثر من جزء مثلها بداية بقطاع دائري بهيئة فطيرة، ثم عرض مثال آخر واستخدم نموذج الشريط، ووضح مفهوم البسط والمقام.

أما مفهوم الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية فقد عرضته كلا الدولتين في الصف الرابع، وكلاهما استخدمتا نموذج (جزء- كل) لتمثيلهما، وقد بدأت الكتب السعودية بتعريف العدد الكسري والكسر غير الفعلي مباشرة، وقد عرضت الأعداد الكسرية كحاصل جمع عدد كلي مع كسر، ولم يكن الطلاب قد تعرضوا لجمع الكسور.

ثم عرضت مثال لمسألة حياتية تم تمثيلها بنموذج (الجزء- الكل) ناتجها عدد كسري، كما مثلت العدد الكسري كأجزاء منفصلة ليمثل الكسر غير الفعلي، وانتقلت مباشرة في المثال التالي إلى طريقة التحويل من عدد كسري إلى كسر غير فعلي والعكس، ووضحت طريقة التعبير عن نقطة على خط الأعداد بعدد كسري وكسر غير فعلي، وفي الصف الخامس الفصل الدراسي الأول أعادت عرض مفهوم العدد الكسري والكسور غير الفعلية والتحويل بينهما، واستخدمت في درس الأعداد الكسرية مثال يعبر عن قياس طول حوت واستخدم لتمثيل شريط الكسور، ولم يكن التمثيل يحقق مفهوم الكسور وتمثيلاتها.

وبمقارنة ذلك بعرض كتب سنغافورة نجد أنها عرضت الدرس بعنوان الأعداد المختلطة واستخدمت في العرض (٦) أمثلة متنوعة في تمثيلاتها التصويرية التي تحدد فطيرتين مضافًا لها أجزاء، ليتضح مفهوم العدد الكسري وقيمه وتمثيله، حيث عرضت الكتب السنغافورية موضوع الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية والتحويل بين الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية في درس واحد وفي صف واحد، واستخدمت (٤) أمثلة لعرضه، تناولت في أول مثالين التمثيل التصويري لتحويل الأجزاء إلى عدد الوحدات الكلية التي تمثلها وتحديد قيمتها، وذلك لتوضيح وفهم معنى الإجراءات المستخدمة، وعرضت في المثالين التاليين كإجراءات دون تمثيل ولم تستخدم طريقة القسمة المطولة.

وتظهر الصورة التالية طريقة عرض الكتب السعودية والكتب السنغافورية موضوع الأعداد الكسرية:



شكل (٣) عرض درس الأعداد الكسرية في كتاب الصف الرابع في السعودية وسنغافورة

كما تظهر الصورة التالية طريقة عرض الدولتين لموضوع تحويل عدد كسري لكسر غير فعلي والعكس:



شكل (٤) طريقة عرض التحويل من عدد كسري إلى كسر غير فعلي في كتاب الصف الرابع في كل من السعودية وسنغافورة

وصاحب تكرار الدروس عبر الصفوف في الكتب السعودية إلى زيادة عدد التمارين والتي لها نفس الفكرة، حيث بلغ عدد التمارين في موضوع الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية والتحويل بينهما فقط (١٠٤) تمريناً موزعة كما يلي: في الصف الرابع الفصل الدراسي الثاني بلغ عدد التمارين (٢٤) تمريناً تتطلب كتابة الكسر الذي يمثله النموذج التصويري المعطى بكسور غير فعلية وعدد كسري، والتعبير عن قيمة نقاط معطاة على خط الأعداد، وتحويل كسور رمزية من صورة إلى أخرى، و(٥) مسائل حياتية، وفي الصف الخامس عرض (١٢) تمريناً يتطلب تحويل رموز كسرية غير فعلية إلى أعداد كسرية، و(١٠) تمارين مسائل من واقع الحياة، و (٣٦) تمريناً يتطلب تحويل عدد كسري لكسر غير فعلي، (٧) تمارين مسائل حياتية، وفي الصف السادس عرض (٢٣) تمريناً رمزياً يتطلب تحويل من صورة إلى أخرى، و(١٢) تمريناً مسائل حياتية.

أما في الكتب السنغافورية فقد بلغ عدد التمارين المعروضة في درس الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية والتحويل بينهما والتي عرضت في درس واحد فقط (١٧) تمريناً، منها (٨) تمارين تتطلب تمثيل كسور معطاة باستخدام قرص الكسور، و(٤) تمارين لتحويل أعداد كسرية إلى كسور غير فعلية، و(٢) تمرين يتطلب تمثيل نقاط

على خط الأعداد ككسور غير فعلية، (٦) تمارين تتطلب تحويل من أعداد كسرية إلى كسور غير فعلية والعكس.

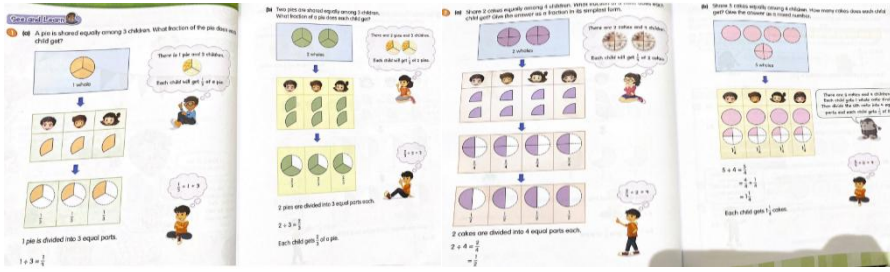
وهذا يوضح كثرة عدد التمارين المباشرة في الكتب السعودية التي تتطلب عملية التحويل باستخدام إجراءات التحويل الحسابية من جمع كسور وقسمتها في الكتب السعودية مقابل تركيز كتب سنغافورة على التأكد من فهم الطالب للموضوع من خلال التمثيل المباشر وفي مجموعات باستخدام نماذج الكسور والتطبيق للإجراءات دون ملل.

وقد قدمت كلا الدولتين توضيح للمعنى المفاهيمي للكسور وقسمة الأعداد الطبيعية في الصف الخامس، حيث وضحت كلا الدولتين مفهوم الكسر كقسمة عددين كليين، مع اختلاف طريقة العرض، حيث عرضت الكتب السعودية (٣) أمثلة في صفحتين فقط، عرضت فيها مفهوم القسمة وكسور الوحدة، والكسر الفعلي، والكسور غير الفعلية وقيمتها كعدد كسري، وربطها بتمثيل يظهر الناتج والطريقة بصورة كلية دون تفصيل. كما هو موضح بالصورة:



شكل (٥) طريقة عرض مفهوم القسمة والكسور في كتاب الصف الخامس السعودي

أما في كتب سنغافورة فقد عرضت (٥) أمثلة في (٥) صفحات، تدرجت في القسمة ليصل بالطالب الى عمق الفهم لمفهوم القسمة وصورة الكسر الممثل له، بدء بقسمة كل واحد على (٣)، ثم وحدتين يتم قسمتها على (٣)، و (٤)، وخمس وحدات يتم قسمتها على (٤) ليتضح معنى القسمة وقيمتها بجميع أنواع الكسور وتمثيلاتها، باستخدام التمثيل التصويري لكل من المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة، بما يوضح البسط، والمقام، والكسر، بالإضافة الى استخدام الصورة الرمزية للعملية، وكتابة العبارة اللفظية للناتج، كما هو ممثل بالصورة التالية:



شكل (٦) طريقة عرض مفهوم القسمة والكسور في كتاب الصف الخامس بسنغافورة

وقدمت كتب سنغافورة هذا المفهوم لتربطه بدرس تحويل الكسور إلى كسور عشرية، بينما الكتب السعودية فقد قدمته لتعرض بعده درس الكسور غير الفعلية وتحويلها لأعداد كسرية.

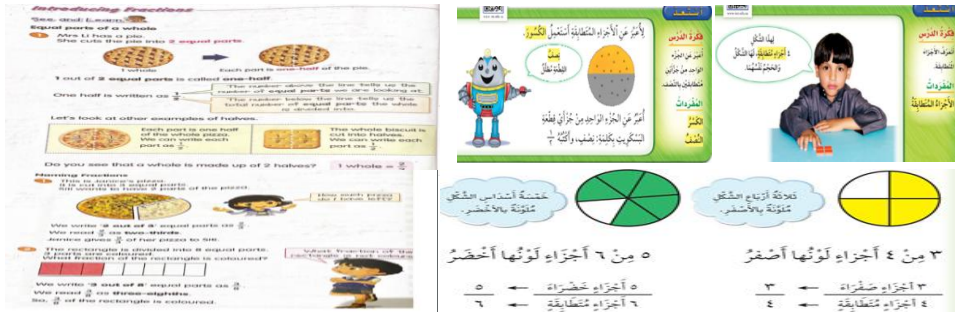
وبالرغم مما أظهره التحليل من استخدام كلا الدولتين التمثيل التصوير لتوضيح محتوى الكسور، إلا أن الكتب السعودية أفردت للتمثيل دروس مستقلة وأنشطة استكشاف في الصف الثالث والرابع والخامس، حيث عرضت الكتب السعودية الكسور كجزء من مجموعة كدرس مستقل وبصورة سطحية، حيث عرضت في الصف الثاني، والثالث درس مستقل لتمثيل الكسور كجزء من كل، وكان تكرار لما تعلمه الطلاب داخل محتوى دروس الكسور السابقة، كما عرض بعده درس الكسور كجزء من مجموعته وكان إعادة لما تم طرحه في الصف الثاني، ولم يظهر له أي ارتباط ببقية المواضيع.

أما الكتب السنغافورية فقد عرضت الكسور وتمثيلاتها في سياق عرض الدروس، ولم تخصص دروس مستقلة، ولم تتطرق للتعبير عن الكسور كجزء من مجموعة إلا في الصف الرابع بعد معرفة الطلاب للكسور وتصنيفاتها ومقارنتها وترتيبها، حيث تناولته كدرس مسبق ليكون ذا معنى في دروس ضرب وقسمة الكسور، وتناولت عرضه بالتدرج بدأ بإيجاد قيمة الكسر الممثل بجزء من مجموعة في شكل معطى، وصولاً لإيجاد عدد الأجزاء من مجموعة التي يمثلها كسراً معطى، ليتضح طريقة تجزئة المجموعة لأجزاء ممتاثلة.

كما لم تعرض الكتب السنغافورية تمثيل الكسور باستخدام خط الأعداد إلا في الصف الثالث وعرضته ضمناً داخل محتوى درس تكافؤ الكسور حيث أظهرت في عرض الدرس تمثيل تصويري لتكافؤ الكسور بتمثيلات متعددة ظهر فيه عمق المفهوم وترابطه وتنوع تمثيلاتها، أما الكتب السعودية فقد عرضت تمثيل الكسور بخط الأعداد كدرس مستقل في الصف الرابع. وعرضت في الصف الثالث (١٠) تمارين تتطلب قياس أطوال وتجزئتها لتمثيل نماذج الكسور باستخدام الشريط، وهذه التمارين تنهك الطلاب بإجراءات أكبر من الناتج المرغوب، بينما صممت كتب سنغافورة التدريبات

والتمارين في التمثيل باستخدام طريقة طي الورق المربع بحسب قيمة الكسر ليوضح الأجزاء وتمثيلاتها وبما يحقق الهدف مع جانب المتعة والمرح وبإجراءات بسيطة. ومما سبق أظهر التحليل أن كلا الدولتين استخدمتا بداية عبارة جزء من كل للتعبير عن الكسر مع التوضيح بتمثيل قطاع دائري، ولم تذكر كلمة الكسر، إلا بعد التعرف على نصف وربع الأجزاء المتطابقة من كل ورمزهما، ويظهر عناية كتب سنغافورة على استخدام التمثيلات التصويرية الواقعية في بداية عرض مفهوم الكسور مع توضيح صورة الكل على حده ثم أجزاءه، واكتفاء الكتب السعودية بنموذج واحد يمثل الكل بأجزائه.

كما أظهر التحليل عناية كتب سنغافورة على تكامل وحدة الموضوع وعمق الفكرة داخل كل فصل مع التدرج في التوسع، حيث عرضت بالصف الثاني في (٦) صفحات موضوع (الأجزاء المتطابقة، والنصف، والثالث والرابع، وكسور الوحدة، والكسور المساوية للواحد، والكسور الدالة لأكثر من جزء) في درس واحد تناولت فيه مفهوم الأجزاء المتطابقة من الكل مستخدمة جزئين متطابقين وأربع أجزاء ومنها وضحت مفهوم الكسر والنصف والرابع، ومفهوم الكل المساوي للوحدة، ولم يظهر هذا الترابط في الكتب السعودية حيث عرضت نفس المواضيع في (٦) دروس مستقلة في (١٥) صفحة موزعة على صفين دراسيين كما يلي: (٦) صفحات في الصف الأول عرضت فيها (٣) دروس مستقلة، و(٩) صفحات في الصف الثاني، قدمت فيها (٣) دروس أخرى، والصورة التالية توضح عرض الكتب السعودية وكتب سنغافورة لموضوع الأجزاء المتطابقة والنصف، وكذلك الكسور الاعتيادية وتسميتها:



شكل (٧) عرض مفهوم الكسر في كتاب الصف الأول في السعودية وكتب سنغافورة للصف الثاني

كما ظهر عدم مراعاة الكتب السعودية لتتابع وتسلسل الخبرات السابقة، حيث عرف العدد الكسري في الصف الرابع بأنه عدد يتكون من جزأين عدد صحيح وكسر،

والصواب انه يتكون من (one whole – كل واحد) وكسر، وهو ما ذكرته الكتب السنغافورية كدقة في وصف الكسر، حتى يتحقق استيعاب المفاهيم، ويتشكل صورة المفهوم.

ونظراً لتجزئة الدروس في الكتب السعودية فقد زاد معها عدد التمارين المعروضة حيث بلغ عدد التمارين المصاحبة للدروس التي توضح مفهوم الكسر وكسور الوحدة والكسور الاعتيادية (٧٩) تمريناً موزعة كما يلي: (٣٢) تمريناً في الصف الأول، و (٤٧) تمريناً في الصف الثاني، ويغلب عليها تلوين الجزء الذي يمثل الكسر، واستعمال نماذج الكسور لتمثيل الكسر المظلل في الشكل المعطى، كما بلغ عدد التمارين المعروضة في درس الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية في الكتب السعودية (١٠٤) تمرينات موزعة بين الصفوف الرابع والخامس والسادس أما في سنغافورة فقد بلغ عدد التمارين المصاحبة لدرس فهم الكسور (٩) تمارين (٦) منها تعتمد على اللعب مع المجموعة باستخدام طي ورق مربع وتظليل الكسر المطلوب، واستخدام قرص الكسور لتمثيل الكسور المحددة لهم في بطاقات وكتابتها رمزاً مع المجموعة، تحديد الكسر الممثل بنموذج معطى، كما بلغ عدد التمارين المعروضة في درس الاعداد الكسرية والكسور غير الفعلية والتحويل بينهما (١٧) تمريناً.

ويتضح مما سبق كثرة عدد التمارين المباشرة في الدرس الواحد في الكتب السعودية التي تتطلب عملية التحويل باستخدام إجراءات حسابية، وجميعها تحل بصورة فردية، مع وجود بعض التمارين تتطلب بذل جهد أعلى من قدرة الطالب مثل توجيه طلاب الصف الأول في درس الأجزاء المتطابقة إلى رسم خطوط لتقسيم شكل إلى أجزاء متطابقة (جزأين وثلاثة أجزاء) وهو لم يتطرق لطريقة التجزئة، وقد يحصل على أجزاء ليست متطابقة بما يخالف هدف الدرس. كذلك ظهر في بعض التمارين عدم دقة تمثيلاتها التصويرية حيث عرض في أحد تمارين درس الأجزاء المتطابقة صفحة ١٢٩ بالصف الأول شكل مجزأ ولم يكن متماثل، وكذلك في درس الثلث والربع عرض في تمرين (٧) صفحة ١٣٣ نموذجاً تصويرياً ولم يتضح الأجزاء المقسمة من الكل ليتمكن الطالب من تحديد قيمة الكسر بدقة.

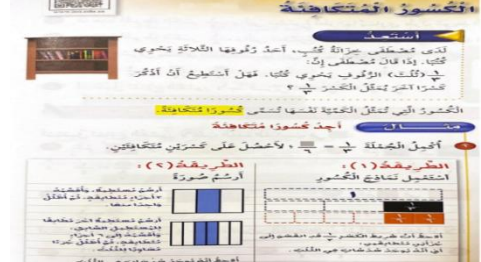
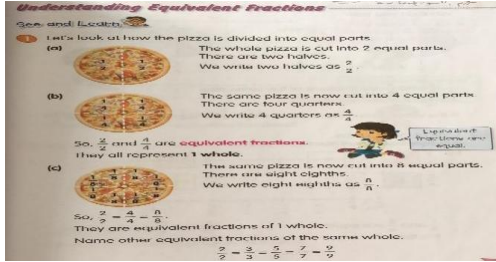


شكل (٨) تمارين غير مناسبة في كتاب الصف الأول بالسعودية

وبمقارنة ذلك بكتب سنغافورة نجد أن كتب سنغافورة كان هناك تركيز أكبر على فهم الطالب للموضوع من خلال التمثيل المباشر وفي مجموعات باستخدام نماذج الكسور والتطبيق للإجراءات وممارسة جانب اللعب والمرح مع المجموعات مع التركيز على تعميق المعنى.

ب- طريقة عرض الكتب السعودية وسنغافورة تكافؤ وتبسيط الكسور ومقارنتها وترتيبها.

أظهر التحليل أن كلا الدولتين قدمتا تكافؤ الكسور بداية في الصف الثالث الفصل الدراسي الثاني، وقد قدمته كتب سنغافورة في الصف الثالث فقط مستخدمة (١٠) أمثلة عرضتها في (٨) صفحات، أما الكتب السعودية فقد عرضت الموضوع في أربع صفوف هي الصف الثالث والرابع والخامس والسادس مستخدمة (١٣) مثلاً منها (٤) مكررة، عرضتها في (١٨) صفحة.



شكل (٩) طريقة عرض الكسور المتكافئة في كتاب الصف الثالث في كل من السعودية وسنغافورة

وأظهر التحليل تركيز الكتب السنغافورية على تبسيط المفهوم واستيعابه، حيث عرضت فطيرة مقسمة إلى أجزاء متطابقة وعبرت عنها بالكسور المساوية للواحد، ليوضح المفهوم، ثم وضحت طريقة إيجاد الكسور المكافئة لكسر باستخدام التمثيل بقرص الكسور وشريط الكسور وخط الأعداد، وطريقة إيجاد كسور مكافئة لكسر معطى بسطه أو مقامه باستخدام الضرب. ولم تعرض القسمة إلا في درس تبسيط الكسور لارتباطه به. أما الكتب السعودية فقد ركزت على الإجراءات، حيث عرضت في الصف الثالث نشاط استكشاف لتمثيل الكسر المكافئ للنصف باستخدام نموذج شريط الكسور، وعرفت في الدرس مفهوم التكافؤ ثم عرضت نشاط واحد فقط يوضح طريقة إيجاد قيمة البسط لكسر معلوم مقامه ومكافئ لكسر معطى باستخدام التمثيل بنماذج شريط الكسور.

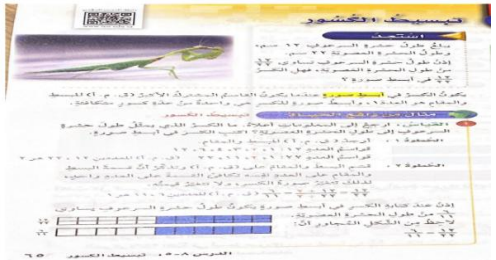
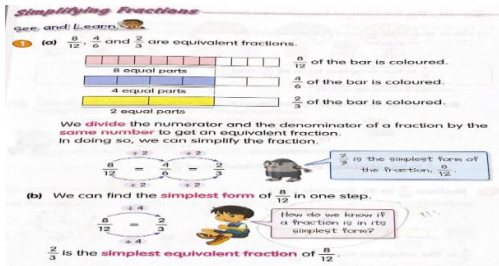
وتابعت الكتب السعودية العرض، حيث أعادت في الصف الرابع طريقة تمثيل الكسور المتكافئة باستخدام نموذج شريط الكسور وهو تكرار لما عرض في الصف

السابق وباستخدام خط الأعداد، وعرضت طريقة إيجاد عدد من الكسور المكافئة لكسر باستخدام طريقة الضرب والقسمة، وكذلك بالتمثيل بنموذج شريط الكسور وخط الأعداد، وفي الصف الخامس أعادت ما قدمته من خطوات الضرب لإيجاد كسور متكافئة، وفي الصف السادس عرضت طريقة تمثيل الكسور المتكافئة باستخدام الإضافة المكررة لقطع العد، وبطريقة التجزئة الى مجموعات وهو التبسيط. ويتضح من التحليل تركيز الكتب السعودية على الجانب الإجرائي للموضوع، والتكرار في الطرح، والتجزئة في الموضوع، كما أنها لم تراعى الترابط في طرح الموضوعات، حيث عرضت في الصف الثالث درس التكافؤ ثم عرضت بعده مقارنة الكسور وترتيبها باستخدام ملاحظة ومقارنة تمثيل كل كسر كأجزاء من قرص الكسور، ولم يتم التطرق لاستخدام التكافؤ، أما الكتب السنغافورية فقد قدمت موضوع تكافؤ الكسور قبل درس مقارنة وترتيب وجمع وطرح الكسور غير المتشابهة والتي تتطلب معرفة التكافؤ، وهذا يوضح مدى التماسك والترابط في العرض والتركيز في تتابع الموضوع دون تكرار، كذلك عنايتها بعمق استيعاب المفهوم ووضوحه في أذهان الطلاب، وكذلك دقتها في تحديد الإجراءات.

وقد بلغ عدد التمارين لموضوع التكافؤ في الكتب السعودية (١١٤) تمريناً، منها (٢١) مسألة حياتية، تركز معظمها على الجانب الإجرائي، ويتطلب جزء منها استعمال النماذج لتمثيل كسور مكافئة، وجميعها تتطلب أداء فردي، ويتم عرض أنشطة بجانب مرح جماعي سوى في درس تكافؤ الكسور في الصف الخامس قدم نشاط مرح (هيا بنا نلعب) يتطلب توزيع بطاقات على مجموعات وتحديد الكسور المتكافئة، أما الكتب السنغافورية فقد بلغ عدد تمارينها (١٤) تمريناً تنوعت بين تمارين في مجموعات وزوجية وفردية، وفي كل درس هناك تمارين تتطلب اللعب بالبطاقات وتحديد كسور متكافئة أو استخدام قرص الكسور، وهناك مسائل حياتية وعددها قليلة ومركزة. وبالرغم من قلة التمارين في كتب سنغافورة إلا أن أغلبها تتطلب ممارسات أنشطة في مجموعات يتم فيها التعلم باللعب والمناقشة مع الزملاء. كذلك أظهر التحليل أن كلا الدولتين قدمت موضوع تبسيط الكسور بعد درس الكسور المتكافئة، حيث عرضته الكتب السعودية في الصفين الخامس والسادس، باستخدام (٦) أمثلة عرضتها في (٨) صفحات، وبلغ عدد التمارين (٦٧) تمريناً منها (١٣) تمريناً لمسائل حياتية، وبدأ عرضه في الصف الخامس بالتعريف، ثم عرض طريقة التبسيط بقسمة البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما وأعاد العرض في الصف السادس.

أما في الكتب السنغافورية فقد عرضته في الصف الثالث في درس واحد باستخدام (٥) أمثلة عرضتها في (٣) صفحات، وبلغ عدد التمارين (١٧) تمريناً يتطلب حلها بنشاط زواج شارك.

ويتضح من العرض مدى عناية الكتب السنغافورية على تحقيق الاستيعاب المفاهيمي حيث عرضت المفهوم بداية بالتمثيل التصويري بشريط الكسور ومن مدخل التكافؤ يلاحظ الطلاب التكافؤ والتبسيط ومعناه، ثم استخدم التعبير الكتابي لتوضيح الاجراء وأعاد الحل باستخدام الرموز هذا التدرج يوضح المفهوم ويعمق استيعابه لدى الطلاب، بينما في الكتب السعودية يتضح العناية بالإجراءات حيث قدم الإجراءات واستخدم التمثيل للتحقق وليس للفهم، كما يظهر التكرار وكثرة التمارين التي تحمل نفس الهدف.



شكل (١٠) طريقة عرض تبسيط الكسور في كتاب الصف الخامس بالسعودية وكتاب الصف الثالث في سنغافورة

كما أظهر تحليل محتوى مقارنة الكسور وترتيبها في كتب الدولتين إلى أن كلا الدولتين عرضتا مقارنة الكسور في الصف الثاني. وقد عرضته الكتب السعودية في (٦) مستويات، بينما في سنغافورة عرض في (٣) صفوف. وبدأت كلا الدولتين عرض المقارنة في الصف الثاني باستخدام المقارنة بالملاحظة بدء بمقارنة كسور الوحدة، واستخدمت الكتب السنغافورية قرص الكسور لمقارنة كسور الوحدة، وقارنت الأجزاء بموقعهما من الكل، وأيضاً بمقارنة الأجزاء ببعضهما بصورة أكثر واقعية، كما وضعت تلميح يوجه لطريقة المقارنة بالنظر لقيمة المقام وعلاقته بقيمة الكسر، بينما اكتفت الكتب السعودية بمقارنة موقع الجزئين في الكل مستخدمة التمثيل بنموذج شريط الكسور. واختلف العرض في بقية المستويات بين الدولتين، حيث عرضت الكتب السنغافورية في الصفين الثاني والثالث مقارنة وترتيب الكسور الفعلية، وخصصت الصف الثاني لمقارنة كسور الوحدة، والكسور الفعلية المتشابهة وفي الصف الثالث قارن الكسور الفعلية غير المتشابهة والتي مقام أحدها مضاعف للأخر، وفي الصف الرابع عرض مقارنة وترتيب الكسور غير الفعلية والأعداد الكسرية.

أما الكتب السعودية فقد عرضت مقارنة الكسور خلال (٦) مستويات هي الصف الثاني، والصف الثالث، والرابع، والصف الخامس الجزئيين الأول والثاني، وفي الصف السادس حيث ظهر فيها التكرار في العرض والتجزئة للمعلومات، حيث عرض في الصفين الثاني والثالث مقارنة وترتيب الكسور الفعلية (كسور الوحدة والكسور المتشابهة)، وفي الصف الثالث والرابع والخامس الفصل الدراسي الثاني قارن الكسور الفعلية المتشابهة وغير المتشابهة وترتيبها، وفي الصف الخامس والسادس الفصل الأول قارن الكسور الاعتيادية المتشابهة (الفعلية وغير الفعلية) والأعداد الكسرية التي لها نفس مقام الكسر، وأضاف في الصف السادس الترتيب.



شكل (١١) طريقة عرض مقارنة الكسور في كتاب الصف الثاني في كل من السعودية وسنغافورة

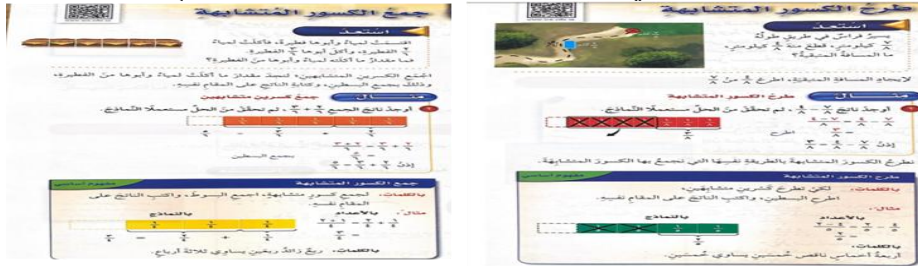
ويتضح مما سبق عناية كتب سنغافورة بالتدرج في العرض والارتباط بطبيعة موضوعات الفصل، كذلك بدء العرض بالمحسوسات وصولاً للعمليات الإجرائية لتحقيق الفهم والاستيعاب للمفاهيم الرياضية وبما يمكن الطلاب من تحقيق العمق والتركيز.

أما الكتب السعودية فيتضح التكرار والتجزئة في عرض المعلومات وعدم التتابع في توسع المعلومات، حيث عرض مقارنة الكسور الاعتيادية والأعداد الكسرية في الصف الخامس الفصل الدراسي الأول، وعرض في الفصل الدراسي الثاني مقارنة الكسور الفعلية وغير الفعلية ولم يتطرق للأعداد الكسرية، وأعاد في الصف السادس الدرس كاملاً ليضيف ترتيب العمليات، هذا النشر والتجزئة والتكرار للموضوعات خلال (٦) مستويات، أضعف التركيز في متابعة ترابط الموضوعات وعمقها وزاد من جهد الطلاب في حل التمارين المصاحبة لكل درس، حيث بلغ عدد تمارين موضوع مقارنة الكسور وترتيبها في الكتب السعودية (١٢٦) تمريناً، بينما بلغت التمارين في كتب سنغافورة (٣٣) تمريناً يتطلب حل نصفها بأنشطة جماعية وزوجية من خلال اللعب.

ج - طريقة عرض كتب الرياضيات في المملكة العربية السعودية وسنغافورة عملتي جمع وطرح الكسور

عرضت الكتب السعودية عملتي الجمع والطرح في الصفين الخامس والسادس، وبلغ العدد الإجمالي للصفحات التي تناولت جمع وطرح الكسور بأنواعها ٣٩ صفحة مقسمة كما يلي: (٢١) صفحة في الصف الخامس، موزعة على ٤ دروس (١١) صفحة لجمع الكسور المتشابهة وغير المتشابهة بحيث عرض كل نوع في درس مستقل، و(١٠) صفحات للطرح، وفي الصف السادس عرض (٣) دروس تتعلق بجمع وطرح جميع أنواع الكسور الاعتيادية في (١٨) صفحة، وعرض في كل صفحة من مثاليين إلى ثلاث أمثلة بالصفحة الواحدة ودرسان منهم مراجعة على ما سبق بالصف الخامس.

وبدأ العرض في الصف الخامس بدرس استكشاف لجمع الكسور المتشابهة وأعطى تعريف لها ومثال من واقع الحياة واستخدم نموذج شريط الكسور للوصول من خلاله إلى القاعدة، وعرض في الدرس (٣) أمثلة، بدأها بمثال من واقع الحياة لجمع أو طرح كسرين مثلها برسم واحد حدد فيه العملية والنتائج، كما عرض العملية بصورة رمزية، ووضع القاعدة لجمع أو طرح الكسور المتشابهة، ويتضح في العرض التركيز على العرض الاجرائي للعملية، والتقليل من التمثيل التصويري.



شكل (١٢) عرض الكتب السعودية لجمع الكسور المتشابهة
في الصفين الخامس والسادس

وفي درس جمع الكسور وطرحها ذات المقامات غير المتشابهة، بدأ بدرس استكشاف وعرض كسرين غير متشابهين، وأجرى (الجمع أو الطرح) باستخدام التخمين بنماذج الكسور المكافئة للنتائج، وحين عرض الدرس اكتفى بكتابة القاعدة بصورة إجرائية دون استخدام النماذج. وقدم للدرس (٧٥) تمريناً، منها (٣٣) لعملية الجمع، و(٤٢) للطرح.

وفي الصف السادس أعاد عرض الموضوع بتركيز ودقة أكبر، حيث تناول الجمع والطرح معاً واستخدم النماذج، وعرض الدرس بطريقتين باستخدام نموذج شريط الكسور والطريقة الإجرائية، كما عرض جمع وطرح الأعداد الكسرية مستخدماً

نموذج (الأطباق الورقية) لتوضيح جمع الأعداد الكسرية ثم عرض الطريقة الإجرائية باستخدام مثالين للجمع ومثالين للطرح ولم يفرق بين طبيعة الأعداد الكسرية ثم مثال على الطرح من واقع الحياة.

أما في كتب سنغافورة فقد عرضت عملية الجمع والطرح في الصف الثاني، والثالث، والرابع، والخامس، وبلغ العدد الإجمالي للصفحات التي تتناول جمع وطرح الكسور بأنواعها ٣٥ صفحة موزعة كما يلي: (٥) صفحات بالصف الثاني تتناول عملية جمع وطرح الكسور المتشابهة عرضها في درس واحد، وفي الصف الثالث فقد عرض درسا لجمع وطرح الكسور غير المتشابهة التي مقام أحدها مضاعف للآخر، وبلغ عدد الصفحات (٩) صفحات (٥) منها لدرس الجمع و٤ صفحات لدرس الطرح. وفي الصف الرابع عرض جمع وطرح الكسور غير المتشابهة، وبلغ عدد الصفحات (١٣) صفحة موزعة على درسين أحدهما تناول العمليتين معا والآخر تناول مسائل حياتية على العمليتين أيضا.

وبالصف الخامس عرض جمع وطرح الأعداد الكسرية، وبلغ عدد الصفحات (٨) صفحات موزعة على درسين أحدهما مراجعة وكلاهما تناول العمليتين معا. كما بلغ عدد الامثلة في الصفحة الواحدة بالصفين الثاني والثالث من ١ إلى ٢ وفي بقية الصفوف عرض من ٢ إلى ٣ من الامثلة في الصفحة الواحدة.

وبدء عرض عملية الجمع في الصف الثاني بطرح مسألة حياتية مثلها بنموذج تصويري باستخدام نموذج من واقع الحياة (أقراص الكسور) على صورة بيتزا مقسمة الى قطع متساوية، كما مثل العملية بتحديد الأجزاء لكل شخص، وكذلك مثل الناتج، العملية بالرموز وعبر عنها بصياغة لفظية توضح طريقة قراءتها، وفي الطرح استخدم بداية مثال يتطلب طرح جزء من كل ليكون المفهوم سهل في تصويره ومستخدما نفس طريقة عرض عملية الجمع، ثم عرض في المثال الثاني طرح كسرين متشابهين، مثل فيها الكسر الأكبر، مع فصل الجزء المطروح، ومثل الناتج ثم عبر عن العملية وناتجها بصورة رمزية، ووضح طريقة قراءتها كتابة. وعرض للدرسين (٧) تمارين موزعة كما يلي: (٤) لتمثيل عملية بصورة رمزية على قرص الكسور وعرض الناتج. و (٣) مسائل لفظية، والصورة التالية توضح طريقة العرض

Addition and Subtraction of Like Fractions

Addition

Janice takes $\frac{2}{6}$ of a pizza.
Siti takes $\frac{2}{6}$ of the same pizza.
What fraction of the pizza have they taken altogether?

We write: $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$
We read: **two-sixths plus two-sixths equals four-sixths.**
They have taken $\frac{4}{6}$ of the pizza altogether.

Subtraction

Ravi cuts a pizza into 10 equal parts.
He eats $\frac{4}{10}$ of the pizza.
What fraction of the pizza is left?

We write: $\frac{10}{10} - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$
We read: **ten-tenths minus four-tenths equals six-tenths.**

Subtract $\frac{4}{9}$ from $\frac{8}{9}$.

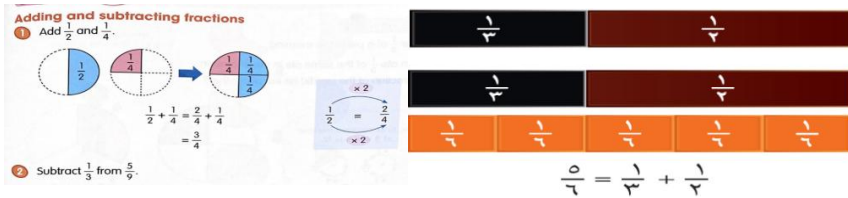
We write: $\frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$
We read: **eight-ninths minus four-ninths equals four-ninths.**

Subtract $\frac{3}{11}$ from 1 whole.

We write: $\frac{11}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$
We read: **eleven-elevenths minus three-elevenths equals eight-elevenths.**

شكل (١٣) طريقة عرض جمع الكسور المتشابهة في كتاب الصف الثاني بسنغافورة

وفي الصف الثالث عرض جمع وطرح الكسور التي مقام أحدهما من مضاعفات الآخر وبدأ بالجمع وبدأ بدرس مراجعة لما سبق، ثم عرض الدرس باستخدام (٤) أمثلة مثلها بنموذج جزء-كل بقرص الكسور وشريط الكسور، مع كتابة القاعدة في مربع حوار مستخدماً الشخصيات الكرتونية للتوضيح، مبتدئاً بتوضيح معنى العملية باستخدام التمثيلات التصويرية والتعابير الرمزية، ثم يضع القاعدة الإجرائية، ثم انتقل للطرح مستخدماً نفس طريقة العرض، وهكذا تدرج في العرض في بقية الصفوف. ومما سبق يتضح عناية الكتب السنغافورية بالترابط والتكامل في عرضها للمواضيع في كل فصل، مع إعطاء الطلاب الفرصة للتدرج في اكتساب المعرفة، كذلك العناية بترتيب النماذج بصورة دقيقة ومركزة، وهذا ظهر في نمط العرض في معظم الدروس، وذلك بالبداية بمثال من واقع الحياة ثم تسجيل القاعدة بمربع حوار وكتابة جملة جانبية للتوضيح، بينما الكتب السعودية ركزت على العملية لأنواع متعددة من الكسور ظهر فيها التكرار، كما جمعت عدة دروس تتطلب إجراءات متعددة في نفس الفصل من جمع وطرح كسور متشابهة وغير متشابهة، كما يتضح قلة استخدام التمثيلات في عرض الكتب السعودية، والتركيز على الحل بطريقة إجرائية في معظم الأمثلة، بينما اعتمد العرض في الكتب السنغافورية على استخدام نموذج قرص الكسور على صورة فطيرة في بداية كل درس ثم استخدام نموذج شريط الكسور في جميع الأمثلة.



شكل (١٤) طريقة عرض تمثيلات الكسور في كتب الرياضيات في كل من السعودية وسنغافورة

كما عرضت سنغافورة درس جمع وطرح الأعداد الكسرية في الصف الخامس باستخدام النماذج وقدمت ٦ أمثلة حياتية مصورة باستخدام أقراص الكسور والأشرطة، بينما عرضتها في الكتب السعودية في الصف السادس باستخدام الطريقة الإجرائية مباشرة، مبتدئاً بعرض عملية الطرح.

1 أوجد ناتج: $2\frac{1}{4} - 4\frac{0}{4}$ **هَذَا:** $3 = 2 - 0$

اطرح الجزأين الكسريين

اطرح العددين الكليين

تحقق من معقولية الجواب: $3 = 2\frac{4}{4}$ ✓

شكل (١٥) طريقة عرض عملية الجمع والطرح على الأعداد الكسرية في الكتب السعودية وسنغافورة

ومما سبق يتضح عناية الكتب السنغافورية بالبناء المفاهيمي أكثر من الكتب السعودية التي اهتمت بالبناء الإجرائي. كذلك يتضح عمق البناء المفاهيمي في كتب سنغافورة على مستوى الدرس الواحد، بخلاف الكتب السعودية التي اعتمدت على تجزئة وحدة الدرس. كما تميزت الكتب السنغافورية بتوضيح عملية تحويل الكسر إلى صورة مكافئة لإتمام عملية جمع وطرح الكسور، أما في الكتب السعودية فلم يتضح ذلك بل فصل النموذج عن عملية استخدام الكسور المتكافئة لجعل الكسرين لهما المقام نفسه. كما يلاحظ قلة عدد التمارين في الكتب السنغافورية مقارنة بتمارين الكتب السعودية في المنهج السعودي مما يوفر فرصة أكبر من الوقت للمشاركة الصفية من الطلاب والفهم.

د. طريقة عرض عمليتي ضرب وقسمة الكسور في كتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية وسنغافورة

يوضح الجدول (٧) المواضيع التي تم تناولها في موضوع ضرب الكسور في الدولتين:

جدول (٧) محتوى عمليتي ضرب وقسمة الكسور في كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية وسنغافورة

كتب المملكة العربية السعودية	كتب سنغافورة
الصف السادس الفصل الدراسي الثاني -التهيئة -استكشاف: تقريب الكسور -تقريب الكسور والاعداد الكسرية -خطأ حل المسألة: تمثيل المسألة -جمع الكسور المتشابهة وطرحها -استكشاف: الكسور غير المتشابهة -جمع الكسور غير المتشابهة وطرحها -جمع الاعداد الكسرية وطرحها -تقدير نواتج ضرب الكسور -استكشاف: ضرب الكسور -ضرب الكسور -ضرب الاعداد الكسرية -استكشاف: قسمة الكسور -قسمة الكسور، قسمة الاعداد الكسرية	الصف الخامس الفصل الدراسي الأول -قسمة الاعداد الصحيحة ككسور -تحويل الكسر الى كسر عشري- مراجعه -جمع وطرح الاعداد المختلطة -مراجعة -ضرب الكسر الصحيح بعدد صحيح -ضرب الكسر غير الصحيح بعدد صحيح -ضرب كسرين صحيحين -ضرب كسر صحيح بكسر غير صحيح -ضرب كسرين غير صحيحين -ضرب عدد مختلط بعدد صحيح - كسر الباقي - مشكلات لفظية
	الصف السادس الفصل الدراسي الأول مراجعه - قسمة الكسر الصحيح بعدد صحيح - قسمة عدد صحيح بكسر صحيح - قسمة عدد صحيح بعدد صحيح مشكلات لفظية تفكير مستمر مراجعة ١

أظهر الجدول (٧) أن الكتب السعودية قدمت العمليات الأربع على الكسور (جمع وطرح وضرب وقسمة الكسور) في فصل واحد بالصف السادس، بينما كتب سنغافورة قدمت عملية ضرب الكسور في الصف الخامس، أما القسمة فقد عرضتها في الصف السادس.

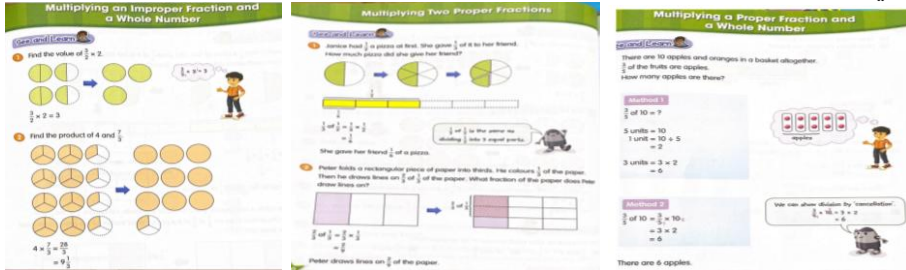
أولاً: طريقة عرض ضرب الكسور

- طريقة عرض كتب سنغافورة موضوع ضرب الكسور:

عرضت الكتب السنغافورية موضوع ضرب الكسور من خلال (٧) دروس، عرضتها في (٢٦) صفحة، عرضت فيها (٣٠) مثلاً توضيحياً، و (٨٠) تمريناً، وعرضت الدروس بالتدرج لتحقيق فهم عميق لمعنى ضرب الكسور، وفق التسلسل التالي: ضرب الكسر الفعلي بعدد كلي؛ ضرب الكسر غير الفعلي بعدد كلي؛ ضرب كسرين فعليين؛ ضرب كسر فعلي بكسر غير فعلي؛ ضرب كسرين غير فعليين؛ ضرب عدد كسري بعدد كلي؛ كسر الباقي.

حيث عرض في الدرس الأول (٤) أمثلة مستخدماً نموذج مجموعة أجزاء، ونموذج جزء من كل باستخدام الشريط والقرص الدائري، وعرض المثالين الأول والثاني في

صفحتين، مستخدماً مفهوم ضرب وقسمة الأعداد الكلية، وربطها بالكسور، وعرض الحل بطريقتين يوضح في الأولى المعرفة المفاهيمية لضرب الكسور بعدد كلي باستخدام الرسومات التوضيحية، ومن ثم يعرض الطريقة الإجرائية. في الدرس الثاني عرضت مثالين لتوضيح ضرب الكسر غير الفعلي بعدد كلي، مستخدمة قاعدة أن عملية الضرب هي جمع مكرر ومستخدمة التمثيلات التصويرية بنموذج جزء-كل، باستخدام قرص الكسور، وهكذا تكرر عرض بقية الدروس بنفس النمط في الحل بطريقتين مفاهيمية وإجرائية.



شكل (١٦) طريقة عرض كتب سنغافورة لضرب الكسور

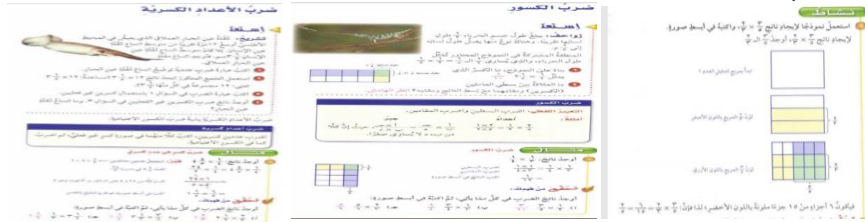
- طريقة عرض الكتب السعودية موضوع ضرب الكسور:

قدمت الكتب السعودية ضرب الكسور من خلال (٣) دروس، عرضتها في (١١) صفحة، عرض فيها (١٣) مثالاً توضيحياً، و(١٣٦) تمريناً، وبدأ الموضوع بدرس تقدير نواتج ضرب الكسور تم فيه تقدير ناتج ضرب كسر فعلي بعدد كلي مستخدمة تغيير مقام الكسر أو العدد الكلي بقيمة تقبل القسمة بينهما لتقدير ناتج الضرب، قبل أن يفهم الطالب معنى ضرب الكسور، وتم عرض الدرس بالتركيز على الإجراءات فقط. ومن ثم عرض درس ضرب الكسور من خلال درس استكشاف، تم فيه توضيح معنى ضرب كسرين فعليين باستخدام النماذج، ومتدرجا بضرب كسور الوحدة، ومن ثم ضرب كسرين فعليين لأكثر من جزء، وتم العرض باستخدام النماذج ومستخدماً نموذج الشريط، والمربعات، مع كتابة عملية الضرب بصورة رمزية وكتابة الناتج بصيغة لفظية. ولم يذكر قاعدة ضرب الكسور.

وفي الدرس عرض في نشاط استعد طريقة ضرب كسرين وحدة مستخدماً النموذج، ووجه لملاحظة بسطي ومقامي الكسرين ومقارنته ببسط ومقام الناتج، ثم كتب قاعدة ضرب كسرين. واتبعه بمثال تم حله باستخدام القاعدة والتمثيل بنموذج المستطيل، ومن ثم عرض ضرب كسر في عدد كلي، وأوجد الحل بتحويل العدد الكلي الى كسر وطبق القاعدة.

وعرض في الدرس الثالث ضرب الأعداد الكسرية، مبتدئاً بقاعدة ضرب الأعداد الكسرية، ثم عرض مثال ضرب كسر فعلي بعدد كسري وطبق الحل بالإجراءات

المذكورة بالقاعدة المعطاة مباشرة، ثم عرض مثال آخر لضرب عدد كسري بعدد كسري.



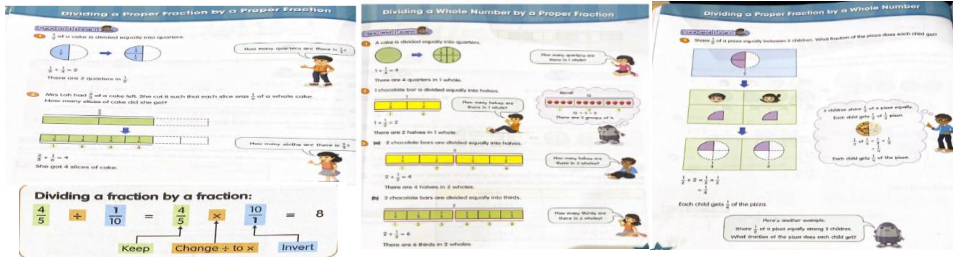
شكل (١٧) طريقة عرض الكتب السعودية لضرب الكسور

ومما سبق يتضح عناية الكتب السنغافورية على الجانب المفاهيمي أولاً ويليه الجانب الاجرائي، وهذا يظهر في كثرة عدد الأمثلة المعروضة لموضوع ضرب الكسور في الكتب السنغافورية مقارنة بالكتب السعودية حيث بلغ عدد الأمثلة للدروس (٢٠) مثالاً، تركز على الفهم باستخدام التمثيلات التصويرية المصاحبة لكل مثال، مع تقديم دروس مستقلة لكل حالة ضرب في الكسور ليتضح المفهوم وقيمته، بينما بلغت في الكتب السعودية (١٣) مثالاً، مع قلة التمثيلات التصويرية والتركيز على التطبيق الاجرائي، حيث عرضت قواعد اجراء عملية ضرب الكسور وعرضت امثلة توضح ذلك، ولم تركز على الجانب المفاهيمي إلا في نشاط استكشاف، كما نها لم تراعى في ترتيبها لموضوعات الفصل تحقيق التدرج لفهم العمليات حيث بدأت بتقدير الناتج لضرب الكسور، وهو الجانب الاجرائي قبل أن توضح معنى ضرب الكسور وما تمثله، و بدأت بضرب كسرين فعليين، ومن ثم كسر فعلي بعدد كلي، ومن ثم عددين كسريين، كما أنها قدمت لكل حالة من حالات ضرب الكسور مثال واحد فقط، وركزت على الإجراءات في معظم الأمثلة. بالإضافة إلى عرضها في نشاط استعد معلومات قد تشكل على الطالب في فهم السؤال ففي عرضها لنشاط استعد في درس ضرب الاعداد الكسرية وردت كلمة (مقلة، حبار، محيط أطلسي) والطالب لم يتعرف عليها مما يشكل صعوبة في الفهم، كذلك كثرة عدد التمارين في الكتب السعودية والتي يغلب عليها الجانب الاجرائي والعمل بصورة فردية، مقارنة بتمارين كتب سنغافورة التي كان عددها اقل مع التركيز على تنويع التعلم باستخدام التمثيلات والعمل في مجموعات زوجية وجماعية وفردية.

ثانياً: طريقة عرض الكتب السنغافورية قسمة الكسور:

يظهر جدول (٧) أن كتب سنغافورة عرضت قسمة الكسور في فصل مستقل من الصف السادس، وقدمت (٣) دروس للقسمة ودرس لحل مشكلات لفظية تتعلق بقسمة الكسور، وبلغ عدد صفحات الفصل (٢٣) صفحة، حيث تدرجت في عرض الدروس

ليوضح مفهوم قسمة الكسور، حيث عرضت بداية مراجعة لعملية ضرب الكسور، وقسمة الاعداد الكلية ككسور، ثم عرضت الدرس الأول الذي بدأته بقسمة الكسر الفعلي على عدد كلي، عرضت فيه (٤) أمثلة، خصصت لكل مثال صفحة، ليوضح معنى تجزئة الأجزاء، وقيمتها من الكل باستخدام التمثيل بنموذج جزء- كل، يتم فيه توضيح القاسم والمقسوم وناتج القسمة، وختم المثال بالتعبير بصورة رمزية عن العملية وناتجها مع التبسيط، مع وجود تلميح جانبي يوضح الخطوات بعبارات مكتوبة، وفي الدرس الثاني عرض قسمة عدد كلي على كسر فعلي، حيث عرض في صفتين (٤) أمثلة، مستخدماً التمثيلات التصويرية والعبارات الرمزية، وبعد حل تمارين الأنشطة الزوجية ومجموعات عرض قاعدة قسمة عدد كلي على كسر فعلي، وفي الدرس الأخير عرض قسمة كسر فعلي على كسر فعلي، حيث عرض في (٣) صفحات (٦) أمثلة مستخدماً التمثيل التصويري في كل تمرين، ومتبعاً نفس طريقة العرض في كل درس، كما كتب خطوات قاعدة قسمة كسرين بمثال بعد عرض تمارين الأنشطة الزوجية.



شكل (١٨) طريقة عرض كتب سنغافورة لقسمة الكسور

- طريقة عرض الكتب السعودية قسمة الكسور:

أظهر جدول (٧) أن الكتب السعودية عرضت في الصف السادس العمليات الأربع على الكسور في فصل واحد، وأن قسمة الكسور تم عرضها من خلال (٩) أمثلة في (١٠) صفحات، حيث بدأ الدرس الأول بنشاط استكشاف تناول طريقة عمل نموذج لقسمة عدد كلي بكسر فعلي، وقسمة كسرين فعليين باستخدام التمثيل بنموذج شريط الكسور، ثم عرض درس قسمة الكسور تناول فيه مباشرة قسمة كسر فعلي على كسر فعلي، وقدم نشاط يتطلب إيجاد المقلوب، وبعدها عرض (٣) أمثلة لإيجاد ناتج قسمة كسرين من خلال إيجاد مقلوب المقسوم ومن ثم إتمام العملية كضرب كسرين، وفي درس قسمة الاعداد الكسرية، بدء بنشاط استعد ومن ثم ذكر قاعدة قسمة الأعداد الكسرية وطرح (٣) أمثلة، تم فيها تحويل العدد الكسري لكسر غير فعلي وإيجاد مقلوب القاسم، وضرب الكسرين.



شكل (١٩) طريقة عرض الكتب السعودية لقسمة الكسور

مما سبق يتضح أن الكتب السنغافورية تركز على استيعاب فهم معنى عملية القسمة، وتشكيل صورة ذهنية ذات دلالة لمعنى القسمة، وهذا يتضح من تخصيص دروس متدرجة لحالات القاسم والمقسوم، بدء بقسمة كسر على كل، وقسمة كل على كسر، ليصل بالطلاب لفهم معنى قسمة كسر على كسر، وليتضح صورة البسط والمقام باستخدام التمثيل التصويري في كل حالة، لتوضيح معنى وطريقة قسمة الكسور، تم في كل مثال عرض معنى وقيمة القاسم والمقسوم وناتج القسمة باستخدام التمثيل التصويري بنموذج القرص الدائري والمستطيلات، بينما في الكتب السعودية كان التركيز على الجانب الاجرائي لعملية قسمة الكسور، حيث بدء مباشرة بقسمة كسرين، وبعدها عرض مثال لقسمة كسر على عدد كلي، وغلب على العرض تطبيق قاعدة القسمة المعطاة ولم يظهر الاهتمام بالجانب التمثيلي الا في نشاط استكشاف وبداية الدرس.

وبالرغم من قلة صفحات عرض دروس قسمة الكسور في الكتب السعودية والتي بلغت (١١) صفحة بعدد (٩) أمثلة مقارنة بكتب سنغافورة التي بلغت عدد صفحات القسمة (٢٦) صفحة بعدد من الأمثلة بلغ (١٥) مثالا، إلا أن عدد التمارين الخاصة بدروس القسمة والذي بلغ (٨٥) تمريناً تتطلب إجراءات حسابية فردية، كان قريباً من عدد تمارين القسمة في الكتب السنغافورية والتي بلغت (٨٧) تمريناً، منها (٢٧) تمريناً يتطلب اداءات في مجموعات زوجية وجماعية، من استخدام قرص الكسور وتمثيل عملية القسمة وتحديد الناتج.

٤. ما خصائص أسئلة محتوى الكسور في كتب رياضيات المرحلة الابتدائية بالمملكة العربية السعودية وسنغافورة؟

لتحديد خصائص أسئلة محتوى الكسور في كتب رياضيات المرحلة الابتدائية بالمملكة العربية السعودية وكتب سنغافورة، تم تحليل جميع فرص التعلم التي تقدمها كتب الرياضيات بالمرحلة الابتدائية للطلاب في موضوع الكسور وتطبيقاتها التي لم يتم حلها وكتابة اجابتها داخل أو في نهاية الدرس. حيث حلت جميع الأسئلة في الكتب السعودية التي عرضت تحت عنوان تحقق تأكد أو مهارات التفكير العليا أو المراجعة،

وفي كتب سنغافورة تم تحليل جميع التمارين التي عرضت تحت عنوان نشاط الايدي لأعلى، وزاوج شارك، واعمل وتعلم، واعرض وقل، العب وتعلم، ودعنا نفكر. وتم التحليل وفقا لإطار لي (Li,2000) لتحليل الأسئلة، واقتصر التحليل على نوع السياق المعروف (رياضي- توضيحي)؛ عدد الخطوات للحل (خطوة- متعدد الخطوات)؛ ونوع الاستجابة المطلوبة (عددية-تعبير عددي- تعبير تمثيلي- شرح أو حل).

وقد قام بالتحليل ثلاثة محللين: الباحث ومشرفة تربوية ومعلم رياضيات بعد الاتفاق على طريقة التحليل، بتحليل كل تمرين وفق بطاقة التحليل وحساب التكرارات، كما حسبت النسب المئوية كما يلي

$$\text{النسبة المئوية لنوع السياق} = \text{عدد نوع السياق (رياضي/ توضيحي)} \div \text{عدد الأسئلة الكلي} \times 100$$

وهكذا بقية المفردات، وأظهرت النتائج نسبة اتفاق عالية بين المحللين. جدول (٨) مواصفات أسئلة محتوى الكسور في كتب رياضيات المرحلة الابتدائية بالمملكة العربية السعودية

الصف	السياق		عدد الخطوات		نوع الاستجابة		
	رياضي	توضيحي	خطوة	عدة خطوات	إجابة عددية	تعبير عددي	تعبير تمثيلي
الأول	1	42	32	11	7	0	30
الثاني	6	77	46	37	37	6	44
الثالث	34	63	57	40	37	7	28
الرابع	255	249	203	300	295	19	96
الخامس	280	175	168	287	170	9	157
السادس	525	202	180	546	283	2	70
المجموع	1101	808	686	1221	829	47	425
مجموع الأسئلة	1909			1907			2116
	57.67%	42.33%	35.97%	64.03%	39.18%	2.22%	20.09%
							38.52%

جدول (٩) مواصفات أسئلة محتوى الكسور في كتب رياضيات المرحلة الابتدائية في سنغافورة

الصف	السياق		عدد الخطوات		نوع الاستجابة		شرح أو حل	
	رياضي	توضيحي	خطوة	عدة خطوات	إجابة عددية	تعبير عددي		تعبير تمثيلي
الثاني	5	18	14	9	15	4	1	8
الثالث	18	18	10	26	14	4	3	19
الرابع	58	46	25	79	36	4	4	64
الخامس	132	206	75	263	71	0	2	265
السادس	38	51	24	65	23	0	12	66
المجموع	251	339	148	442	159	12	22	422
	590		590		615			
	42.54%	57.46%	25.08%	74.92%	25.85%	1.95%	3.58%	68.62%

يتضح من الجدولين (٨، ٩) أن نسبة الأسئلة المعروضة لمحتوى الكسور في كتب الرياضيات بالمملكة العربية السعودية يزيد بمقدار الضعف عن أسئلة كتب سنغافورة، كما يظهر الجدول (٩) أن سياق الأسئلة في الكتب السنغافورية كانت توضيحية بنسبة أعلى من الصياغة الرياضية، بعكس الكتب السعودية التي أظهرت صياغة رياضية بنسبة أعلى، واتفقت كلتا الدولتين بأن الأسئلة التي تتطلب الحل بعدة خطوات كانت نسبتها أعلى بكثير من الأسئلة التي تتطلب الحل بخطوة واحدة.

أما عن نوع الاستجابة المطلوبة من الأسئلة فيتضح من التحليل أن أعلى استجابة في أسئلة كتب سنغافورة كانت لشرح وتوضيح الحل وبنسبة مرتفعة جداً عن بقية الاستجابات، وأقل استجابة لديها كانت تتطلب التعبير العددي، بينما في الكتب السعودية فكانت أعلى استجابة هي الإجابة العددية، يليها وبنسبة متقاربة الشرح والحل.

كذلك يظهر عناية الكتب السعودية بظهور استجابات تتطلب تعبير تمثيلي بنسبة بلغت قرابة (٢٠%) وهي أعلى بكثير من كتب سنغافورة التي بلغت نسبتها قرابة (٤%). وترى الباحثة أن الكتب السنغافورية في أسئلتها تتطلب العمل في مجموعات واستخدام نماذج تمثيل الكسور كقرص الكسور أو شريط الكسور لتمثيل نوع الكسور العملية أو لإيجاد ناتج العملية على الكسور ولا تطلب من الطلاب رسم نموذج، كما تفعله الكتب السعودية التي ظهر العديد من أسئلتها يتطلب رسم شبكة، ورسم دوائر وتجزئتها أو مستطيلات، بينما في أسئلة سنغافورة يقدم لهم التمثيل ويطلب منهم

الشرح والمناقشة والحل، حيث يكون التركيز في المفهوم ومعناه وطريقة تمثيله بأجزاء محسوسة وليست نموذج تصويري، وحين يتطلب الأمر تجزئة شكل لأجزاء متساوية، كانت الأسئلة توجه الطلاب لاستخدام أوراق مربعة وطبها وتحديد عدد الأجزاء المتطابقة، وأيضا الكسور المتكافئة.

كما غلب على أسئلة سنغافورة عدم التكرار الكبير للأسئلة ذات الفكرة الواحدة، حيث عادة تعرض الأسئلة بنماذج مختلفة، وبتدرج وبأسلوب اللعب وتتطلب مناقشة الزميل أو الشرح للمجموعة، بينما الكتب السعودية فيظهر التكرار الكبير للأسئلة ذات الفكرة الواحدة، وبأعداد كبيرة، والحل يغلب عليه الأسلوب الفردي.

التعليق على النتائج:

أظهرت إجابات أسئلة تحليل محتوى موضوع الكسور في كتب رياضيات المرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية وسنغافورة، أن كلتا الدولتين قد تناولت نفس مواضيع الكسور مع زيادة في الكتب السعودية بعرضها التقدير والتقريب وهو ما لم تتناوله كتب سنغافورة، كما ظهر عناية كتب سنغافورة بالمنظور المعرفي لتعلم الكسور حيث رتب الموضوعات بحسب طبيعة العدد أي بحسب نوع الكسر فعرض محتوى الكسور المتشابهة في فصل مستقل تناول فيه المفهوم والتمثيل والمقارنة والجمع والطرح، وكذلك عرض الكسور غير المتشابهة في صف تالي بنفس الطريقة، في عرض المفهوم والتمثيل والمقارنة وعملية الجمع والطرح، أما الكتب السعودية فقد ظهر عنايتها بالمنظور الرياضي حيث رتبت المواضيع بحسب العملية وقدمت في فصل واحد وطرح الكسور بكل أنواعها معاً (المتشابهة وغير المتشابهة، والأعداد الكسرية وغير الفعلية)، وهذا ساعد الكتب السنغافورية على عرض المحتوى بتركيز وعمق وترابط دون الحاجة إلى التكرار وبعده صفحات أقل مما عرضه الكتب السعودية التي كان عدد الدروس والصفحات والتمارين فيها أكثر مما في كتب سنغافورة.

كما أن الطريقة المستخدمة في عرض وترتيب المواضيع في الكتب السعودية وتكرارها أظهر ضعف في ترابط وتماسك المحتوى حيث ظهر فجوة في المعلومات، كما ظهر في درس تحويل الأعداد الكسرية والكسور غير الفعلية حين عرضها في ثلاث صفوف متتالية مما تسبب في زيادة عدد الصفحات وزيادة التمارين، وقلل من عمق وترابط الموضوعات، كما أنه عندما عرض الدرس لأول مرة، تنطرق إلى جمع وقسمة الكسور لإتمام عملية التحويل بين الكسور غير الفعلية والأعداد الكسرية، وهذه الدروس لم تعرض بعد.

كما أظهر التحليل تركيز الكتب السعودية على الجانب الاجرائي في الموضوعات، مع ازدحام الصفحات بالعبارات الكتابية وانحسار التمثيلات التصويرية مع قلتها في

مساحة صغيرة من الصفحة والتركيز على انجاز عدد كبير من التمارين بصورة فردية وموزعة إلى (٣) مستويات: (متقدم ومتوسط ومتدني)، أما في كتب سنغافورة فظهر في عرض الدروس التركيز على الجانب المفاهيمي أولاً ومن ثم الجانب الاجرائي والعناية بتنوع التمثيلات التصويرية التي توضح المفهوم والاجراءات، وعند عرض العمليات على الكسور وتحولاتها عرض نموذجين للحل الجانب المفاهيمي والجانب الاجرائي، مع تقديم التمارين على مستوى واحد لجميع الطلاب، مع التوجيه في كل درس على حل أغلب التمارين من خلال أنشطة جماعية وزوجية يمارس فيها اللعب واستخدام التمثيلات باستخدام أوراق الطي المربعة أو شريط الكسور أو القرص الدائري.

كما قدمت كتب سنغافورة أمثلة عملية بعروض رسومية متعددة في سياقات حياتية أكثر من الكتب السعودية التي غلب على سياقها الرموز الرياضية، وأضافت الكتب السنغافورية رسومات كرتونية لطلاب يعرضون تعليقات أو تنبيهات تظهر كفقاعات من أفواههم تقوم بإعادة صياغة المسألة أو إعادة صياغة المطلوب أو الحل في جمل أكثر تفصيلاً أو جمل إعلانية أو استفهامية، مع عرض تلك الشخصيات بتطور في بنيتهم الجسدية مع التقدم في الصفوف الأخيرة لتكون أكثر ارتباط و واقعية بحياة الطلاب، ولم يظهر هذا في الكتب السعودية إلا في الصف الأول والثاني وفي عدد قليل جداً من الأنشطة لا يتجاوز خمسة أنشطة.

إن هذه المواصفات لكتب سنغافورة يتفق مع ما ذكرته الدراسات Ginsburg, Leinwand, Anstrom, & Pollock, 2005; Hoven & Garelick, 2007; Nugroho, 2010) من أن كتب الرياضيات السنغافورية تم تصميمها لبناء وتطوير "فهم عميق للمفاهيم الرياضية من خلال الرسوم التوضيحية الملموسة التي توضح كيفية استخدام المفاهيم الرياضية المجردة لحل المشكلات الرياضية المتعددة الخطوات من وجهات نظر مختلفة، كما تركز على تحقيق التوازن بين المهارات المفاهيمية والإجرائية لحل المشكلات، وأن عرض المحتوى يمتاز بقلّة الكتابات اللفظية وبساطتها وقلّة عدد الكلمات في الصفحة الواحدة ويتم التعبير عن المفهوم بتمثيلات متعددة.

كما يتفق مع ما ذكره جيسنبرق وآخرون (Ginsburg et al., 2005) من أن الكتب السنغافورية تدعم وتعزز تقدم الطلاب بشكل منهجي يتفق مع الأبحاث في التدرج بالتعلم بدءاً بالمحسوس، وسبه المحسوس وصولاً للفهم المجرد. أما ما أظهرته نتائج التحليل من طريقة عرض المحتوى في الكتب السعودية، فهو يتفق مع ما أظهرته الدراسات Jones, 2004; Hoven & Garelick, 2007; Schmidt, Wang & McKnight, 2005; Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016 عن مواصفات وطرق عرض الكتب الأمريكية، فالكتب السعودية

هي كتب موائمة من سلسلة أمريكية، لذا ما أظهرته نتائج التحليل تتفق مع ما ذكرته الدراسات من أن حجم كتب السلاسل الأمريكية كبير مع قدر كبير من التكرار، مع نقص في التركيز والعمق، بالإضافة إلى الاتساع وعمق بسيط. كما تتفق نتائج محتوى الكتب السعودية مع ما أظهرته دراسة العجمي عن الكتب الكويتية سلسلة هاركورت والكتب الأمريكية من كبر حجم الكتب مع وجود عدد كبير من المهمات والبدء في الكسور من الصف الأول مع التركيز على معيار الخوارزميات كطرق حسابية رئيسية.

توصيات ومقترحات الدراسة:

نظراً لما أظهرته نتائج الدراسة من تكرار وضعف في تماسك عرض محتوى بعض دروس الكسور في الكتب السعودية، لذا توصي الدراسة بضرورة إعادة النظر في طريقة بناء محتوى الكسور بما يتوافق مع سلامة البناء المعرفي لدى المتعلمين، والتأكيد على سلامة تتابع وتدرج عرض الموضوعات، والتركيز على استخدام تمثيلات متعددة لتوضيح المفاهيم وتعميق معناها، كذلك العناية بكم ونوع المسائل والتدريبات التي تسهم في تمكين الطالب من المعرفة والمهارة دون تكرار ممل، مع ضرورة العناية بطريقة تنظيم الصفحة من حيث حجم الخط وعدد الكلمات والصور لتناسب مع طبيعة الموضوع والمرحلة العمرية. كما تقترح الباحثة متابعة تحليل المحتوى في بقية مجالات الرياضيات (هندسة، جبر، إحصاء،) ومقارنته ببقية الدول أظهرت تميز في تعليمها مثل المقارنة بكتب كوريا واليابان والصين لتكوين تصور متكامل عن طريقة طرح تلك الدول المحتوى الرياضي لطلابهم.

المراجع:

راشد، محمد إبراهيم (٢٠٠٨). مدى تعلم مفاهيم الكسور العادية والعمليات عليها لدى طلبة "معلم الصف" في كليات العلوم التربوية". *مجلة مستقبل التربية العربية*، مصر، ١٤ (٥٤)، ١٧٣-٢١٠.

السعيد، محاسن جودة (٢٠٠٣). الأخطاء الشائعة في العمليات الحسابية الأربعة على الكسور العادية والعشرية لدى طلبة الصفين الخامس والسادس الأساسيين في المدارس الحكومية في محافظة نابلس. رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة النجاح الوطنية، نابلس، فلسطين، ٢٠٠٣هـ/٢٠٠٣م.

هيئة تقويم التعليم العام (٢٠١٦م). *إعلان نتائج الاختبارات الوطنية*. تم الرجوع إليه بتاريخ ٢٠١٩/٣/١٥
<http://www.peec.gov.sa>

Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 239–261.

Cheng, C. C. & Sari, M. S. (2017). A review and content analysis of Mathematics textbooks in educational research. *Problems of Education in the 21st Century*, 75 (3), 235-251.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, V. (2007). Opportunities to learn fractions in fourth-grade elementary classes: Insights from an analysis of textbooks used in Cyprus, Ireland, and Taiwan. *Poster presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Chicago, Illinois.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning* 12 (2), 117-151. doi:10.1080/1098606090346007 0.

Curriculum Planning and Development Division. (2012). *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus* [1st Ed.]. Singapore: Ministry of Education.

Daud, Z. (2020). A Comparative Analysis of Fractions in Chinese and Pakistani Primary School Mathematics Textbooks. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*, 9(1), 15–38.

Fan, L., Y. Zhu, and Z. Miao. (2013). Textbook Research in Mathematics Education: Development Status and Directions. *ZDM* 45 (5), 633–646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x.

- Ginsburg, A.; Leinwand, S.; Anstrom, T. & Pollock, E. (2005). *What the United States can learn from Singapore's world-class mathematics system*. Washington, DC :American Institutes for Research.
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology, 102*, 843–859. doi:10.1037/a0019824
- Hoven, J., & Garelick, B. (2007). Singapore math: Simple or complex? *Educational Leadership, 65*(3), 28-36.
- Jones, D. L. (2004). Probability in middle grades mathematics textbooks: An examination of historical trends, 1957–2004. *Unpublished doctoral dissertation*, University of Missouri, Columbia, MO.
- Jones, K., Bokhove, C., Howson, G., & Fan, L. (Eds) (2014), Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT2014). Southampton: University of Southampton. https://eprints.soton.ac.uk/374809/1/ICMT-2014_proceedings150331.pdf.
- Leinwand, S., & Ginsburg, A. (2007). Learning from Singapore math. *Educational Leadership, 65*(3), 31–35.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 234–4.
- Ministry of Education Singapore (2013). Mathematics Syllabus Primary One to Five. https://www.moe.gov.sg/docs/defaultsource/document/education/syllabus/sciences/files/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf.
- Mullis, I. V. S.; Martin, M. O.; Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015 international results in mathematics. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Student Center website: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/> [oct, 2019].
- National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.
- National Research Council (2004). *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations*. Washington, DC: The National Academies Press. Mathematical Sciences

- Education Board, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education.
- Nugroho, A. D.(2010). Mathematics Textbooks of Primary 1 Used in Singapore. *A Multimodal Analysis of Its Intersemiosis*, 12 (1).
- O’Halloran, K. L. (2007). Systemic Functional Multimodal Discourse Analysis (SF-MDA) approach to mathematics, grammar and literacy. In A. McCabe, M. O’Donnell, & R. Whittaker (Eds.), *Advances in language and education* (pp 77-102). London: Continuum.
- Pang, J. (2009). Good mathematics instruction in South Korea. ZDM—The International. *Journal of Mathematics Education*, 41, 349–362.
- Reys, B. J.; Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. Educational Leadership. *Journal of the Department of Supervision and Curriculum Development N.E.A*, 61(5), 61–66..
- Rezat, S., Fan, L., Hattermann, M., Schumacher, J., & Wuschke, H. (Eds.). (2019). Proceedings of the Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development. 16–19 September 2019, Paderborn, Germany. Paderborn: Universitätsbibliothek Paderborn.
- [file:///C:/Users/saxdo/Downloads/ICMT3_proceedings%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/saxdo/Downloads/ICMT3_proceedings%20(2).pdf)
- Richardson, K. (2012). How children learn number concepts: A guide to the critical learning phases. Bellingham, WA: Math Perspectives Teacher Development Center
- Schmidt, W. H.; Wang, H. C., & McKnight, C. C. (2005). Curriculum coherence: An examination of U.S. mathematics and science content standards from an international perspective. *Journal of Curriculum Studies*, 37(5), 525-559
- Siegler, R. S.; Duncan, G. J.; Davis-Kean, P. E.; Duckworth, K.; Claessens, A.; Engel, M.,& Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 691–697. doi: 10.1177/0956797612440101
- Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994–2004.
- Slavin, R.E.; Lake, C., & Groff, C. (2009). Effective programs in middle and high school mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, 79 (2), 839-911.

- Van de Walle, J. (2001). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. 4th ed.. New York: Addison Wesley Longman.
- Yang, D. C. (2018). Study of fractions in elementary mathematics textbooks from Finland and Taiwan. *Educational Studies*, 44(2), 190–211. <https://doi.org/10.1080/03055698.2017.1347493>
- Yang, D. C., Reys R. E., & Wu L. L. (2010). Comparing how Fractions were Developed in Textbooks used by the 5th- and 6th-graders in Singapore, Taiwan, and the U.S.A. *School Science and Mathematics*, 110 (3), 118–127.
- Yang, D. C., & Wu W. R. (2010). The Study of Number Sense Realistic Activities Integrated into Third grade Math Classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, 103(6), 379–392.

