# فعالية استخدام مداخل البرهنة غير المباشرة فى تنمية مهارات البرهان الرياضى واختزال قلق البرهان وتحسين مهارات التواصل الرياضى لدى الطلاب معلمى الرياضيات.

د/ علاءالدين سعد متولى
أستاذ مساعد المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية التربية – جامعة بنها

بسم الله الرحمن الرحيم

# الخطة العامة للدراسة

## مقدمة :

تتميز الرياضيات بميزة تكاد تنفرد بها عن مختلف فروع المعرفة، وهى طبيعتها الاستدلالية، حيث يمكن اشتقاق نتائج صادقة من مقدمات معطاة مسلم بصدقها وذلك عن طريق اتباع خطوات استدلالية تحكمها قوانين المنطق. فالرياضيات بناء استدلالى تتميز قضاياه بالتجريد ولا تحمل معنى معيناً، وإنما تكتسب معناها من السياق الحياتى الذى تستخدم فيه، وأهم ما يميز النظريات الرياضية أنها لا تصف جانباً معيناً من العالم الفيزيقى المحيط بنا، ولكنها تصف ذلك العالم النظرى من الفكر الذى بنى على مسلمات غير متناقضة.

ويساعد العمل بالرياضيات على التفكير المنطقى وعدم إطلاق الأحكام دون الاستناد إلى أسباب منطقية، كما يساعد على الدقة والتنظيم، وتعتمد النظم الرياضية على ضرورة عدم وجود تناقض(تعارض) Contradiction فى البنى المعرفية والفكرية، ومن ثم فإن الرياضيات تعلمنا الاتساق فى الفكر وعدم قبول الفكرة ونقيضها فى نفس الوقت. (وليم عبيد، ١٩٩٩: ٨)

وإذا كان أهم نشاط يقوم به الباحثون وعلماء الرياضيات هو العمل على اكتشاف نظريات رياضية جديدة والكشف عن علاقات بين البنى الرياضية المختلفة، فإن ما يلى ذلك فى الأهمية هو برهان النظريات الجديدة لإثبات صدق وصلاحية العلاقات التى تم اكتشافها. وتتجلى أهمية العمل على برهنة النظريات فى التأكيد على تعلم طرق وأساليب ومهارات البرهان الرياضى Mathematical Proof فى مناهج الرياضيات بمختلف المراحل التعليمية.

ويعد مفهوم البرهان الرياضى أحد المفاهيم الأساسية التى يعتمد عليها تدريس مختلف فروع الرياضيات بصفة عامة، حيث توصف الرياضيات بأنها أسلوب للتفكير وطريقة لتنظيم البرهان المنطقى، وبناء معرفى منظم يتم فيه استنتاج كل قضية من قضايا سبق برهنتها.

والبرهان الاستدلالى هو الحجة الأكثر إقناعاً والوحيدة لإثبات صحة نظرية ما (Izen, Stanley, 1998)، وأن وظيفة البرهان فى الموقف الذى تتواجد فيه كمية منطقية من الإقناع السابق تكون أكثر من مجرد التفسير والتحقق (De Villiers, Michael, 1997: 24-42)

لذلك فإن تنمية مفهوم البرهان الرياضى وما يتصل به من مهارات يعد أحد الأهداف التربوية الرئيسة من أهداف تدريس الرياضيات التى يجب التأكيد عليها فى كافة المراحل

التعليمية، سواء فى المراحل المبكرة بهدف إعداد المتعلم للمواطنة الواعية حيث يمثل البرهان أداة للتفكير السليم والدقيق، أو فى المراحل المتقدمة بهدف إعداد المتعلم لدراسة علمية تخصصية حيث يمثل البرهان أساساً قوياً لتعلم الرياضيات المتقدمة ودعامة أساسية فى بناء وتطوير المعرفة عامة والمعرفة الرياضية خاصة.

ولقد حظى موضوع البرهان الرياضى باهتمام العديد من الدراسات التربوية فى مجال مناهج الرياضيات وطرق تدريسها على الصعيدين العربى والأجنبى على حد سواء.

وقد تباينت أهداف تلك الدراسات وأسباب إجرائها وكيفية معالجتها للموضوع، إلا أنها اتفقت جميعها حول أهمية البرهان الرياضى وضرورة توافر مهارات البرهان لدى المتعلمين فى مراحل التعليم المختلفة(**محمد محمود مصطفى، ١٩٨٧**)، (**مكة عبدالمنعم، ١٩٨٨**)، (**محمد عبدالسميع، ١٩٩٦**)، (**محمد مسعد نوح، ١٩٩٢**)، (**محمد عيد حسن، ٢٠٠٣**)، (**صلاح عبدالحفيظ، ٢٠٠٣**)، (**محمد الكرش، ١٩٩٩**)، (**إلياس أبو يونس، ٢٠٠٠**)، (**عزو عفانة، ٢٠٠١**)، (**Knuth, E, 1998**)، (**Winicki-Landman,1998**)، (**Maher, C, 1996**)، (**Dodge, w.et al, 1998**)، (**Schmidt, p,1999**)، (**Lin, Fou-Lai,2005**)، (**Herbst, p,2006**)، (**Rongjin, H, 2005**).

كما انعكس الاهتمام بموضوع البرهان الرياضى ومهاراته ومتطلبات البرهنة الرياضية لدى معلمى الرياضيات على اهتمام العديد من الدراسات، حيث انصب اهتمام تلك الدراسات على تعرف مدى توافر مهارات البرهان الرياضى أو محاولة تنمية تلك المهارات سواء لدى المعلمين فى أثناء الخدمة أو لدى الطلاب المعلمين الذين يتم إعدادهم داخل كليات التربية للاضطلاع بمهمة تدريس الرياضيات بعد ذلك(**رضا مسعد، ١٩٨٤**)، (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**)، (**Jones, k,2000**)، (**Shipley,w,2000**)، (**Lee, Wan-I, 2000**)، (**Knuth,E.J,2000**)، (**Stylianides,A., et al,2005**)، (**Martin,T.S., et al, 2005**)

وتجدر الإشارة هنا إلى وجود أنواع عديدة من أساليب البرهان الرياضى قام بسردها المتخصصون فى تربويات الرياضيات والباحثون فى مجال المناهج وطرق تدريس الرياضيات، وتدور كل هذه الأنواع (الأساليب) حول نمطين أساسيين من أنماط البرهان الرياضى هما: البرهان الرياضى المباشر Direct proof والبرهان غير المباشر، Indirect proof (الإطار النظرى للدراسة الحالية).

وإذا كان البرهان الرياضى بمعناه العام كما يعرفه(**وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦: ١٦٧**) هو عبارة عن معالجة لفظية أو رمزية تتمثل فى تتابع من العبارات تستنبط كل منها من سابقاتها استناداً إلى شواهد معترف بصحتها (مثل المسلمات والنظريات والمعطيات)

واستنباطاً بأساليب يقرها المنطق. فإن المقصود بنمط البرهان المباشر: إثبات صحة المطلوب نفسه، أى استخدام المقصود بنمط البرهان المباشر: إثبات صحة المطلوب نفسه، أى استخدام عبارات متتابعة فى البرهان تؤدى مباشرة إلى العبارة التى تمثل المطلوب ذاته.

فإذا كان المطلوب إثبات أن أ ← ب، فإننا نحاول إثبات ذلك عن طريق أ← س، س ← ص، ص ← ق، ق ← ك، ك ← ب( سلسلة من العبارات الشرطية إذا كان... فإن ...) وبالتالى فإن أ ← ب.

بينما فى نمط البرهان غير المباشر، فقد يكون من الصعب-إن لم يكن مستحيلاً- استخدام الاستراتيجية السابقة للتدليل على صحة المطلوب نفسه، لذلك نحاول استخدام عبارة تكافئ المطلوب منطقياً. فإذا كان المطلوب إثبات أن أ← ب، فنحاول استخدام استراتيجية من بين عدة استراتيجيات مختلفة فى البرهان (سيأتى تفصيلها فى الجزء الخاص بالإطار النظرى للدراسة الحالية)، على سبيل المثال: يمكن استخدام استراتيجية فى البرهان تسمى بعكس النقيض ويقصد بها: أننا نستخدم العبارة المكافئة منطقياً للمطلوب(أ←ب) وهى نفى ب ← نفى أ. فمثلاً فى إحدى المشكلات الرياضية التى سيتعرض لها البرنامج التعليمى الحالى:

إذا كانت $\phi$ هى المجموعة الخالية. فاثبت أن $\phi$ مجموعة جزئية من أى مجموعة س. وهنا ترتكز الاستراتيجية غير المباشرة فى البرهان على إثبات أن $\phi$ مجموعة جزئية من س (أى نفى المطلوب) يؤدى إلى نفى $\phi$ مجموعة خالية(نفى المعطى)، وبالتالى يوجد تعارض فى مكونات النظام الرياضى على اعتبار أن $\phi$ هى مصطلح اتفق عليه للإشارة إلى مفهوم المجموعة الخالية.

كما تعتمد استراتيجيات البرهان الرياضى غير المباشر على فرض عكس المطلوب فى المشكلة الرياضية ومن خلال استخدام خطوات منطقية ومقدمات معترف بصحتها نصل إلى وجود تعارض(تناقض) مع مسلمات ونظريات البناء الرياضى، مما يجعلنا نرفض الفرض ونسلم بصحة المطلوب نفسه(**وليم عبيد وآخرون**، ١٩٩٦: ١٧١)، **(Leron, U, 1985)**، **(Thom pson,** ،**(Jones, k., et al., 2000)** ،**(Reid, D., and Dobbin, J, 1998)** ،**(Prince,Any,A,1998)** ،**(Klymchuk,S,2005)** ،**Denisse,R,1996)** **(Redmond , Charles ., et al , 1998)**

وتشير نتائج العديد من الدراسات السابقة التى أمكن مراجعتها ودراستها وتحليلها فى هذا الشأن، وكذلك ما أمكن الإطلاع عليه من كتابات فى تربويات الرياضيات، إلى أنه على الرغم من الأهمية التى يحظى بها البرهان الرياضى فى موقع القلب من جسم الرياضيات، إلا أن الغالبية العظمى من المتعلمين فى مختلف المراحل التعليمية-لاسيما فى مرحلة التعليم الجامعى- يواجهون صعوبات كثيرة عند استخدام طرق البرهنة الرياضية المبنية على أسس

منطقية. فقد أوضحت نتائج دراسة (Finlow, K., et al, 1993) أن الطلاب يعانون من صعوبات فى فهم وتقييم وإنتاج البراهين Producing Proofs. فقد وجد "فينلو وزملاؤه" أن العديد من طلاب الصف الأول الجامعى لديهم صعوبات فى تتبع مراحل الاستدلال والتفكير فى البرهان.

وفى دراسة(In: Jones, K, et al, 2000: 53-60) (Almeida, D, 1995) اتضح أن طلاب الصف الثانى الجامعى أثناء اكتسابهم للمفاهيم والتصورات التقليدية للبرهان الرياضى، فإنهم ما زالوا عند المستوى ما قبل الرسمى، وأنهم يستخدمون براهين خاصة بهم إذا ما طلب منهم إثبات صحة شئ ما.

كما وجد Moore (In: Jones, K., et al, 2000) أنه حتى البراهين السطحية apparently trivial proof ما زالت تمثل تحديات عظيمة لطلاب الجامعة الذين يدرسون الرياضيات.

أما الصعوبات التى يواجهها الطلاب بالفعل فى فهم وتقييم وإنتاج البراهين فهى تعتمد ملمحاً من ملامح نتائج الدراسات التى قام بها كل من
**(Gardiner, T., and Moreira, C, 1998); (Harel, G., and Sowder, L, 1998); (Healy, L., and Hoyles, C., 1998)**

حيث تشير نتائج تلك الدراسات إلى أنه حتى عندما يستطيع الطالب إعادة إنتاج البرهان الذى تم تدريسه بطريقة رسمية، فإن هناك نسبة دالة من الطلاب يقومون بتخمين الحل لمسألة مطابقة للمسألة الأصلية بحيث تتجاوز النتائج التى قام بإثباتها من قبل.

وقد أجرى (Healy, L., and Hoyles, C. 1998) دراسة على ما يقرب من (٢٥٠٠) طالباً بالمرحلة الثانوية فى المملكة المتحدة بخصوص التعرف على أداء الطلاب للبرهان الرياضى، واتضح أن هؤلاء الطلاب؛ بما فيهم الطلاب الذين حصلوا على درجات عالية فى هذه المجموعة العمرية، أظهروا نمطاً ثابتاً لأدائهم المنخفض أثناء تكوين البراهين Constructing Proofs

ويذهب (Yuli Tatag,S. 2005: 195) إلى أن القدرة على البرهان تعتمد على أنماط وأشكال المعرفة التى نادراً ما يتم تعريض الطلاب لها، كما أن الحاجة لشرح وتبرير البرهان يلزم الطلاب بتغيير نظرتهم للرياضيات بحيث لم تعد الرياضيات بالنسبة لهم عبارة عن عمليات حسابية فقط، ولكنها تصبح مجالاً للتراكيب المترابطة المتشابكة.

وللتغلب على الصعوبات التى تواجه طلاب الجامعة فى فهم وإدراك وإنتاج البراهين، فقد اقترح كل من (Harel, G., and Sowder, L, 1998) مدخلاً تدريسياً قاما بتطويره باستخدام مشكلات رياضية تم اختيارها بدقة، وأشاروا إليها على أنها "استنتاج واستخراج

البرهان" Proof- eliciting ، كما وصف كل من (Alibert, D., and Thomas, M., 1991) مثالاً ونموذجاً آخر لمدخل تدريسى تم تصميمه لتنشيط وتعزيز الخبرات العميقة للتعلم بداخل مقرر كبير لرياضيات السنة الأولى بالجامعة وهذا المدخل هو "مناقشة البرهان" Proof debates.

وقد حدد (فريدريك، هـ.بل، ١٩٨٧: ١٤٠) مصادر صعوبات البرهان الرياضى لدى العديد من المتعلمين فى مجموعة من النقاط منها :

- عدم وجود شك لدى التلاميذ فى صحة القضية المعروضة، وأن يكون لديهم الرغبة فى القضاء على هذا الشك.
- طرق التدريس التى يتبعها بعض المعلمين، حيث لا يدرسون الطرق المختلفة للبراهين الرياضية بأسلوب محبب.
- بعض المتعلمين يتعلمون حفظ واستظهار البراهين الخاصة بالنظريات والحقائق الرياضية دون فهم لطبيعة البرهان الرياضى واستراتيجياته.

وإذا كان كل ما سبق يشير إلى واقع الحال بالنسبة للصعوبات التى يواجهها المتعلمون-لاسيما فى مرحلة التعليم الجامعى- عند تصديهم لمهارات البرهان الرياضى المباشر، فإن طبيعة الحال أصعب وأقسى عندما يتعرض الطلاب المعلمون شعبة الرياضيات إلى مواقف رياضية تحتاج إلى مهارات برهان غير مباشر للتحقق من صحتها أو للتدليل على صدقها من عدمه. الأمر الذى يؤدى إلى عزوف معظم المتعلمين فى المراحل التعليمية المختلفة، وخاصة المراحل المتقدمة من التعليم، عن ممارسة هذا النوع من البرهان، وكذلك إعراض معظم معلمى الرياضيات فى مراحل التعليم العام عن استخدام هذا النوع من البرهان فى تدريسهم، وقد يرجع ذلك إلى طبيعة الموضوعات الرياضية وعدم التعرض(التجاهل التام) للتدريبات التى توضح كيفية استخدام استراتيجية البرهان غير المباشر، حيث يقتصر استخدام هذا النمط غير المباشر من أنماط البرهان الرياضى على دراسة بعض مقررات الرياضيات فى الكليات المتخصصة مثل كليات التربية التى تعد الطلاب لمهمة تدريس مادة الرياضيات فيما بعد، وهذه المقررات مثل التحليل العددى، التحليل الدالى، الجبر المجرد، والتبولوجى، أو فى أحد موضوعات طرق تدريس الرياضيات.

## منطلقات الدراسة وضرورة إجرائها :

تتمثل منطلقات الدراسة الحالية والضرورة والتى تدعو إلى إجرائها فى مجموعة من النقاط تمثل دوافع بحثية وتعكس أهمية الدراسة الحالية بصورة مباشرة، وهى على النحو الآتى:

١-**طبيعة موضوع الدراسة وأهميته** : حيث يعد موضوع البرهان الرياضى الموضوع القديم الحديث، فهو قديم قدم الرياضيات ونشأتها وحديث حداثة الرياضيات وابتكاراتها(**عبدالله عزب، ٢٠٠٠: ٢٢٥**).

ويعتقد الكثير من الناس أن مجرد معرفة المتعلم بطرق البرهنة المختلفة والتمييز بينها هو دليل على فهم طبيعة البرهان الرياضى، وفى الواقع فإن ذلك غير صحيح، إذ يتطلب فهم طبيعة البرهان أيضاً معرفة الأسس المنطقية التى يقوم عليها وكيفية تطبيقه ليس فقط فى الهندسة كما هو متعارف عليه بين العامة، ولكن فى الجبر، والتفاضل والتكامل، والاحتمالات،... مع ضرورة معرفة المتعلم بدلالة وأهمية طرق البرهنة المباشرة أو غير المباشرة (**نظلة خضر، ١٩٨٤: ٢١**).

ولذلك فإن التوجهات البحثية الحديثة فى مجال مناهج وطرق تدريسها تركز على أسلوب حل المشكلة الذى يتطلب بدوره المزيد من التأكيد على مهارات البرهان الرياضى. (**صلاح عبدالحفيظ، ٢٠٠٣**)؛

**(Laborde, C, 2000), (Martin, T.S., et al, 2005) ،(Sung- T., Huann- S, 2005)**

وتتضح أهمية مفهوم البرهان الرياضى وضرورة التمكن من مهاراته ودواعى الاهتمام بإتقان استراتيجيات البرهنة الرياضية فى مجموعة من النقاط يمكن سردها على النحو الآتى: (**فايز مينا، ١٩٩٤: ٦١-٦٢**)، (**فريدريك، هـ. بل، ١٩٨٧: ١٦١**)، (**محمد الكرش، ١٩٩٩**)؛ (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**)؛

**(Finlow, K., et al, 1993), (De Villiers, M, 1997),(Izen, Stanley, p.1998), (Knuth, Eric, J, 2002-A).**

- يعد مفهوم البرهان الرياضى أحد المفاهيم الأساسية والحاكمة فى الرياضيات المدرسية والتى يمكن أن تبنى فى ضوئها المفاهيم الرياضية الأخرى. كما أن البرهان يشغل حيزاً مركزياً Central Place فى مقررات الرياضيات الجامعية، ويمكن اعتباره المكون المميز للرياضيات Characteristic Component of Mathematics . كما أنه يعد الأداة الأساسية فى إقامة أو فهم أو إدراك أية بنية جديدة للرياضيات.
- ينظر إلى مفهوم البرهان الرياضى على أنه أحد المفاهيم الكبرى الموظفة فى سائر فروع الرياضيات والذى يمكن استخدامه فى إعداد المواقف التعليمية التى تتيح للدارسين فرصة المشاركة وعمل تخمينات واقتراح حلول واكتشاف علاقات.
- يمثل البرهان الرياضى جزءً أساسياً فى بناء الرياضيات المدرسية، فالرياضيات ليست فقط مفاهيم وعلاقات وحقائق يجب حفظها، بل تتضمن أيضاً مشكلات يجب تحليلها

ونظريات يجب برهنتها وتعميمات يجب التحقق من صدقها أو إثبات عدم صحتها، وهذا في حد ذاته من أعظم الأنشطة العقلية التي يمكن أن يمارسها المتعلم.

- تعد معرفة طبيعة البرهان الرياضي هدفاً رئيسياً من أهداف تدريس الرياضيات بصفة عامة والهندسة بصفة خاصة.
- إن دراسة البرهان الرياضي تساعد المتعلم في التعرف على بعض الموضوعات الرياضية التي لا تتاح له إلا من خلال البرهان الرياضي مثل: ليس كل نظرية عكسها صحيح، ومحاولة البرهنة على صحة عكس بعض النظريات، وفهم أنماط البرهان غير المباشر وإدراك السبب في اعتباره برهاناً صالحاً من الناحية المنطقية، وتجنب أخطاء الاستدلال الرياضي مثل: التسرع في استنتاج تعميمات، والتسليم بصحة فروض قبل التأكد من صحتها، والتعرف على طبيعة المثال المضاد Counter- example وكيفية استخدامه للبرهنة على خطأ تعميم رياضي ما.
- إن دراسة البرهان الرياضي والتمكن من مهاراته تساعد الطلاب على استيعاب القوانين وتذكر الحقائق والمفاهيم والمبادئ الرياضية وبناء علاقات رياضية جديدة واستخدامها في إثبات صحة قضية ما.
- إن دراسة البرهان تكسب الطلاب أنماطاً مختلفة من التفكير تساعدهم على النجاح في حياتهم مثل: التفكير التأملي، والتفكير الناقد، والتفكير الإبداعي وغيرها.
- إن التمكن من مهارات البرهان الرياضي وإتقانها يساعد المتعلم في كافة المراحل التعليمية في التغلب على القلق والخوف الذي ينتابه عن التعرض لبرهنة مشكلة رياضية ما، وكذلك تساعد معلم الرياضيات في أثناء الخدمة وقبلها من التغلب على مشكلة قلق البرهان والحذر من تدريس بعض المشكلات الرياضية التي تحتاج إلى برهان أو إثبات صحتها.
- يمكن أن تساعد البراهين النظرية الطلاب في تكوين بنيات عقلية موحدة تحتوي على شبكات من الخبرات الرياضية وعلاقات متبادلة بين تلك الخبرات.
- يمكن أن تؤدي البراهين النظرية دور المنظمات البعدية لخبرات رياضية سبق دراستها، كما يمكن أن تقوم بدور منظمات متقدمة لخبرات تعلم جديدة.
- تعمل البراهين – باعتبارها وسيلة لتعلم الرياضيات – على دعم فهم الطلاب للرياضيات، مع الإشارة إلى أهمية تناسق التمثيل الرمزي.
- تنمية مهارات البرهان الرياضي لدى المتعلمين تشجعهم على تكوين فهم رياضي أعمق، وعمل تقييم لتقدمهم الرياضي، وعمل تنبؤات وتكوين تعميمات وتبرير استدلالهم الرياضي، وتنمية أفكارهم والعمل على انتقالها، والبحث عن اتجاهات تفتح أمامهم مجالات للبحث عن حلول أخرى(براهين جديدة).

ويرى الباحث أن البراهين الرياضية – سواء فى الهندسة أو فى أى فرع من فروع الرياضيات – تقوم بأداء دور غاية فى الأهمية، حيث يؤثر تعليم وتعلم البراهين فى حاضر ومستقبل المتعلمين على اختلاف مستوياتهم وذلك عن طريق إكسابهم التعليل الدقيق لأى حكم يواجههم فى حياتهم وأيضاً عن طريق إكسابهم مهارة التفكير المنطقى فى شتى أمور حياتهم الحاضرة والمستقبلية.

٢-**طبيعة الطلاب مجموعة الدراسة ومتطلباتهم المهنية:** حيث تتمثل مجموعة الدراسة الحالية فى عينة من الطلاب المعلمين تخصص الرياضيات، وقد وقع اختيار الباحث على هذه العينة من الدارسين للاعتبارات الآتية :

- قيام الباحث بالتدريس لهذه المجموعة مقررين فى التربية العملية داخل كلية التربية بصور فى سلطنة عمان وهما: استراتيجيات تدريس الرياضيات، وإتقان محتوى مناهج الرياضيات، بواقع ساعتين لكل مقرر أسبوعياً، مما تتاح معه فرصة الإشراف الكامل على تنفيذ تجربة الدراسة ومتابعة نتائجها، مما يساعد فى التوصل إلى توفير أفضل الظروف لتطبيق الدراسة وأدواتها.
- نتائج العديد من التجارب البحثية السابقة التى أجريت فى مجال البرهان الرياضى، والتى أثبتت وجود قصور واضح ونقص شديد فى الإلمام بمهارات البرهان الرياضى لدى معلمى الرياضيات سواء قبل الخدمة (**رضا مسعد، ١٩٨٤**)، ،(**نبيل محمد عبدالحميد، ١٩٩٥**)، (**إيمان مصطفى، ١٩٩٧**)، (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**)، (**Jones, K, 2000**)، (**Almeida, D, 2003**)، (**Moyer, P. Bolyard, J, 2003**) أو لدى المعلمين القائمين بالفعل بتدريس مادة الرياضيات فى أثناء الخدمة (**محمد عبدالسميع، ١٩٩١**)، (**عبدالله عزب، ٢٠٠٠**) ، (**Knuth, Eric, J., 2002-C**)؛ (**Martin, T.S., et al, 2005**)؛ (**Stylianides, AJ., et al, 2005**)
- اعتقاد الباحث أن موضوع البرهان الرياضى(مفهومه-أهميته-أساليبه-استراتيجيات تدريسه...) يعد أحد أهم المتطلبات المهنية التى يجب على معلم الرياضيات التمكن منها قبل تخرجه فى كليات التربية والاضطلاع بمهمة التدريس حتى يتجنب الكثير من المواقف المحرجة التى يتعرض لها العديد من طلاب كليات التربية أثناء فترة تدريبهم الميدانى فى برنامج التربية العملية، فقد تأكد للباحث من خلال إشرافه على الطلاب معلمى الرياضيات أن نسبة كبيرة من الطلاب المتدربين تصادفهم صعوبات عندما يتعرضون لبرهنة بعض النظريات الموجودة بالكتاب المدرسى المقرر، والأمر يكون أكثر صعوبة عند التعرض لبرهنة بعض المشكلات الرياضية غير المألوفة والتى يضطرون فيها إلى استخدام أساليب برهنة غير مباشرة كما فى حالة إثبات أن العدد $\sqrt{2}$ عدد غير نسبى، والبرهنة على

لانهائية الأعداد الأولية، وإثبات أن العنصر المحايد وحيد، وبرهنة أن المجموعة الخالية هى مجموعة جزئية من أى مجموعة أخرى س.

مما دعا الباحث إلى التفكير جدياً فى محاولة تنمية مهارات البرهان الرياضى من خلال استخدام مداخل (أساليب) مختلفة من البرهنة الرياضية غير المباشرة.

٣-**الحاجة إلى الدراسة الحالية:** تتضح حاجة مجال تعليم الرياضيات إلى الدراسة الحالية فى كونها الدراسة الأولى على المستوى العربى - فى حدود علم الباحث- التى تركز على استراتيجيات تدريس البرهان الرياضى غير المباشر، وكذلك فى حدود ما أمكن للباحث مراجعته والإطلاع عليه من دراسات أجنبية فقد اتضح قلة الدراسات الأجنبية التى تناولت هذه الجزئية. ولعل حاجة المجال إلى مثل هذه الدراسة تنبع من أهمية الموضوع الذى تتناوله وهو البرهان غير المباشر لبعض المشكلات الرياضية، حيث يمثل هذا النمط من البرهان تحدياً لتفكير المتعلمين فى محاولة الوصول إلى إثبات صحة المطلوب بطرق غير مباشرة تعتمد على الإلمام بالمعرفة الرياضية، وهذا فى حد ذاته يظهر القدرات الإبداعية لدى المتعلمين والقدرة على ممارسة أكثر من أسلوب فى التفكير أثناء السير فى خطوات البرهنة، مما يساعد فى تحقيق أهم أهداف تدريس الرياضيات وهى المرتبطة بتنمية أساليب مختلفة من التفكير وتنمية مهارات التواصل فى الرياضيات.

## تحديد مشكلة الدراسة :

تتحدد مشكلة الدراسة الحالية-من خلال ما سبق عرضه- فى تدنى مستويات الطلاب المعلمين شعبة الرياضيات فيما يتعلق بمهارات البرهان الرياضى المباشر وافتقار ميدان تربويات الرياضيات إلى دراسات تهتم بتدريب الطلاب المعلمين على كيفية استخدام أساليب برهنة غير مباشرة خاصة على المستوى العربى. الأمر الذى دفع الباحث إلى اقتراح برنامج لتنمية مهارات البرهنة الرياضية من خلال تدريب الطلاب معلمى الرياضيات على استخدام المداخل (الأساليب) غير المباشرة فى البرهنة، ومحاولة التعرف على أثر هذا البرنامج فى التغلب على مشكلة القلق من تدريس البرهان الرياضى التى تؤرق العديد من الطلاب المعلمين تخصص الرياضيات، وكذلك التعرف على أثر هذا البرنامج فى تحسين مهارات التواصل فى الرياضيات لدى الطلاب المعلمين مجموعة الدراسة.

وللتصدى لدراسة هذه المشكلة، يحاول الباحث الإجابة عن التساؤل الرئيسى الآتى:

"ما فعالية استخدام بعض مداخل(أساليب) غير مباشرة للبرهنة الرياضية فى تنمية مهارات البرهان الرياضى وخفض مستوى قلق البرهان وتحسين مهارات التواصل الرياضى لدى طلاب كليات التربية شعبة الرياضيات"؟

ويتطلب ذلك الإجابة عن التساؤلات البحثية الفرعية الآتية :

١-ما أهم مهارات البرهان الرياضى(المباشر وغير المباشر) التي ينبغى أن يتمكن منها طلاب كليات التربية شعبة الرياضيات؟

٢-ما مستويات هؤلاء الطلاب فى الإلمام بمهارات البرهان الرياضى؟

٣-ما فعالية برنامج مقترح قائم على استخدام بعض المداخل غير المباشرة للبرهنة الرياضية فى تنمية مهارات البرهان الرياضى(المباشر والغير مباشر) لدى الطلاب عينة الدراسة؟

٤-ما فعالية البرنامج المقترح فى خفض مستوى قلق البرهان لدى الطلاب المعلمين عينة الدراسة؟

٥-ما فعالية البرنامج المقترح فى تحسين مهارات التواصل الرياضى لدى الطلاب المعلمين عينة الدراسة؟

٦-ما نوع العلاقة بين مستوى إلمام طلاب المجموعة التجريبية لمهارات البرهان الرياضى ومستوى قلقهم من البرهان الرياضى؟

٧-ما نوع العلاقة بين قدرة طلاب المجموعة التجريبية على التواصل الرياضى ومستوى قلقهم من البرهان الرياضى؟

٨-ما نوع العلاقة بين مستوى إلمام طلاب المجموعة التجريبية لمهارات البرهان الرياضى وقدرتهم على التواصل الرياضى؟

## حدود الدراسة :

تتمثل حدود الدراسة الحالية فى :

١-مجموعة طلاب شعبة الرياضيات بكلية التربية بصور فى الفصل الدراسى الثانى من العام الأكاديمى٢٠٠٥/٢٠٠٦م، حيث يتم التعامل مع طلاب السنة الثالثة رياضيات باعتبارها مجموعة التجريب ويتم التعامل مع طلاب السنتين الثانية والرابعة كمجموعات تجربة استطلاعية بهدف حساب ثبات أدوات الدراسة.

٢- بعض مهارات البرهان الرياضى بصفة عامة، ومهارات البرهان الرياضى غير المباشر بصفة خاصة، والتى سيتم تحديدها من خلال مراجعة الدراسات السابقة وكتابة الإطار النظرى للدراسة الحالية.

## أهميـــة الدراســـة :

بالإضافة إلى ما تمت الإشارة إليه فى منطلقات الدراسة الحالية والدوافع التى تمثـــل ضرورة لإجرائها وحاجة مجال تدريس الرياضيات إلى مثل هذا النوع من الدراسات، يمكـــن توضيح أهمية الدراسة الحالية وأوجه الاستفادة منها فيما تقدمه على النحو الآتى :

١-تقدم الدراسة الحالية قائمة بمهارات البرهان الرياضى بصفة عامة مـــع التركـــيز علـــى مهارات البرهان الرياضى غير المباشر واستراتيجياته وأساليب تدريســـه، وتعـــد هـــذه الجزئية إضافة للدراسات السابقة فى مجال البرهان الرياضى والتى أجريت على طـــلاب الجامعة.

٢-تعتمد الدراسة الحالية على برنامج مقترح يهدف إلى تنمية مهارات البرهان الريـــاضى، ويمكن الاستفادة منه فى التركيز على أساليب البرهان الرياضى غير المباشرة سواء فـــى مقررات الرياضيات المدرسية أو فى مقررات طرق تدريس الرياضيات واســـتراتيجيات التدريس وكفايات التربية العملية التى تدرس داخل كليات التربية مما يساعد فى تمكيـــن الطلاب المعلمين من التعامل مع هذا النمط غير المباشر من البرهنة الرياضية ومن ثـــم رفع مهاراتهم التدريسية المرتبطة بتدريس موضوعات البرهان الرياضى.

٣-يمكن الاستفادة من مقياس قلق البرهان الرياضى الذى تقدمه الدراسة الحالية فى التعـــرف على مستوى قلق البرهان الذى يعترى الكثير من معلمى الرياضيات(قبـــل وفـــى أثنـــاء الخدمة) عند التعرض للنظريات والمشكلات الرياضية التى تحتاج إلى برهنة، فى محاولة للتخفيف أو الحد من هذا القلق حتى يستطيع المعلم تأدية رسالته المنشودة مـــن تدريـــس الرياضيات بكفاءة.

٤-يمكن الإفادة من اختبار مهارات التواصل الرياضى الذى تقدمه الدراسة الحالية فى تصميم وتطوير اختبارات أخرى للتعرف على قدرة الطلاب المعلمين على التواصـــل رياضيـــاً وتنمية مهارات التواصل فى الرياضيات لدى معلمى الرياضيات بكليات التربيـــة وفـــى ميدان التدريس الفعلى.

٥-يمكن أن تفيد الدراسة الحالية مخططى مناهج الرياضيات والقائمين على تطوير المنـــاهج الدراسية لمادة الرياضيات فى مراحل التعليم العام عن طريـــق تضميـــن اســـتراتيجيات تدريس البرهان الرياضى غير المباشر فى الكتب المدرسية المقررة وبالتالى العمل علـــى تحقيق أحد الأهداف المهمة من تدريس الرياضيات المدرسية متمثلاً فـــى تنميـــة أنمـــاط التفكير المختلفة التى يسهم البرهان الرياضى-لاسيما البرهان الرياضى غير المباشر- فى العمل على إكسابها للطلاب.

## المنهج الذى تستند إليه الدراسة الحالية :

تستند الدراسة الحالية إلى :

١-المنهج التحليلى الوصفى: بهدف تحديد المهارات الأساسية للبرهان الرياضى(المباشرة وغير المباشرة) اللازمة للطلاب المعلمين شعبة الرياضيات.

٢-المنهج التجريبى: بهدف التعرف على مدي إلمام الطلاب المعلمين شعبة الرياضيات الذين يمثلون عينة الدراسة الحالية من مهارات البرهان الرياضى اللازمة لهم، وكذلك للتعرف على مستوى قلقهم الرياضى، وأيضاً التعرف على مدى قدرتهم على التواصل فى الرياضيات قبل وبعد تجربة الدراسة. ويتم ذلك من خلال استخدام التحليل الإحصائى المناسب قبل وبعد تطبيق البرنامج المقترح.

## متغيرات الدراسة :

تتمثل متغيرات الدراسة الحالية فى :

١-المتغير المستقل : البرنامج المقترح(تدريس البرنامج المقترح وتدريب الطلاب على محتوياته).

٢-المتغيرات التابعة : وتشمل :

أ- المتغير التابع الأول : تنمية مهارات البرهان الرياضى المباشرة وغير المباشرة.

ب- المتغير التابع الثانى: خفض مستوى قلق البرهان الرياضى.

ج- المتغير التابع الثالث: تحسين مهارات التواصل الرياضى.

## تحديد مصطلحات الدراسة :

تلتزم الدراسة الحالية بتقديم تعريفات إجرائية لمصطلحات الدراسة على النحو الآتى:

**١- البرهان الرياضى غير المباشر :**

**١- مداخل البرهنة غير المباشرة: Indirect Prof Approaches**

يشير(يحيى هندام، ١٩٨٢) إلى أن الطريقة غير المباشرة فى البرهنة (التى يطلق عليها الطريقة التفنيدية) هى الطريقة التى تستخدم لحل نوع خاص من المسائل، وهى طريقة لا تهاجم المشكلة المراد برهنتها بأسلوب مباشر، بل تدرس كل الاحتمالات الممكنة وتفندها، أى تستبعد منها ما يتعارض مع الحقائق أو الفروض المعطاة. وبالتالى يتبقى الاحتمال الدال على صحة المطلوب.

ويرى الباحث أن البرهان غير المباشر: هو ذلك النوع من البرهان الذى يمكن من خلاله التوصل إلى النتيجة المطلوبة دون المعنى المباشر للجملة الرياضية التى نريد إثباتها، أى نستخدم مسار غير مباشر فى البرهان وفى نفس الوقت سوف نحصل على نتيجة منطقية مكافئة للنتيجة التى نحصل عليها من الطريقة المباشرة.

وفى ضوء ما أمكن مراجعته من تصنيفات مختلفة لأساليب وأنماط ومداخل واستراتيجيات البرهان الرياضى، وفى ضوء طبيعة الدراسة الحالية وما تهدف إليه يعرض الباحث لمداخل البرهنة غير المباشرة التى يرتكز عليها البرنامج المقترح فى الدراسة الحالية هى :

- البرهان بالتناقض.
- البرهان بعكس النقيض.
- البرهان باستنفاذ جميع الحالات.
- البرهان على عدم صحة عبارة ما.
- البرهان باستنفاذ الإمكانات الأخرى(البرهان بالاستبعاد-الحذف).

**٢-مهارات البرهان الرياضى: Mathematical Proof Skills**

يلتزم الباحث بالتعريف الإجرائى الآتى لمهارات البرهان الرياضى: "هى سلسلة متتابعة من الأداءات التى يقوم بها الفرد بدقة عندما يريد التصدى لحل مشكلة رياضية معينة أو إثبات صحة قضية ما مستخدماً فى ذلك الاستدلال والمنطق وتقديم الأدلة والشواهد مستنداً فى ذلك إلى مكونات النظام الرياضى من نظريات أو مسلمات أو خصائص رياضية أو نتائج مقبول بصحتها...".

وتنمو هذه المهارات من خلال عملية التدريب والممارسة التى يتعرض لهما الفرد. ويمكن الإستدلال على مستوى الفرد فى الإلمام بمهارات البرهان الرياضى من خلال الدرجة التى يحصل عليها فى اختبار مهارات البرهان الرياضى الذى أعده الباحث لهذا الغرض.

**٣- قلق البرهان الرياضى: Mathematical Proof Anxiety**

يقدم الباحث تعريفاً إجرائياً لقلق البرهان الرياضى على أنه: "شعور الفرد بحالة من الضيق والتوتر تجاه المواقف التى تتطلب استخدام البرهنة الرياضية وإحساسه بالخوف من الفشل فى إتمام عملية البرهان الرياضى مما يدفعه إلى محاولة التخلص من تلك المواقف بالتهرب منها إلى حد الفروق عن ممارسة أية براهين رياضية.

ويمكن الاستدلال على مستوى قلق البرهان الرياضى من خلال درجة المستجيب فى مقياس قلق البرهان الذى أعده الباحث لهذا الغرض.

٤-التواصل الرياضى: Mathematical Communication

يلتزم الباحث بالتعريف الإجرائى الآتى الـذى قدمتـه الرابطـة القوميـة لمعلمـى الرياضيات بأمريكا(NCTM, 1989: 214) للتواصل الرياضى على أنه: "مقدرة الفرد علـى استخدام لغة ورموز وبنية الرياضيات فى التعبير عن الأفكار والعلاقات وفهمها".

وقد أوضح (NCTM) المهارات الفرعية المرتبطة بكل مـن التواصـل الريـاضى الشفهى والتواصل الرياضى التحريرى.

ويرى الباحث أن القدرة على التواصل فى الرياضيات يمكن قياسها لـدى الطـلاب المعلمين في ضوء مجموعة مـن المـهارات الفرعيـة المرتبطـة بـالتواصل الريـاضى الكتابى(التحريرى) وهى :

١-القدرة على تحليل المشكلة الرياضية وتقديم حلول غير نمطية.

٢-القدرة على إعادة صياغة المواقف الرياضية وبصورة رياضية.

٣-تحليل ووصف عملية حل المشكلة الرياضية بدقة مع تقديم الأدلة والبراهين المنطقية.

ويمكن الاستدلال على مستوى قدرة الفرد على عمل تواصل فى الرياضيات من خلال الدرجة التى يحصل عليها فى اختبار مهارات التواصل الرياضى الذى أعـده البـاحث لـهذا الغرض.

## الإطار النظرى والدراسات السابقة

### أولاً: البرهـان الرياضـى :

### ١- ماهية البرهان الرياضى غير المباشر :

يمثل البرهان مفهوماً أساسياً فى الفكر البشرى وفى مجالات الخبرة والتعلم، كما أنـه يعد أحد المفاهيم الأساسية والمركزية فى دراسة الرياضيات بصفة عامة، ومن ثم فالعمل على تنمية مفهوم البرهان هو هدف تربوى رئيسى من أهداف تعليم الرياضيات سواء أكان المتعلـم يتم إعداده للمواطنة الواعية حيث يمثل البرهان أداة التفكير السليم والدقيق، أو كان المتعلم بعد الدراسة علمية تخصصية حيث يمثل البرهان دعامة أساسية فى بناء وتطوير المعرفة عامـة والبنية الرياضية خاصة.

ويقدم (وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦: ١٦٧) تعريفاً للبرهان بمعناه العام على أنه نوع من المعالجة التى تهدف إلى الإقناع بصحة قضية ما من خلال تقديم أدلة تدعو إلى الاقتنـاع إلى حد التأكد من صحة تلك القضية.

ويذكر(**فايز مينا، ١٩٩٤: ٢٤٦**) أن كل إقناع لا يعد برهاناً، فهناك معايير عديدة يمكن أن يبنى على أساسها قبول الفرد ذاته أو غيره من الناس للأدلة التى تقنع أو تدفع الشخص لقبول صحة قضية معينة، فمن أهم هذه المعايير لصحة البرهان والتى لا تستخدم فى الرياضيات: الخبرة الذاتية، قبول وجهات نظر جهات الاختصاص، الملاحظة، ومدى نفع النتائج.

كما يعرض (**فريدريك. بل، ١٩٨٧: ١٤١-١٤٢**) ستة محكات تستخدم على أنها برهان مقنع لقبول قضية ما وهى: ١- الخبرة الشخصية، ٢- قبول ما يصدر عن أصحاب التخصص أو مصادر السلطة. ٣- تعميم الحالات الخاصة. ٤- عدم وجود مثال مضاد. ٥-الاستخدام المفيد للنتائج. ٦-المناقشة الاستنباطية.

ويشير (**وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦: ١٦٩-١٧٠**) إلى تبرير هذه الجزئية من خلال عرض مجموعة من النماذج التى تدلل على التمييز بين البرهان الرياضى ومجرد وسائل الإقناع على النحو الآتى :

أ-الطرق العملية التى نتحقق بها أن مجموع زوايا المثلث ١٨٠° لا تمثل برهاناً، بل هى طريقة للإقناع لأن عدد المثلثات لانهائى وما نقيسه هو حالة واحدة خاصة بمثلث بعينه، أو حتى عدد محدود من الحالات، كما أن عمليات القياس عمليات فيزيائية ودقتها نسبية أى محتمل حدوث أخطاء فى القياس.

ب-نعلم أن ١=١، ١+٣ = (٢)$^{٢}$ ، ١+٣+٥=(٣)$^{٢}$ (١+٣+٥+٧ = (٤)$^{٢}$ .....

إذن: "مجموع الأعداد الفردية المتتالية ابتداء من الواحد الصحيح يساوى مربع عددها"

هذا لا يمثل برهاناً لأنه رغم استناده إلى عبارات صحيحة، إلا أنه اعتمد على حالات خاصة، والقضية الجزئية لا تصلح للحكم على قضية كلية، وبالتالى فهو يمثل تعميماً محتملاً فقط وليس مؤكداً.

ج-إذا كان ١=٣ وإذا كان ٩=٧ إذن ١+٩ = ٣+٧

وهذا ليس برهاناً على أن ١+٩ = ٣+٧ على الرغم أن النتيجة صحيحة، إلا أن هذا الإجراء استند إلى عبارات غير معترف بصحتها(المقدمات غير صحيحة).

ولقد تعددت تعريفات البرهان الرياضى من قبل الباحثين والمهتمين بتربويات الرياضيات، ومن هذه التعريفات: (**رضا مسعد، ١٩٨٤: ١٤**)، (**نظلة خضر، ١٩٨٤: ١١٤**)، (**أحمد سيد أحمد، ١٩٨٩: ٣٤**)، (**وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦: ١٦٧**) :

- متتابعة من التقارير المنطقية بحيث يكون لكل تقرير منها سبب مناسب.

- متتابعة منظمة من تتابع واحد أو أكثر من الاستنتاجات تبدأ من مقدمات مقبولة معترف بصحتها وتنتهى بالنتيجة المطلوبة، وكل تتابع من هذه التتابعات يتكون من عدة جمل رياضية تشتق كل منها من سابقاتها، وكل جملة من هذه الجمل لها تبرير مقبول رياضياً.
- نظام من الاستنتاجات يمكن بواسطته استنتاج صحة القضية موضع الإثبات من المسلمات والقضايا الأخرى التى تم إثباتها من قبل.
- سلسلة من الجمل الخبرية والمرتبطة والموجهة لصدق القضية، ويمكن تبريرها بالإشارة إلى الفروض المعروفة والمقبولة والمصطلحات المعرفة وغير المعرفة والقضايا السابق إثباتها.
- استخدام أنماط معينة من المناقشات(الحجج) لتكوين تقارير(جمل) مركبة(مجمعة) من تقارير أخرى عن طريق استخدام العمليات المنطقية حتى يمكن الوصول إلى نتائج سليمة من الناحية العلمية.
- معالجة لفظية أو رمزية تتمثل فى تتابع من العبارات نستنبط كلاً منها عن سابقاتها استناداً إلى شواهد معترف بصحتها(مثل المسلمات والنظريات والمعطيات) واستنباطاً بأساليب يقرها المنطق. ومن ثم يكون البرهان الرياضى صحيحاً إذا وفقط إذا كانت:

( أ ) الاستراتيجية المستخدمة فى البرهان تعتمد على قضية منطقية صحيحة دائماً.

(ب) العبارات المستخدمة كشواهد مقبولاً بصحتها.

ويقصد بالاستراتيجية هنا: خطة التحرك للوصول إلى هدف محدد وهو إثبات صحة القضية المطلوب البرهنة عليها، وتتضمن الاستراتيجية تتابعاً من التحركات أو الخطوات فى هذه الخطة.

ويصنف البعض استراتيجيات البرهان إلى صنفين يطلق عليهما عادة البرهان المباشر والبرهان غير المباشر(**وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦: ١٧٢-١٧٣**).

والبرهان المباشر: يقصد به إثبات صحة المطلوب نفسه أى أن تتابع من العبارات المستخدمة فى البرهان تؤدى مباشرة إلى العبارة التى تمثل المطلوب ذاته.

أما البرهان غير المباشر: فيقصد به البرهان الذى نثبت فيه عبارة تكافئ المطلوب منطقياً. فقد يطلب منا مثلاً إثبات أن أ← ب فيمكن أن نثبت ذلك باستخدام العبارة المكافئة وهى نفى ب← نفى أ.

ويدخل تحت مظلة البرهان غير المباشر إثبات أنه من المستحيل ألا يكون المطلوب غير صحيح فنفترض مثلاً أن المطلوب غير صحيح ونجد أن هذا يؤدى بنا إلى تعارض أو

تناقض مع المعطيات أو المسلمات أو النظريات المعترف بصحتها. كذلك يمكن فى البرهان غير المباشر أن نثبت أنه لا يمكن أن يحدث إلا المطلوب وذلك عندما يكون المطلوب بمثل حالة من عدة حالات محدودة هى كل ما يمكن أن يحدث نتيجة المعطيات.

**٢-مداخل البرهنة الرياضية غير المباشرة :**

توضح معظم الكتابات التربوية فى مجال تدريس الرياضيات العديد من الاستراتيجيات التى تستخدم فى البرهان الرياضى وتعد تعميماً لصنفى البرهان المباشر وغير المباشر.

فتعرض (**نظلة خضر، ١٩٨٤: ٢٨-٣٠**) لأنواع البرهان الرياضى فيما يأتى :

١- البرهان المباشر. ٢-البرهان بعكس المعكوس. ٣-البرهان بنفى النفى.

٤-برهان الوجود. ٥-البرهان بالتناقض(التعارض).

٦-البرهان بالحذف. ٧-البرهان بالاستنتاج الرياضى.

وتشير(**نظلة خضر، ١٩٨٤: ٢١٨-٢١٩**) إلى أن البرهان بعكس المعكوس أو بالتناقض أو بالحذف أو بنفى النفى هى ما يسميها البعض طرق البرهنة غير المباشرة.

ويعرض(**يحيى هندام، ١٩٨٢: ٢٣-٣٥**) لطرق البرهنة الرياضية على النحو الآتى:

١-الطريقة الاستقرائية. ٢-الطريقة القياسية. ٣-الطريقة التركيبية.

٤-الطريقة التحليلية. ٥-الطريقة التفنيدية.

ويشير"هندام" إلى أن الطريقة التفنيدية هى الطريقة غير المباشرة فى البرهنة، وتستخدم هذه الطريقة لحل نوع خاص من المسائل، وهو النوع الذى يوجد فيه احتمالات واضحة، وهى طريقة لا تهاجم المشكلة مهاجمة مباشرة، بل تدرس كل الاحتمالات الممكنة وتفندها، أى تستبعد منها ما يتعارض مع الحقائق أو الفروض المعطاة، فإذا ثبت خطأ جميع الاحتمالات عدا واحد كان هذا الاحتمال الأخير هو الاحتمال الصحيح قطعاً. فعلى سبيل المثال: إذا كان المطلوب إثبات أن أ ب = ب جـ، فأمامنا ثلاثة احتمالات هى :

إما أب > ب جـ، أو أ ب = ب جـ، أو أ ب < ب جـ. فإذا أثبتنا تناقض أى احتمالين من هذه الاحتمالات مع الفرض لكان الاحتمال الثالث هو الصحيح.

ويصنف (**فريدريك.بل، ١٩٨٧: ١٤٤-١٥٩**) أساليب البرهان الرياضى إلى تسعة أساليب هى :

١- قانون الوضع المنطقى. ٢-الانتقالية. ٣-قانون الرفع المنطقى.

٤-نظرية.الاستنباط. ٥-عكس النقيض. ٦-البرهان باستنفاذ جميع الحالات.

٧-الاستقراء(الاستنتاج)الرياضى.

٨-البرهان غير المباشر بفكرة المثال المضاد.

٩-البرهان غير المباشر عن طريق رفض التناقض(التعارض).

ويشير "بل" إلى أن أول سبعة أساليب هى من نوع البرهان المباشر، وأن الأسلوبين الأخيرين من نوع البرهان غير المباشر فى حين يرى أن الأسلوبين(٥)،(٦) أى البرهان عن طريق عكس النقيض، والبرهان باستناد جميع الحالات ينتميان كذلك إلى أنماط البرهان غير المباشر.

وعلى أية حال ودون الدخول فى تفصيلات تعريف كل أسلوب من هذه الأساليب التسعة، يعرض الباحث فيما يأتى تصنيف كل من "تشاندلر"، **(وليم عبيد وآخرون)** لأساليب واستراتيجيات البرهان الرياضى وذلك لوجود مقابلة وأوجه شبه كبيرة بين كل من هذين التصنيفين وتصنيف"بل".

يرى "تشاندلر" "Schandler" **(فى : نبيل محمد عبدالحميد، ١٩٩٥: ٤٣)** أن من أهم الأساليب التى يمكن استخدامها فى برهنة النظريات الرياضية هى :

١-البرهان المباشر بالاستنباط فإذا كان المطلوب إثبات أن ق← ك، نبدأ بفرض صحة ق(المعطيات) ونستنتج صحة ك(المطلوب) من خلال سلسلة من العبارات الشرطية التى يمكن التعبير عنها بالرموز على الصورة : ق← ن ← م← ر← ك

٢-البرهان بالاستنتاج الرياضى.

٣-المثال المضاد.

٤-البرهان بالتعارض: وفيه يتم إثبات صحة التقرير(ك) عن طريق إثبات تعارض مع النتائج التى تؤدى إليها( ر٨ ن ر) وتعنى إثبات ونفى التقرير ر فى نفس الوقت.

٥-البرهان غير المباشر: ويستخدم عندما يصعب برهنة تقرير فى الصورة (ق← ك) بصورة مباشرة، ويكون من السهل برهنة التقرير المكافئ (ن ك ← ن ق) أى نفى المطلوب يؤدى إلى نفى المعطيات.

ويعرض**(وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦: ١٧٣-١٩٦)** عشرة استراتيجيات تستخدم فى البرهان الرياضى على النحو الآتى :

١-البرهان على صدق عبارة شرطية.

٢-استخدام سلسلة من العبارات الشرطية.

٣-استنفاد جميع الحالات: عندما تكون العبارة المطلوب إثبات صحتها تمثل موقفاً عدد إمكاناته محدود فإننا نثبت(نحقق) صحة كل حالة من تلك الإمكانات، وبذلك تكون العبارة صحيحة على الإطلاق أى فى جميع حالاتها.

٤-البرهان على وجود حل.

٥-إثبات عدم صحة عبارة ما: يمكن أن يتم ذلك بأحد طريقتين :

أ- إيجاد تعارض نتيجة لقبول صحة العبارة.

ب-إثبات عدم صحة التعميم(مثال مضـــاد).

٦-البرهان باستخدام الاستقراء الرياضى(الاستنتاج الرياضى).

٧-البرهان باستخدام الشرط اللازم والكافى.

٨-استخدام مبدأ عدم التعارض: قد يكون المطلوب إثبات صحة عبارة معنية ولتكن ك. وقد لا نستطيع إثبات ذلك بطرق مباشرة. فنفترض عدم صحة ك(أى نفترض صحة نفى ك) ثم نثبت أن (نفى ك) يؤدى إلى تعارض (تناقض) مع المعطيات أو مع إحدى حقائق النظام الرياضى المعترف بها، وحيث أن مبدأ التعارض مرفوض من الناحية المنطقية فنستنتج أن (نفى ك) لا يمكن أن يكون صحيحاً، ومعنى ذلك أن ك هى الصحيحة استناداً إلى القضية المنطقية نفى النفى إثبات، وبالتالى يتم إثبات المطلوب.

٩-استنفاذ الإمكانات الأخرى: قد يكون المطلوب هو إثبات واحد من عدد محدود من الإمكانات. عندئذ يمكن إثبات صحة المطلوب عن طريق إثبات استحالة صحة الإمكانات الأخرى. فإذا كان لدينا موقف كل إمكاناته مثلاً هى ك أو ر أو م أو ن. وكان المطلوب هو إثبات صحة ك، فإنه إذا أمكن إثبات استحالة صحة ر، و واستحالة صحة م، و واستحالة صحة ن (أى إثبات نفى كل من ر، م، ن) فإنه بذلك يكون قد تم إثبات صحة ك.

١٠- استخدام عكس النقيض: قد يكون المطلوب هو إثبات صحة عبارة شرطية (ق←ك). ولكن بدلاً من إثبات هذه العبارة يمكن إثبات عبارة مكافئة لها وهى (نفى ك← نفى ق) وهذه الصورة هى عكس النقيض للعبارة الأصلية.

ويشير(فريدريك. بل ١٩٨٧: ١٦٤) إلى مبدأ مهم فى مجال البرهنة الرياضية بقوله: "لا يوجد مدخل يمكن اعتباره أفضل مدخل للبرهان النظرى، ففى بعض الأحيان يكون من المفيد أن نبدأ بالمعطيات، وفى حالات أخرى يكون من المناسب أن نبدأ بتحليل المطلوب، وفى حالات أخرى يمكن أن يكون مفيداً أن نبدأ ببعض العلاقات الوسيطة. ويجب أن يمارس الطلاب براهين بسيطة فى الحساب باستخدام صيغ بسيطة للبرهان المنطقى، ويمكن ممارسة البرهان فى الجبر باستخدام البرهان باستنفاذ جميع الحالات الممكنة وصيغة الاستقراء الرياضى، ويمكن فى الهندسة استخدام صيغ البرهان الأكثر تعقيداً مثل صيغ عكس النقيض ونظرية الاستنباط والبرهان غير المباشر.

ومن خلال ما سبق عرضه من تصنيفات مختلفة لأنماط البرهان الرياضى يمكن استنتاج ما يأتى :

- لا يوجد اتفاق(نقطة التقاء) حول مسميات تصنيفات البرهان الرياضى، فقد وردت كلمات: أساليب البرهان، أنماط البرهان، استراتيجيات البرهان، أنواع البرهان، طرق البرهنة، مداخل البرهان.
- تلتقى كل هذه التصنيفات حول مجموعة من الأساليب(الاستراتيجيات-طرق البرهنة) وإن اختلفت مسمياتها فى كل تصنيف.
- تتفق كل هذه الكتابات التى تناولت تصنيفات البرهان الرياضى حول وجود نمطين من أنماط البرهنة الرياضية هما نمط البرهان المباشر، ونمط البرهان غير المباشر.
- أسلوب البرهان المباشر بالاستنباط عند "تشاندلر" Schandler يقابل أسلوب الانتقالية عند "بل" Bell، وفى نفس الوقت يقابل استراتيجية البرهان عن طريق استخدام سلسلة من العبارات الشرطية عند (وليم عبيد وآخرون).
- أسلوب البرهان غير المباشر عند "تشاندلر" يقابل أسلوب عكس النقيض فى تصنيف كل من "بل"، (وليم عبيد وآخرون).
- أسلوب البرهان بالتعارضProof by Contradiction الذى أشار إليه "تشاندلر" يقابل أسلوب البرهان غير المباشر عند "بل"، ويقابل أسلوب استخدام مبدأ عدم التعارض عند(وليم عبيد وآخرون).
- أسلوب البرهان باستخدام المثال المضاد Counter Example عند "تشاندلر" يقابل أسلوب البرهان باستخدام فكرة المثال المضاد الذى أشار إليه "بل"، وقد أشار إليه(وليم عبيد وآخرون) فى استراتيجية إثبات عدم صحة عبارة ما(الجزء الخاص بإثبات عدم صحة التعميم).
- تتفق "نظلة خضر" فى تصنيفها لأنواع البرهان الرياضى مع ما سبق عرضه من تصنيفات، حيث ترى أن طريقة البرهنة غير المباشرة تتمثل فى البرهان بعكس المعكوس، أو بالتناقض أو بالحذف أو بنفى النفى.
- يطلق "يحيى هندام" اسم الطريقة التفنيدية على طريقة البرهان غير المباشر، والطريقة التفنيدية عند "هندام" هى مزيج من البرهان بالتعارض عند كل من "بل"، و"تشارلز" واستراتيجية البرهان عن طريق استنفاد كل الإمكانات الأخرى عند "وليم عبيد وآخرون".

وفى ضوء ما أمكن عرضه من تصنيفات مختلفة لأساليب وأنماط ومداخل واستراتيجيات البرهان الرياضى، وفى ضوء طبيعة الدراسة الحالية وما تهدف إليه، يرى الباحث أن أساليب البرهان الرياضى غير المباشر (مداخل البرهنة الرياضية غير المباشرة) والتى يرتكز عليها البرنامج المقترح فى الدراسة الحالية هى :

١-البرهان بالتناقض(التعارض).

٢-البرهان بعكس النقيض.

٣-البرهان باستنفاد جميع الحالات.

٤-البرهان على عدم صحة عبارة ما.

٥-البرهان باستخدام استنفاذ الإمكانات الأخرى(برهان بالحذف أو الاستبعاد).

**٣- مهارات البرهان الرياضى :**

يتمثل الهدف الأساسى من الدراسة الحالية فى تنمية مهارات البرهان الرياضى بصفة عامة لدى معلمى الرياضيات قبل الخدمة (طلاب كلية التربية تخصص رياضيات)، وذلك انطلاقاً من أهمية الكفايات التدريسية التى يجب أن يتقنها المعلم ولاسيما كفايات تدريس البرهان الرياضى، حتى يتمكن من إكسابها لطلابه بالأسلوب الصحيح.

وقد راجع الباحث العديد من الدراسات السابقة، وكذلك العديد من الكتابات التربوية فى مجال تعليم الرياضيات بشأن التعرف على أهم مهارات البرهان الرياضى التى ينبغى أن يتمكن منها معلم الرياضيات. ويمكن عرض هذه الدراسات على النحو الآتى :

استهدفت دراسة(**رضا مسعد، ١٩٨٤**) التعرف على مدى فهم طلاب كليات التربية لطبيعة البرهان الرياضى، وحدد مهارات البرهان الرياضى فى :

أ- مهارات التخطيط للبرهان: تحليل التمرين إلى شكل- تحديد المعطيات والمطلوب على شكل علاقة رمزية- تصور خطة عامة للبرهان وإجراء العمل اللازم.

ب- مهارات بناء تتابعات البرهان الرياضى: اشتقاق نتائج مفيدة من المعطيات مع التبرير- الربط بين النتائج التى تم التوصل إليها فى اتجاه الوصول إلى المطلوب.

ج- مهارات صياغة البرهان: التعبير الكتابى عما تم استنتاجه بطريقة رياضية سليمة- استكمال الحل وصياغته.

د- مهارات تقويم البرهان: عن طريق الحكم على صحة البرهان ومعقولية النتائج مع التبرير.

وحدد(**أحمد سيد أحمد، ١٩٨٩**) قائمة بمهارات البرهان الرياضى المباشر فى الهندسة، قام بتصنيفها إلى أربعة محاور تكاد تتفق إلى حد كبير مع تصنيف(**رضا مسعد، ١٩٨٤**) وهى: مهارات التخطيط للبرهان، مهارات بناء تتابعات البرهان، مهارات صياغة البرهان، مهارات تقويم البرهان، ثم قام بتضمين كل محور منها المهارات الجزئية التى تندرج تحته.

وهدفت دراسة(**محمد عبدالسميع، ١٩٩١**) تحديد مهارات البرهان الرياضى اللازمة لإعداد معلم الرياضيات، وتوصل إلى قائمة بتلك المهارات تم تضمينها فى بطاقة لملاحظة أداء معلمى الرياضيات بالحلقة الثانية من التعليم الأساسى.

وقد احتوت القائمة على(٣٠) مهارة من مهارات البرهان الرياضى مندرجة تحت ثلاثة محاور هي : طبيعة البرهان الرياضى (١٠ مهارات)، استراتيجيات تقديم البرهان الرياضى(١٠ مهارات)، مسارات التفكير فى البرهان الرياضى(١٠ مهارات).

وتوصل(**خالد الجوهرى، ١٩٩٤**) فى دراسته إلى أن المتطلبات الأساسية لعملية البرهنة التى يجب توافرها لدى التلميذ هى :

أ- متطلبات تتعلق باستيعاب التلميذ للتمرين أو النظرية.

ب- القدرة على الاستدلال.

ج- فهم الأساس المنطقى للبرهان غير المباشر، ويتضمن ذلك :

(١) القدرة على معرفة لماذا يفرض عكس المطلوب.

(٢) معرفة دلالة التناقض الذى يصل إليه من خلال الفرض.

د- فهم الأساس المنطقى للبرهان باستنفاذ الحالات، ويتضمن ذلك :

(١) القدرة على حصر جميع الحالات الممكنة.

(٢) معرفة دلالة أن جميع الاحتمالات خطأ عدا احتمال واحد.

وقد صنف (**إبراهيم عشوش، ١٩٩٦**) مستويات التفكير الهندسى "لفان هيلى" إلى أربعة مستويات، وتمثل المستوى الرابع منها فى الاستدلال الشكلى Formal Deducation ثم قام بتقسيم هذا المستوى إلى مستويين فرعيين هما: الاستدلال Deduction، البرهان الهندسى-Geometric- Proof، ويمكن للتلاميذ فى هذا المستوى القيام بالأنشطة الآتية والتى تمثل مهارات برهان رياضى: استنتاج نتائج صحيحة من مقدمات أو معلومات معطاة. التعرف على الشروط الضرورية والكافية لشكل ما.

- إدراك تكافؤ التعاريف المختلفة لنفس المفهوم-إدراك العلاقات بين المفاهيم الهندسية. التعرف على ما هو معطى وما هو مطلوب.
- رسم مسألة معطاة رسماً صحيحاً. تحديد العمل إن وجد فى مسألة معطاة.
- استخدام خطوات الاستدلال والأدوات المنطقية مثل(.. ، ∴) أ، (إذا كان.... فإن ....) فى البرهان الهندسى.
- كتابة برهان كامل لإثبات صحة تمرين ما.
- إعطاء أكثر من تفسير لخطوات برهان معطى.
- إكمال براهين ناقصة معطاة له.

واستهدفت دراسة (**محمد الكرش، ١٩٩٩**) التعرف على أثر تدريس وحدة بمساعدة الكمبيوتر فى التحصيل وتنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب الصف الأول الثانوى، وتم وضع قائمة بمهارات البرهان الرياضى اشتملت على(١٤) مهارة فرعية تم إدراجها فى أربعة محاور رئيسية هى: مهارات تحويلية(٥ مهارات فرعية)، مهارات بناء تتابعات البرهان(٤ مهارات فرعية)- مهارات صياغة البرهان(مهارتان)- مهارات مراجعة البرهان(ثلاث مهارات فرعية).

بينما استهدفت دراسة (**عزو عفانة، ٢٠٠١**) تنمية مهارات البرهان الهندسى لدى طلاب الصف السابع الأساسى بغزة فى ضوء مدخل"فان هايل". وقد حدد الباحث مهارات البرهان الهندسى فى: مهارة رسم المسألة-مهارة تحديد المعطيات والمطلوب-مهارة استنتاج مضامين هندسية-مهارة إثبات صحة أو خطأ برهان هندسى- مهارة صياغة برهان هندسى فى ضوء الفكرة العامة وإعطاء المطلوب- اختيار فكرة الحل المناسبة للوصول إلى المطلوب. - إجراء عمل على الرسم فى ضوء الفكرة العامة للحل.

أما دراسة (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**) فقد استهدفت التعرف على أوجه القصور وأوجه القوة المرتبطة بمهارات البرهان الرياضى لدى الطلاب المعلمين بشعب الرياضيات فى كليات التربية، ومن أجل ذلك فقد أعد قائمة بمهارات البرهان الرياضى، اشتملت على ثلاث مهارات رئيسية هى:

١-مهارات التخطيط للبرهان الرياضى، وقد تضمنت ثلاث مهارات فرعية.

٢-مهارات بناء وصياغة البرهان والتعبير عنه، وقد تضمنت ست مهارات فرعية.

٣-مهارات تقويم البرهان الرياضى، وقد تضمنت ثلاث مهارات فرعية.

وقد اشتملت قائمة مهارات البرهان الرياضى المستهدف قياسها فى الدراسة ثمانية مهارات هى :

١-ترجمة القضية(المسألة) الرياضية موضع البرهان إلى صورة رياضية مناسبة.

٢-كتابة معطيات القضية الرياضية لفظيا بصورة إجرائية رمزية.

٣-كتابة مطلوب القضية الرياضية المصاغة لفظيا بصورة إجرائية رمزية.

٤-اشتقاق تقرير رياضى(نتيجة) من معطى أو من هندسة الشكل أو من نظرية سابقة فى النظام الرياضى.

٥-اشتقاق تقرير رياضى جديد من تقرير رياضى سابق فى متتابعة البرهان بشرط أن يكون التقرير المشتق فى اتجاه المطلوب المراد الوصول إليه.

٦-الربط بين تقريرين سابقين فى متتابعة البرهان للوصول إلى المطلوب.

٧-كتابة سبب لكل خطوة(تقرير رياضى) من خطوات البرهان.

٨-التوصل إلى مطلوب القضية الرياضية موضع البرهان من خلال متتابعة البرهان المسجل كتابة.

ويتضح من مجموعة الدراسات السابق عرضها ما يأتى :

- اتسع مجال اهتمام هذه الدراسات حيث تناولت مهارات البرهان الرياضى فى مراحل التعليم العام بمختلف مستوياته، وكذلك شملت مرحلة التعليم الجامعى موضع اهتمام الدراسة الحالية.
- اهتمت كل دراسة من هذه الدراسات بتحديد قائمة بمهارات البرهان الرياضى اللازمة للمتعلمين عينة الدراسة، وإن اختلفت فى تصنيفاتها إلا أنها تتفق حول مهارات معنية ينبغى توافرها لدى المتعلمين فى مختلف المستويات التعليمية.
- من الدراسات التى اهتمت بتحديد مهارات البرهان الرياضى اللازمة لمعلمى الرياضيات أو للطلاب المعلمين، (**دراسة رضا مسعد، ١٩٨٤**)، دراسة (**محمد عبدالسميع، ١٩٩١**)، ودراسة(**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**) وإن كانت دراسة (**محمد عبدالسميع، ١٩٩١**) قد انصب اهتمامها على تقويم أداء معلمى الرياضيات بالحلقة الثانية من التعليم الأساسى لمهارات البرهان الرياضى، أى اهتمت بالمهارات التدريسية اللازمة للبرهان الرياضى، وليست مهارات البرهان التى يتبعها المعلم فى حل مشكلات أو برهنة نظريات رياضية. ويعد التصنيف الذى قدمه كل من (**رضا مسعد، ١٩٨٤**)، (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**) لمهارات البرهان الرياضى أقرب التصنيفات إلى طبيعة الدراسة الحالية، وإن كان كل منهما قد ركز على مهارات البرهنة المباشرة دون التوصل لمهارات البرهان غير المباشر.
- لم تتعرض أية دراسة فى مجموعة الدراسات السابقة-سواء التى عرضها الباحث فى هذا البند أو التى سيتم عرضها فى البند اللاحق الخاص بتنمية مهارات البرهان الرياضى- لمهارات عملية البرهنة الرياضية باستخدام أساليب برهان غير مباشر سوى دراسة (**خالد الجوهرى، ١٩٩٤**) حيث أشار إلى أنه من بين المتطلبات الأساسية لعملية البرهنة التى يجب توافرها لدى التلميذ هو فهم الأساس المنطقى للبرهان غير المباشر، وفهم الأساس المنطقى للبرهان باستنفاذ الحالات.
- ومن الملاحظ على كل هذه الدراسات بصفة عامة أن اهتمامها انصب على تحديد قائمة بمهارات البرهان الرياضى المباشر وخاصة فى الهندسة، أو اهتمت بتحديد استراتيجيات تدريس البرهان الرياضى، ولم تهتم أى من هذه الدراسات-وما أمكن للباحث مراجعته فى مجال البرهان الرياضى بصفة عامة- بتحديد أو حتى الإشارة إلى المهارات المتعلقة بأساليب البرهان غير المباشر. الأمر الذى دعا الباحث إلى إعداد قائمة بمهارات البرهان

الرياضى بصفة عامة متضمنة المهارات المرتبطة باستخدام مداخل البرهنة غير المباشرة.

**٤- تنمية مهارات البرهان الرياضى :**

تحتاج مهارة البرهنة إلى ممارسة وألفة منذ بداية مراحل التعليم، فالهدف التربوى الذى ننشده جميعا هو مساعدة التلميذ على أن يكون رياضيا يتعلم بنفس الأسلوب الذى يعمل به عالم الرياضيات، فيفكر ويكتشف ويقبل التحدى ويخمن ويشعر بالحاجة إلى إثبات صحة ما توصل إليه، ويمارس المتعة الذهنية فى الوصول إلى البرهان فيكتسب مزيدا من الخبرة ويقبل مزيدا من التحدى حتى تصبح الرياضيات متعته المفضلة.

وبمراجعة الباحث للعديد من الدراسات العربية والأجنبية فى مجال البرهان الرياضى وأساليب تنميته لدى الطلاب فى مختلف المراحل التعليمية، اتضح اهتمام عدد كبير من هذه الدراسات بطلاب مراحل التعليم العام-ما قبل الجامعى- ومن هذه الدراسات: (**رضا مسعد، ١٩٨٤**)، (**محمد محمود مصطفى، ١٩٨٧**)، (**خليفة عبدالسميع، ١٩٨٧**)، (**مكة البنا، ١٩٨٨**)، (**أحمد سيد أحمد، ١٩٨٩**)، (**محمد عبدالسميع، ١٩٩١**)، (**محمد مسعد نوح، ١٩٩٢**)، (**خالد الجوهرى، ١٩٩٤**)، (**إبراهيم عشوش، ١٩٩٦**)، (**محمد الكوش، ١٩٩٩**)، (**إلياس أبو يونس، ٢٠٠٠**)، (**عزو عفانة، ٢٠٠١**)، (**صلاح عبدالحفيظ، ٢٠٠٣**)، (**محمد عيد حسن، ٢٠٠٣**)

كما راجع الباحث بالدراسة والتحليل-من خلال الشبكة الدولية للمعلومات Internet - العديد من الدراسات الأجنبية التى تركز اهتمامها على التلاميذ فى مختلف المستويات التعليمية باعتباره المحور الذى تدور حوله عملية تعليم وتعلم الرياضيات وخاصة فيما يتعلق بالبرهان وكيفية إجراء البرهنة الرياضية، ومن هذه الدراسات: دراسة **(Moyer, P.S., Boly ard, J.J, 2003)** والتى هدفت إلى استخدام أشكال فن فى تنمية قدرات التلاميذ فى مجال البرهان والتعليل الرياضى من خلال مناقشات رياضية عن طريق لعبة لتصنيف الأشياء تبعا لخواصها.

كما هدفت دراسة **(Almeida, Dennis, 2003)** إلى تنمية اتجاهات طلاب المرحلتين الثانوية والجامعية نحو البرهان الرياضى من خلال تقديم تصميم مقرر للأصل التاريخى للرياضيات الحديثة يساعد الطلاب فى اكتشاف معنى للبرهان. وقد أشارت نتائج الدراسة إلى وجود نقص مستمر فى فهم الطلاب للبرهان على الرغم من أهمية قراءة وكتابة البراهين كسمة مميزة للرياضيات بالمرحلة الجامعية.

وهدفت دراسة (Valentine, C,. et al., 2005) إلى تنمية مفاهيم البرهان فى الصف السادس، وقد تركزت الدراسة على التفاعل بين المعلم والتلاميذ فى تطور كيفية إثبات الطلاب لتخمينهم فيما يتعلق بخاصية الإبدال فى عملية الضرب.

وأشارت دراسة (Knuth, Eric, J, 2002-A) إلى البرهان الرياضى باعتباره وسيلة لتعلم الرياضيات، حيث تناولت الدور الذى يؤديه البرهان فى إثبات النتائج الرياضية، كما أوضحت أن البراهين تعمل على دعم فهما للرياضيات، مع الإشارة إلى أهمية تناسق التمثيل الرمزى.

واستهدفت دراسة (Sommer, R., Nuckols, G 2004) التعرف على استخدام بيئة EPGY لإثبات النظرية وهو عبارة عن برنامج كمبيوترى يستخدمه الطلاب فى كتابة البراهين الرياضية فى مجموعة مختارة من مقررات الرياضيات المعتمدة على الكمبيوتر والملئية بالبراهين فى المرحلتين الثانوية والجامعية، حيث أجريت الدراسة على(١٧٠) طالبا ممن يدرسون مقرر EPGY الخاص بهندسة الثانوية العامة، حيث يسمح هذا النظام بسهولة إدخال التعبيرات الرياضية، وتطبيق استراتيجيات البرهان النموذجية، وتطبيق القواعد الرياضية وإثبات صحة الاستنتاج المنطقى، ويستخدم ذلك النظام التفكير التلقائى والحساب الرمزى فى إثبات صحة كل خطوة من خطوات البرهان.

وقد أعدت "كارولين ماهر" (Maher, Carolyn. A, 1996) دراسة طولية تتبعية أجريت على مدى خمس سنوات لتتبع تطور فكرة التفكير الرياضى لدى طفلة واحدة تدعى Stephanie منذ الصف الأول إلى الخامس. وتعد هذه الدراسة إحدى الدراسات القليلة المرتبطة بتنمية أفكار الأطفال عن البراهين، وقد أوضحت الدراسة أنه عندما يكون لدى الأطفال وقتا كافيا للقيام بنشاط ما، وعندما يتم تشجيعهم على المشاركة فى مناقشة ما توصلوا إليه من نتائج عليها. وتؤكد "كارولين ماهر" فى هذا الصدد على أن هناك ظروفا معينة تشجع الطلاب على عمل مناقشات داخل الفصول، وهذه الظروف تشمل :

١-إتاحة الفرص للطلاب للعمل فى مختلف السياقات الاجتماعية.

٢-محاولة جعل المنهج أكثر مرونة بحيث يتيح للطلاب الاستمرار فى مناقشة المشكلة أو فى تتبع فكرة جديدة.

٣-محاولة منع المعلم من إخبار الطلبة ما الذى ينبغى أن يفعلوه.

٤-وجود تدريس موجه نحو تفكير الطالب.

ويتضح من تلك الاقتراحات وجود ضرورة لتغيير دور المعلم فى أثناء مساعدته لطلابه بحيث يتغير دوره من مجرد إبلاغ الطلاب بالمعلومات إلى التوجيه، وهكذا يتم تنظيم بيئة الصف الدراسى بطريقة تشجع الطلاب على البحث واستكشاف البراهين.

وبذلك يمكن أن يؤدى المعلم دورا مركزيا فى تنمية استكشاف الطالب، حيث يتغير دوره من كونه موصلا للمعلومات إلى كونه وسيطا وملاحظا لتفكير الطلاب، وكما يقوم المعلمون بمراقبة تفكير طلابهم، فإنهم يصبحون كذلك قادرين على وضع أسئلة فى أوقات معينة بحيث تشجع الطلاب على تكوين فهم رياضى أعمق وتشجعهم على تقييم تقدمهم وعمل تنبؤات وتكون تعميمات وتبرير تفكيرهم أو استدلالهم الرياضى Mathematical Reasoning، وتنمية أفكارهم وانتقالها، وأن يبحثوا عن اتجاهات بديلة تفتح أمامهم مجالات جديدة للبحث عن حلول أخرى(براهين جديدة) بدلا من توحدها فى الاتجاه للتوصل إلى الحل، فمن خلال التفاعلات الاجتماعية التى تظهر فى حجرة الدراسة تتاح الفرص للطلاب لعمل تخمينات وتقديم حلول واستكشاف أمثلة مضادة بغرض استكشاف التخمينات ومحاولة إقناع الآخرين بمدى صدق أو تمثيل أو حل أو تخمين إجابة معينة **(Burns, M, 1985: 17) (Balacheff, N, 1988), (Maher, C.A, 1988), (Martino, A., Maher, C, 1994)**

وتؤكد ذلك نتائج الدراسة التى قام بها **(Simon,M.,and Glenn,B,1996:3-31)**

حيث يشيران إلى أن المعلم يلعب دورا مهما فى المساعدة على تأسيس مجتمع رياضياتى داخل حجرة الدراسة والذى يتم فيه رؤية الفهم الرياضى على أنه شيئا مهما ومناسبا. ويضيف كل من **(Yackel, E., and Paul Cobb, 1996: 488-499)** أن المعلم باعتباره ممثلا للمجتمع الرياضياتى، بل ومؤسسا له، تقع على عاتقه المسئولية الأساسية فى إقرار وإثبات ما يتم اعتباره تبريرا أو تفسيرا رياضيا مقبولا داخل مجتمع الدراسة.

وعن الدور الذى يمكن أن تؤديه برمجيات الكمبيوتر فى تنمية البرهان الاستدلالى يشير **(Izen,S,P, 1998: 718)** فى دراسته إلى أنه بالرغم من أن برمجيات الكمبيوتر تمدنا بدليل قاطع على صحة نظرية ما من خلال ما تتيحه للطالب من تركيب للأشكال السهلة والمعقدة وسهولة قياس الأطوال والزوايا والمساحات والمحيطات...، إلا أن ذلك ليس بالضرورة برهانا، فالعديد من النظريات لا تصلح للدراسة عن طريق تطبيقات الكمبيوتر، وسواء قام الفرد بدراسة الهندسة باستخدام الكمبيوتر أم لا، فإن البرهان الاستدلالى ما زال مهما للعديد من الأسباب.

ولما كان من الصعوبة بمكان استعراض جميع الدراسات التى أمكن التوصل إليها فى مجال البرهان الرياضى وأساليب تنميته لدى المتعلمين فى مختلف مراحل التعليم قبل الجامعى(*)، لذلك يعرض الباحث فيما يأتى بعض الدراسات السابقة فى مجال الدراسة الحالية والتى تتفق وطبيعة الدراسة الحالية، وهى الدراسات التى اهتمت بالتعرف على مهارات البرهان الرياضى وأساليب تنميته لدى معلمى الرياضيات القائمين بتدريس مادة الرياضيات فى حياتهم العملية أو لدى الطلاب معلمى الرياضيات بكليات التربية.

ويمكن توضيح توجهات هذه الدراسات على النحو الآتى :

هدفت دراسة **(Knuth, Eric., Eliott, Robekahl, 1998)** إلى فحص طبيعة فهم طلاب الجامعة للبرهان الرياضى من خلال مناقشة خصائص استجابات الطلاب التى يمكن توقعها أثناء أدائهم لمهام رياضية تتطلب تبريرات لحلولهم. وقد تم استخدام المستويات الأربعة للبرهان الرياضى التى حددها "بالاشيف" **(Balacheff, N, 1988)**. ومن خلال فحص استجابات الطلاب لمسائل رياضية فى هندسة الدائرة، اتضح أنها تقدم نموذجا لكل مستوى من المستويات الأربع التى استخدمها "بالارشيف" وخاصة فى مستوى المثال النوعى generic example، ومستوى تجريب الأفكار Though experiment

وتمثل الهدف من دراسة **(Jones, Keith, 2000)** فى مراجعة ما هو معروف بخصوص خبرة طلاب الجامعة بالبرهان الرياضى، وإعطاء بعض الأدلة الخاصة بتصورات البرهان الرياضى التى يقدمها طلاب الدراسات العليا حديثى التخرج والذين سيقومون بتدريس مقررات رياضيات المرحلة الثانوية. حيث تشير الأدلة إلى أن الطالب الجامعى ربما ينتهى من دراسته الجامعية دون أن يكون قادرا على تكوين صورة كاملة لمكونات البرهان وكيفية تطويره. وبالفعل توصلت نتائج الدراسة إلى وجود خبرات محدودة لدى معلمى ما قبل الخدمة عن مقدرات البرهان للطلاب الذين يبدأون فى تدريس الرياضيات بالمدرسة الثانوية.

واستهدفت دراسة (**محمد عبدالسميع، ١٩٩١**) تحديد مهارات البرهان الرياضى اللازمة لإعداد معلمى الرياضيات، وكذلك تحديد مستوى أداء المعلمين عينة الدراسة لتلك

---

(*) لمزيد من القراءات عن البرهان وأساليب تنميته فى مراحل التعليم قبل الجامعى يمكن الإطلاع على:

- De Villers, M (1998)
- Caruti, R., et al, (1998)
- Luengo, V& Leibniz, L. (1999)
- Lithner, J.(2000).
- Mariotti, M.A. (2000).
- Marrades. R & Gutierrez, A. (2000).
- Miyazaki, M. (2000).
- Mariotti, M.A. (2005)
- Herbst. P.(2002)
- Lee, Kyung Hwa. (2005).
- Peterson, I. (2004).
- Martland, D. (2004).
- Durand - Guerrier, V., and Arsac, G(2005)
- Bruce, Simmons (2006-B)
- Herbst., P. , and Brach, c.(2006)

المهارات، ومقارنة قدرة مجموعة من التلاميذ على البرهنة الرياضية تبعاً لتباين مستويات معلميهم فى البرهان الرياضى. وتمثلت عينة الدراسة فى(١٨) معلماً يدرسون للصف التاسع، كما تم اختيار(٨٧) تلميذاً من تلاميذ مرحلة التعليم الأساسى بمحافظة الشرقية تم تقسيمهم إلى ثلاث مجموعات متساوية فى العدد كل منها(٢٩) تلميذاً. وأشارت نتائج الدراسة إلى أن مستوى أداء المعلمين لمهارات البرهان الرياضى بوجه عام ليس على درجة من الكفاءة المناسبة إذ ينقصهم التدريب على بعض المهارات، كما اتضح تفوق مجموعة التلاميذ الذين يدرسون عن طريق معلم مرتفع ومعلم متوسط فى مهارات البرهان الرياضى عن أقرانهم الذين يدرسون عن طريق معلم منخفض فى مهارات البرهان الرياضى.

بينما استهدفت دراسة(**عبدالله عزب، ٢٠٠٠**) تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى عينة من معلمى الرياضيات حديثى التخرج بسلطنة عمان، والتعرف على أثر ذلك فى تنمية أدائهم لتدريس مهارات البرهان الرياضى، وتنمية أدائهم التدريسى العام، وكذلك تحصيل تلاميذهم العام فى مادة الرياضيات. وبلغت عينة الدراسة(١٧) معلماً، (٢٠) معلمة حديثى التخرج، وتم اختيار(٢٠٠) تلميذاً وتلميذة فى المرحلتين الإعدادية والثانوية ممن يقوم معلمو ومعلمات التجربة بالتدريس لهم. وقد أوضحت نتائج الدراسة تدنى مستوى العينة ككل فى الأداء التدريسى العام، وأيضاً فى أداء مهارات البرهان الرياضى وذلك قبل التجربة، فى حين تحسن أداؤهم سواء العام أو فى مهارات البرهان بعد التجربة، وقد أشار الباحث إلى أن هذه النتائج تعطى دليلاً مقبولاً على أن البرنامج قد حقق أهدافه المرجوة منه حيث أسهم فى تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى أفراد عينة الدراسة.

أما الدراسة التى أجراها (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**) فقد هدفت إلى التعرف على أوجه القصور والقوة المرتبطة بمهارات البرهان الرياضى لدى الطالب المعلم شعبة الرياضيات، وبلغت عينة الدراسة(١٥٣) طالباً وطالبة من طلاب الفرقتين الثالثة والرابعة بكليتى التربية بالإسماعيلية وبورسعيد. وأعد الباحث اختباراً تحصيلياً لقياس بعض مهارات البرهان الرياضى التم تم تحديدها. وتوصلت نتائج الدراسة إلى أن اكتساب طلاب عينة الدراسة كمجموعة واحدة لمهارة البرهان الرياضى ضعيف جداً، حيث لم تتجاوز النسبة المئوية لمتوسط درجات الطلاب٦%، كما أن النسبة المئوية لأكبر درجة فى الاختبار لم تتجاوز١٧%.

ومن خلال مراجعة الباحث لبعض الكتابات المتخصصة فى مناهج الرياضيات وطرق تدريسها والمهتمة بموضوع البرهنة الرياضية، يمكن تقديم بعض المقترحات فى صورة خطوط إرشادية لتنمية مهارة البرهنة على النحو الآتى: (**وديع مكسيموس وآخرون، ١٩٨١**: ١٥٦-١٥٧)، (**يحيى هندام، ١٩٨٢**: ١٩٩-٢٠٥)، (**نظلة خضر، ١٩٨٤**: ٣٥-٣٦)،

(فريدريك بل، ١٩٨٧: ١٦٣-١٦٤)، (وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦)، (محمود شوق، ١٩٩٧)، (Bruce, S, 2006-A)

١-التعرف على ما هو معطى وما هو مطلوب فى أية مسألة رياضية أو أى موقف رياضى وليس فى النظريات أو التمارين الهندسية فقط.

٢-وضع خطة للوصول إلى الحل وذلك عن طريق تحليل المطلوب فى الموقف الرياضى تمهيداً للوصول إلى البرهان أو حل الموقف المشكل.

٣-تقديم أسباب وتعليلات وتبريرات لكل خطوة تقوم بها أثناء الحل وذلك فى كل فروع الرياضيات، فمن المهم أن تعلم لماذا استخدمت هذا القانون أو هذه المسلمة أو النظرية بعينها للتدليل على صحة الخطوة التى تتعامل معها.

٤-الحذر من الخلط بين المعطيات والمطلوب، أو استخدام المطلوب على أنه معطيات، أو عدم الاستفادة من كل ما هو معطى بهدف الوصول إلى التحقق من صحة المطلوب بأقصر طريق.

٥-حاول ترجمة التمرين(وبخاصة فى الهندسة) إلى شكل(أى نموذج بصرى) تتضح فيه العلاقات المعطاة على الرسم واستخدم الألوان كلما أمكن ذلك- للتمييز بين الأشياء المعطاة والأشياء المطلوبة، وحاول التدريب على ذلك لفترة طويلة فى عدة تمارين على موضوعات مختلفة قبل القيام بأية برهنة.

٦-حاول أن تستخلص أية علاقات رياضية من خلال بعض الأشكال الهندسية الموضح عليها بعض البيانات، ودرب نفسك على كتابة أكبر عدد ممكن من العلاقات الرياضية وذلك قبل الشروع فى برهنة أى تمرين.

٧-حاول تقسيم المطلوب إلى أجزاء بسيطة إذا كان صعباً بحيث تساعدك برهنة كل جزء فى برهنة الأجزاء التالية، وبالتالى الوصول فى النهاية إلى برهنة المطلوب نفسه.

٨-يجب إدراك أن مهارة البرهنة ليست من المهارات السهلة أو البسيطة، فهى تحتاج إلى تدريب وممارسة وسعة إطلاع وصبر عند ممارستها، وعدم التسليم بصعوبتها قبل البدء فيها، بل كن واثقاً من نفسك عند القيام بعملية البرهنة. لذلك حاول أن تبدأ دائماً بتمارين يسهل البرهان عليها حتى تشعر بالنجاح فى البرهنة، فالنجاح يؤدى إلى مزيد من النجاح.

٩-حاول إعادة صياغة المسألة أو التمرين بلغتك الخاصة موضحاً المعطيات أو المطلوب فى كل مرة، واعمل تلخيصاً للمسألة(التمرين) فى خطوات قصيرة ومختصرة بعيداً عن اللفظية والحشو، فالهدف من ممارسة عملية البرهنة هو الوصول إلى إثبات صحة المطلوب بأقصر طريق ممكن حتى ولو كان الأسلوب المستخدم فى البرهنة غير مباشر.

١٠- درب نفسك على إعادة صياغة(ترجمة) منطوق النظريات الهندسية فى شكل تمارين تتحول إلى أشكال هندسية محدداً معطياتها والمطلوب فيها بأسلوب إجرائى.

١١- حاول استخدام الشرط الضرورى والكافى(أ ⟺ ب) فى التعبير عن النظرية ومعكوسها بنظرية واحدة(فى حالة النظرية ومعكوسها صحيحة).

١٢- حاول صياغة النظرية بعد الاقتناع بها عملياً فى صورة جملة خبرية وفى صورة جملة شرطية(إذا كان ... فإن ...) وذلك من خلال إلقاء العديد من الأسئلة.

١٣- حاول التعرف على أكثر من نمط من أنماط البرهان الرياضى(المباشر-عكس المعكوس-التعارض-استنفاد الحالات الأخرى- استنفاد كل الاحتمالات الممكنة-المثال المضاد...). واستخدم فى التمرين الواحد أكثر من نمط فى البرهنة على صحة المطلوب، وقارن بين أسلوب البرهنة وسهولته ودقته فى كل مرة.

١٤- حاول تفنيد بعض التعميمات الرياضية التى تعرض عليك باستخدام مثال مضاد، فمن الخطأ التسليم بصحة التعميم قبل التأكد من ذلك، وحاول الابتعاد عن البراهين الجاهزة(السابقة الإعداد) للمواقف الرياضية، وخاصة فى التمارين الهندسية، فكل تمرين له الظروف الملائمة للبرهنة عليه، بل يمكن أن يختلف أسلوب البرهنة على صحة التمرين الواحد من فرد لآخر، أو من وقت لآخر بالنسبة لنفس الفرد تبعاً لنمو قدراته العقلية واتساع معارفه الرياضية.

١٥- حاول التعرض لتمارين رياضية بها أخطاء أو مغالطات، واكتشف هذه الأخطاء أو المغالطات، وكذلك حاول استخدام طرق البرهنة فى حل بعض الألغاز الرياضية البسيطة، فإن ذلك من شأنه تنمية مهارات التحليل، الاستنتاج، وحل المشكلة.

١٦- اسأل نفسك العديد من الأسئلة باستمرار التى تثير تفكيرك وتوجهه نحو المسار الصحيح وتحديد خطتك العامة للبرهان مثل :

- متى يتحقق المطلوب؟
- ماذا أستفيد من المعطيات؟
- ما النظريات التى تفيد فى الحل؟
- ماذا يحدث لو استخدمت العلاقة...؟
- هل هذا القانون بعينه هو المناسب لهذه الخطوة؟
- ماذا تتطلب الخطوة التالية لإثبات صحتها؟
- هل يمكن استخدام عدد أقل من الخطوات لبرهان هذا التمرين؟
- هل يمكن أن أصل إلى البرهان بأسلوب أسهل إذا استخدمت إحدى استراتيجيات البرهان غير المباشر؟

١٧- حاول قدر الإمكان استخدام مختلف أساليب وطرق البرهنة الرياضية، مع التركيز على الطريقة التحليلية فى البرهان، فذلك من شأنه تنمية القدرة على تحليل المواقف الحياتية سواء الرياضية أو غير الرياضية.

١٨- حاول استخدام لغة البرهان وأساليبه فى جميع فروع الرياضيات، ولا تقتصر استخدامها على الهندسة فقط باعتبارها هى الوحيدة المعنية بالبرهان.

١٩- حاول التدريب على عملية تقويم البرهان الذى قمت به وذلك من خلال إلقاء التساؤلات الآتية بعد إكمال عملية البرهنة:

- هل أستطيع التأكد من صحة البرهان؟
- هل أستطيع التأكد من صحة التعليلات؟
- هل يمكن برهنة التمرين بأسلوب آخر؟

٢٠- درب نفسك على أسلوب التفكير المنطقى وربط التقارير المنطقية بالمنطق المستخدم فى الحياة اليومية، مما يزيد قدرتك على تخيل وإدراك العلاقات فى كافة المواقف الحياتية سواء الرياضية أو غيرها، وبالتالى يساعدك على نجاحك الأكاديمى وكذلك نجاحك فى الحياة العملية.

## ثانياً: قلق البرهان الرياضى :

إن عدم وضوح العلاقة بين دراسة المتعلم للمفاهيم والعلاقات الرياضية من ناحية، والقدرة على اتباع أساليب البرهنة على صدقها من عدمه وبين تطبيقاتها فى مجالات الحياة من ناحية أخرى، جعلت مادة الرياضيات عديمة المعنى بالنسبة للمتعلمين، وقد انعكس ذلك على تخوف المتعلمين من هذه المادة وكراهيتهم لها.

ويذكر(**محمد عبدالسميع، ١٩٩٦: ١٥٩**) أن المحتوى الهندسى يتضمن العديد من المفاهيم والعلاقات الهندسية المتداخلة وأساليب البرهنة المختلفة، مما يسبب تخوفاً لدى الطلاب من مادة الهندسة، فيلجأون إلى حفظ واستظهار محتوى المادة على عكس طبيعة الهندسة الذى تعد أداة للتفكير.

ويشير "Bruch" (**فى: محمد عبدالسميع، ١٩٩٦: ١٥٩**) إلى أن السبب الرئيسى فى قلق التحصيل فى الرياضيات هو المعلم وسلوكه وتصرفاته وطرق تدريسه، وكذلك طبيعة الرياضيات، وخاصة الهندسة بما تتسم من تجريد، وإحساس التلاميذ بعدم فائدتها فى حياتهم، وإحساسهم بصعوبة تعلمها. وبناء عليه فإن طبيعة الهندسة التجريدية، واتباع طرق تدريس نمطية، وأساليب برهان على صحة قضاياها، هو ما يؤدى إلى قلق التلاميذ من البرهان الهندسى.

والقلق بصفة عامة هو حالة من الشعور الذى يصيب الفرد - بسبب مروره بمواقف غير سارة - بالعصبية والتوتر نتيجة الضيق.

ويعرف "Sarason" (**في: رمضان صالح، ١٩٩١**) قلق الاختبار Test anxiety بأنه حالة نفسية أو ظاهرة انفعالية يمر فيها التلميذ خلال الاختبار وتنشأ عن تخوفه من الفشل أو الرسوب فى الاختبار، أو تخوفه من عدم حصوله على نتيجة متوقعة منه بالنسبة له أو للآخرين وقد تؤثر هذه الحالة النفسية على العمليات العقلية كالانتباه والتركيز والتفكير والتذكر.

ويعرف قلق الرياضيات(القلق من الرياضيات) بأنه نوع من القلق الذى يصيب الفرد بالشعور بالعصبية والتوتر وعدم الارتياح عند التعامل مع الأعداد وحل المشكلات الرياضية سواء فى المواقف الحياتية أو المواقف المدرسية الأكاديمية. (**رمضان صالح، ١٩٩١: ٢٧٧**)، (**على عبدالرحيم، ١٩٩٩: ١٠**)

وتأسيساً على ما سبق يقدم الباحث تعريفاً إجرائياً لقلق البرهان(القلق من البرهان الرياضى) على أنه: "شعور الفرد بحالة من الضيق والتوتر تجاه المواقف التى تتطلب استخدام البرهنة الرياضية وإحساسه بالخوف من الفشل فى إتمام عملية البرهان الرياضى مما يدفعه إلى محاولة التخلص من تلك المواقف بالتهرب منها إلى حد العزوف عن ممارسة أية براهين رياضية".

وقد اهتم الكثير من الباحثين سواء فى مجال علم النفس والصحة النفسية أو فى مجال المناهج وطرق التدريس، وبخاصة تدريس الرياضيات، بدراسة الحالة التى تصيب الفرد والتى قد تؤثر بالسلب على مستواه الأكاديمى، بل على سلوكياته الحياتية، وقد تركز اهتمام هذه البحوث والدراسات فى هذا الشأن على محاولة خفض أو اختزال مستوى القلق وإزالة العوامل المؤدية إليه. وأشارت نتائج معظم الدراسات إلى أن تأثير المعالجات المستخدمة فى خفض(اختزال) Reducing قلق الرياضيات يعتمد على تحسين أو تطوير الأداء فى الرياضيات فى مختلف المراحل التعليمية بما فيها مرحلة التعليم الجامعى، وأن أفضل أنواع التدخل هو التدخل المعرفى أى تعديل البنية المعرفية للمتعلمين(**عماد سمعان، وجمال حامد، ١٩٩٣**)، (**محمد عبدالسميع، ١٩٩٦**)، (**صلاح عبدالحفيظ، ١٩٩٧**)، (**على عبدالرحيم، ١٩٩٩**)، (**حسن هاشم، وعلاء سعد، ٢٠٠٠**)، (**حمزة عبدالحكم، وعادل الباز، ٢٠٠٠**)، (**Watson, J. M, 2002**) ، (**محمد سعد العرابى، ٢٠٠٤**).

وبمراجعة تحليل نتائج هذه الدراسات، لوحظ أن كل هذه الدراسات قد اهتمت بقلق التحصيل فى الرياضيات فى مختلف المراحل الدراسية، ولم تهتم أى منها بالتعرف على قلق البرهان الرياضى لدى المتعلمين باستثناء دراسة(**محمد عبدالسميع، ١٩٩٦**) وإن كانت قد

أجريت على عينة من طلاب المرحلة الإعدادية لمعرفة قلق البرهان الهندسى لديهم، ومن ثم فلم تهتم دراسة واحدة بمحاولة خفض قلق البرهان الرياضى لدى الطلاب المعلمين فى كليات التربية والذين سيقومون بمهمة تدريس البرهان فور تخرجهم، فإذا تركنا هؤلاء الطلاب وشأنهم فسوف يسبب قلق البرهان الرياضى لديهم مشكلة لا يمكن تفاديها بعد ذلك، لذلك كان أحد دوافع إجراء الدراسة الحالية يتمثل فى محاولة خفض قلق البرهان الرياضى لدى هؤلاء الطلاب واختزاله إلى أقل مستوى ممكن حتى لا يتسبب فى فاقد وإهدار فى الكفايات التدريسية لديهم فيما بعد، مما ينعكس أثره بالتبعية على تدنى تحصيل تلاميذهم وتكوين لديهم اتجاهات سلبية نحو مادة الرياضيات.

**ثالثاً: التواصل فى الرياضيات(مفهومه-أهميته-أساليبه تنميته) :**

يعرف المجلس القومى الأمريكى لمعلمى الرياضيات(NCTM,1989: 214) التواصل فى الرياضيات Communication in Mathematics على أنه: "قدرة الفرد على استيعاب لغة الرياضيات بما تتضمنه من رموز ومصطلحات وأشكال وتعبيرات للتعبير عن الأفكار والعلاقات وفهمها فهماً صحيحاً وتوضيحها للآخرين".

وينظر (NCTM) إلى التواصل الرياضى(التواصل فى الرياضيات) على أنه أحد المكونات الأساسية للمقدرة الرياضية لدى الفرد Mathematical Power، والتى تمثل الهدف الرئيسى لتعليم الرياضيات، فقد أكدت الوثيقة الصادرة عن المجلس عام ٢٠٠٠ (NCTM, 2000) على ضرورة تضمين مناهج الرياضيات فى كل المستويات فرصاً لتنمية مهارات التواصل لدى المتعلمين. وحددت الوثيقة (NCTM,2000: 8) خمسة أهداف رئيسة لتعليم الرياضيات تمثلت فى:

- تنمية ثقة المتعلمين بأنفسهم وبمقدرتهم الرياضية.
- تنمية قدرات المتعلمين على حل المشكلة الرياضية.
- تنمية المقدرة على التواصل الرياضى.
- تنمية المقدرة على الاستدلال الرياضى.
- مساعدة المتعلمين على تقدير دور الرياضيات فى المجتمع.

وتتعدد أشكال التواصل فى الرياضيات، فمن أشكال التواصل الرياضى :

الاستماع Listening، والقراءة Reading، والتحدث Speaking، والتمثيل Representation، والكتابة Writing، وإذا كان هذا التصنيف لأشكال التواصل يعبر عن لغة الرياضيات وبنيتها (محتوى الرياضيات)، فإن ثمة تصنيف آخر ينظر إلى أشكال التواصل فى الرياضيات تبعاً لطبيعة استخدام تلك اللغة فى التعبير عن الأفكار، حيث يمكن تصنيف

التواصل في الرياضيات إلى تواصل شفهي وتواصل كتابي Oral- written Communication **(Sen-Fennell, C, 1995: 31-54)**

وتعد مهارات التواصل من أهم مظاهر عملية التفاعل التعليمي بين المتعلمين وبعضهم البعض من ناحية، وبين المعلم والمتعلمين من ناحية أخرى، فلا نستطيع أن نتخيل موقف تدريسي لأية مادة دراسية-لاسيما الرياضيات- بدون تواصل.

وتشير "كيرستين س. فينيل" **(Sen-Fennell, C, 1995: 37-39)**

إلى أنه من خلال استكشافهما لأنماط الاتصال في حجرة الدراسة لمادة الرياضيات، وجدت القليل من التفاعل اللفظي بين الطلاب أنفسهم، وكان الجزء الأكبر من التفاعل يسوده حديث المعلم وأسئلته. وأرجعت المشكلات الاتصالية في حجرة دراسة الرياضيات إلى نقص قدرات الطلاب ونقص دافعيتهم لعمل اتصالات(تواصل) في حصص الرياضيات.

وإذا كان للتواصل بصفة عامة أهمية كبيرة في العملية التعليمية على اختلاف مستوياتها ومراحلها، فإن للتواصل الرياضي بصفة خاصة أهمية بالغة في تدريس الرياضيات وتفعيل عملية تعليم وتعلم الرياضيات، ويمكن عرض أهمية التواصل في الرياضيات وما يمكن أن يقدمه أثناء التفاعل الصفي في النقاط الآتية : **(محمود الإبياري، ١٩٩٨)**؛ **(Sen- Fnnell, C, 1995: 34), (NCTM, 2000: 59)**

١-معرفة مفردات لغة الرياضيات من رموز وألفاظ وأشكال وتوظيفها في الحوار بشكل جيد.

٢-فهم الرياضيات فهماً صحيحاً وتوظيفها في المواقف الحياتية المختلفة وفي مختلف فروع العلم.

٣-تنمية المقدرة الرياضية المتمثلة في حل المشكلات والاستدلال.

٤-تمثيل المواقف والعلاقات الرياضية بصور متنوعة ومختلفة.

٥-تنمية قدرة المتعلم على التأمل لما يدور في ذهنه من أفكار رياضية والتعبير عنها وتوضيحها للآخرين، وهذا هو جوهر عملية الاتصال.

٦-استخدام لغة الرياضيات لوصف الأشكال الهندسية والمجسمات والتمثيلات البيانية والجداول والرسومات.

وتعد تنمية مقدرة المتعلمين على التواصل في الرياضيات من بين أهم أهداف تعليم الرياضيات في الوقت الحاضر. فالعمل على تنمية وتحسين مهارات التواصل الرياضي لدى المتعلمين في مختلف المستويات التعليمية من المتطلبات الأساسية لتعليم برامج الرياضيات المدرسية.

ولقد انعكست أهمية التواصل الرياضى على اهتمام العديد من الباحثين فـــى مجـــال تربويات الرياضيات على المستويين العربى والأجنبى على حد سواء، وذلك إما بهدف تحديـد مهارات التواصل الرياضى والتعرف على مدى توافرها لدى المتعلمين، أو بهدف تنمية هـــذه المهارات لديهم. فقد استهدفت دراسة (**محمود الإبيارى، ١٩٩٨**) تنمية مـــهارات التواصـــل الرياضى الكتابى لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادى وذلك من خلال مجموعة من الأنشـــطة التعليمية اقترحها الباحث فى صورة ثلاثة أنماط من المشكلات الرياضية التى لها أكـــثر مـــن طريقة للحل. وتوصلت نتائج الدراسة إلى أن استخدام الأنشطة المقترحة لم يكـــن دالاً علـــى تنمية التواصل الرياضى الكتابى.

أما دراسة(**Carole, G, 1992**) فقد اهتمت بإعداد مشكلات لتحفيز التلاميـــذ علـــى التواصل الرياضى، حيث طلب منهم وصف ملاحظاتهم وتبرير حلولهم وتوثيـــق تفكـــيرهم، وإكمال نصوص المشكلات بحيث تعطى الفرصة للمنافسة والمناظرة بين مجموعتيـــن مـــن التلاميذ. وأظهرت نتائج الدراسة أن المناقشة لها أثر دال إحصائيـــاً فـــى تنميـــة التواصـــل الرياضى بين التلاميذ.

وهدفت دراسة (**Wadlington E, 1992**) إلى تنمية التواصـــل الريـــاضي وذلـــك بتدريب التلاميذ على استخدام الكتابة فى التعبير عن أفكارهم الرياضية عن طريق كتابة مقـــال رياضى حول الرياضيات، وكذلك عن طريق تكليف التلاميذ بكتابة حلولـــهم واســـتراتيجيات الحل التى استخدموها وكيف فكرة فى الحل عقب حل المشكلة. وقد أوضحت نتائج الدراســـة فاعلية الكتابة فى تحسين مقدرة التلاميذ على التفكير الرياضى.

وهدفت دراسة (**محمود الإبيارى، ٢٠٠٢**) إلى التعرف على مدى فاعليـــة اســـتخدام مدخل كتابة المشكلة Problem Writing Approach فى تحسين أداء تلاميذ الصف الثـــالث الابتدائى فى حل المسألة الحاسية اللفظية، حيث يقوم المعلم بتهيئة موقف يدور حول بيانـــات مرتبطة بحياة التلاميذ، ويطلب من كل تلميذ أن يكتب مسألة لفظية ترتبط بهذا الموقف، وقد تم إعداد مجموعة من الأنشطة لبناء فهم لغوى باستخدام الرياضيات. وتوصلت نتائج الدراســـة إلى زيادة مستوى الفهم لدى التلاميذ، واستخدام المفردات الرياضية فى أدائهم وزيادة مـــهارات التواصل الرياضى.

أما دراسة (**محمد سعد العرابى، ٢٠٠٤**) فقد هدفت إلى قياس فاعلية استخدام أســـاليب التقويم البديل فى تحسين تحصيل تلاميذ الصف الرابع الابتدائى وتحسين قدرتهم على التواصل الرياضياتى وخفض قلق الرياضيات، ومعرفة نوع العلاقة بين كل متغيرين مـــن متغـــيرات الدراسة. وقد أوضحت النتائج فاعلية التقويم البديل فى زيادة التواصل الرياضياتى التحريرى، كما أكدت على وجود درجة كبيرة لتأثير المعالجة التجريبية على مهارة التواصـــل الشـــفهى

ككل وفى مهاراتها الفرعية، كما وجدت علاقة ارتباطية سالبة دالة بين التواصل فى الرياضيات وقلق الاختبار.

وقد استفادت الدراسة الحالية من البحوث والدراسات السابقة التى اهتمت بالتواصل الرياضى فى التعرف على مهارات التواصل الرياضى وأهميته وأشكاله وأساليب تنميته. كما استفادت الدراسة الحالية أيضاً فى التعرف على أثر المعالجات التجريبية المختلفة التى استخدمتها كل دراسة فى تنمية التواصل فى الرياضيات وتحسينه لدى عينة كل سمنها، وإن كانت العينة المستخدمة فى الدراسات المشار إليها تقتصر على تلاميذ المرحلتين الابتدائية والإعدادية، ولم تتناول أى دراسة منها كيفية تنمية مهارات التواصل فى الرياضيات لدى الطلاب المعلمين تخصص الرياضيات، وهذا أيضاً يمثل أحد دوافع إجراء الدراسة الحالية.

**فروض الدراسة :**

**أولاً: فروض مرتبطة بفاعلية البرنامج المقترح كمتغير مستقل فى تنمية مهارات البرهان الرياضى كمتغير تابع :**

(١) لا يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لاختبار مهارات البرهان الرياضى.

(٢) يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات البرهان الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات طلاب المجموعة التجريبية.

(٣) يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيقين القبلى والبعدى لاختبار مهارات البرهان الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات الطلاب فى التطبيق البعدى.

**ثانياً: فروض مرتبطة بفاعلية البرنامج المقترح كمتغير مستقل فى خفض قلق البرهان الرياضى كمتغير تابع :**

(٤) لا يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لمقياس قلق البرهان الرياضى.

(٥) يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لمقياس قلق البرهان الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات طلاب المجموعة الضابطة.

(٦) يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيقين القبلى والبعدى لمقياس قلق البرهان الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات الطلاب فى التطبيق القبلى.

**ثالثاً: فروض مرتبطة بفاعلية البرنامج المقترح كمتغير مستقل فى تحسين مهارات التواصل الرياضى كمتغير تابع :**

(٧) لا يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لاختبار مهارات التواصل الرياضى.

(٨) يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات التواصل الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات طلاب المجموعة التجريبية.

(٩) يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيقين القبلى والبعدى لاختبار مهارات التواصل الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات التطبيق البعدى.

**رابعاً: فروض مرتبطة بالعلاقات بين متغيرات الدراسة :**

(١٠) توجد علاقة ارتباطية موجبة بين تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية وبين انخفاض مستوى قلقهم من البرهان الرياضى.

(١١) توجد علاقة ارتباطية موجبة بين تحسين مهارات التواصل الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية وبين انخفاض مستوى قلقهم من البرهان الرياضى.

(١٢) توجد علاقة ارتباطية موجبة بين تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية وبين تحسين مهاراتهم فى التواصل الرياضى.

## الجانب التجريبى للدراسة

### أولاً: اختيار مجموعة الدراسة :

تمثلت مجموعة الدراسة التجريبية فى كل طلاب السنة الثالثة شعبة رياضيات بكلية التربية بصور فى سلطنة عمان فى الفصل الدراسى الثانى من العام الأكاديمى ٢٠٠٥/٢٠٠٦، وعدد هؤلاء الطلاب(٥٧) طالباً مسجلين فى برنامج التربية العملية لهذا الفصل وموزعين على مجموعتين :

**المجموعة الأولى** : عددها(٣٠) طالباً وطالبة. وقد اعتبرت مجموعة تجريبية للدراسة.

**المجموعة الثانية**: عددها(٢٧) طالباً. وقد اعتبرت مجموعة ضابطة.

**ثانياً: إعداد أدوات الدراسة :**

**١- إعداد قائمة بمهارات(متطلبات) البرهان الرياضى اللازمة للطلاب المعلمين:**

مرت عملية إعداد قائمة مهارات البرهان الرياضى بالخطوات الآتية :

(١-١)**تحديد الهدف من إعداد القائمة:** هدف إعداد قائمة المهارات إلى تحديد اهم مهارات البرهان الرياضى اللازمة للطلاب المعلمين شعبة الرياضيات من وجهة نظر مجموعة من المتخصصين فى مجال الرياضيات، وكذلك مجموعة من موجهى الرياضيات(**ملحق٨**)

(١-٢)**مصادر بناء القائمة:** تم الإطلاع على مجموعة من البحوث والدراسات السابقة ذات الصلة، وكذلك الأدبيات التربوية المتصلة بموضوع البرهان الرياضى ومهاراته واستراتيجيات تدريسه(**رضا مسعد، ١٩٨٤**)، (**أحمد سيد أحمد، ١٩٨٩**)، (**محمد عبدالسميع، ١٩٩١**)، (**خالد الجوهرى، ١٩٩٤**)، (**إبراهيم عشوش، ١٩٩٦**)، (**محمد الكرش،١٩٩٩**)، (**عزو عفانة، ٢٠٠١**)، (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**).

(١-٣)**مكونات القائمة:** اشتملت قائمة مهارات البرهان الرياضى على(٣٩) مهارة فرعية من المهارات المرتبطة باستخدام الدخل المباشر والمداخل غير المباشرة فى البرهنة الرياضية، قد صنفت هذه المهارات تحت ثلاثة متطلبات أساسية للبراهين الرياضية هى :

- متطلبات التخطيط لعملية البرهنة : وتضم (١٢) مهارة فرعية.
- متطلبات بناء تتابعات البرهان وصياغته: وتضم(٢٢) مهارة فرعية.
- متطلبات مراجعة وتقويم البرهان الرياضى: وتضم(٥) مهارات فرعية.

(١-٤)**صدق القائمة** : عرضت القائمة فى صورتها المبدئية على مجموعة من بعض المتخصصين فى مجال المناهج وطرق التدريس وبعض موجهى الرياضيات بهدف إبداء الرأى حول صلاحيتها لتحقيق الهدف من إعدادها، وقد أقر المحكمون بصلاحية القائمة فيما تتضمنه من مهارات البرهان الرياضى. (ملحق١)

**٢- إعداد اختبار مهارات البرهان الرياضى:**

(٢-١) **تحديد الهدف من الاختبار:** تمثل هدف الاختبار فى قياس اكتساب الطلاب المعلمين مجموعة الدراسة لمهارات البرهان الرياضى التى سبق تحديدها. ويتفق الباحث مع ما ذهب إليه كل من (عبدالله عزب،٢٠٠٠)، (أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥) من أن الأسئلة التى تناسب الهدف من هذا الاختبار يجب أن تكون من نوع أسئلة المقال حيث يوجد

فيها مجال متسع لتقويم التحصيل فى المستويات المعرفية العليا التى تتطلبها طبيعة البرهنة الرياضية خاصة فيما يتعلق بحل المشكلات.

ويرى الباحث أن الأسئلة المقالية كذلك تتيح الفرصة للباحثين لتحليل مسارات تفكير المتعلمين(المستجيبين) أثناء التفكير فى حل المشكلة واتباع أساليب البرهان المختلفة، وهذا يتناسب وطبيعة الدراسة الحالية فى التعرف على قدرة هؤلاء الطلاب المعلمين على التواصل الرياضى إلى جانب ما يوفره الاختبار الخاص بمهارات التواصل والذى أعد لهذا الغرض.

(٢-٢) **صياغة مفردات(مواقف) الاختبار** : حيث إن البرهان الرياضى على صدق قضية ما يعتمد على متغيرين أساسيين هما: المعارف الرياضية التى يمتلكها المتعلم، وقدرة المتعلم على توظيف تلك المعارف باستخدام مهارات البرهان الرياضية المكتسبة، واتباع أساليب مباشرة وغير مباشرة فى عملية البرهنة، لذلك رأى الباحث ضرورة صياغة مفردات الاختبار فى صورة مواقف رياضية، ليس الهدف منها فقط هو قياس مدى اكتساب الطالب المعلم للمعارف الرياضية المتضمنة بها، وإنما يتمثل الهدف من اختبار هذه المواقف الرياضية فى قياس قدرة الطالب المعلم على توظيف تلك المعارف للبرهنة على صحة بعض القضايا الرياضية المختارة، وكذلك أسلوب(نمط) البرهان الذى يتبعه الطالب المعلم.

وحيث إنه ليس من الضرورى أن تتضمن أية عملية برهنة رياضية جميع مهارات البرهان الرياضى، كما أنه من الصعوبة بمكان إعداد اختبار يقيس كل مهارات البرهان الرياضى(المباشر وغير المباشر) والتى تضمنتها قائمة المهارات وعددها (٣٩) مهارة فرعية. لذلك فقد قام الباحث بتحديد المهارات المستهدفة القياس فى سبعة مهارات لا تكاد تخلو منها أية عملية برهنة، وهذه المهارات هى :

١-ترجمة المشكلة الرياضية.

٢-كتابة المعطيات.

٣-كتابة المطلوب.

٤-تحديد العمل المناسب للبرهنة أو الافتراض الذى يساعد فى تسلسل وتتابع نمط البرهان المستخدم.

٥-اشتقاق سلسلة من المضامين الرياضية المنطقية بداية من كتابة المعطيات ووصولاً إلى إثبات صحة المطلوب.

٦-كتابة تبرير لكل خطوة (أو بعض خطوات البرهان) سواء فى استخدام الأسلوب المباشر فى البرهان أو أحد أساليب(مداخل) البرهنة غير المباشرة مع توضيح إدراك مدلول

البرهان غير المباشر وطبيعة الأسلوب المستخدم للوصول إلى تناقض(تعارض) مع أحد مكونات النظام الرياضى.

٧-التوصل إلى المطلوب المراد برهنته.

وقد تكون الاختبار فى صورته النهائية من(١٤) سؤالاً تم صياغتها من نمط أسئلة المقال، كل منها يمثل موقفاً رياضياً **(ملحق٣)**

(٢-٣) **تحديد مواصفات الاختبار** : استند الاختبار على مواقف رياضية سبق للطالب المرور بها خلال دراسته فى المرحلتين الإعدادية والثانوية أو حتى فى مرحلة دراسته الجامعية، كما أن هذه المواقف ومثيلاتها هى التى سيضطلع الطالب المعلم بتدريسها بعد تخرجه فى كليات التربية. وقد روعى فى إعداد مواقف الاختبار سهولة وشيوع الألفاظ المستخدمة والحرص على صحة الصياغة العلمية للمفردات، وتنوع مواقف الاختبار وتعددها قدر الإمكان. وشموليتها لنمط البرهان المباشر بالإضافة إلى استخدام أساليب(مداخل) مختلفة فى نمط البرهان غير المباشر حيث لا يمكن قياس مهارات البرهان غير المباشر بمعزل عن مهارات البرهان المباشر.

(٢-٤) **صدق الاختبار** : تأكد الباحث من صدق الاختبار فيما وضع لقياسه عن طريق صدق المحكمين، حيث تم عرض الاختبار مرفقاً بقائمة من مهارات البرهان الرياضى المستهدف قياسها على مجموعة من المحكمين المتخصصين فى الرياضيات البحتة وطرق تدريس الرياضيات وكذلك مجموعة من الموجهين الفنيين لمادة الرياضيات بمديرية التربية والتعليم بصور. وقد أجمع المحكمون على أن مفردات الاختبار تقيس ما وضعت لقياسه، كما اتفق المحكمون جميعهم على صحة الصياغة العلمية للمواقف الاختبارية- ومناسبتها للطلاب المعلمين بكليات التربية.

(٢-٥) **ثبات الاختبار** : لحساب ثبات الاختبار، فقد تم تطبيقه على عينة قوامها(٣٣) طالباً وطالبة من طلاب السنة الرابعة فى بداية الفصل الدراسى الثانى(فبراير٢٠٠٦م)، حيث إن هؤلاء الطلاب على ألفة ودراية بمحتويات هذا الاختبار وسبق لهم دراسة محتواه فى سنوات سابقة، وحيث إنه كان من الصعوبة إعداد صورتين متكافئتين تماماً من الاختبار لعدم تجانس مفرداته، فقد أعيد تطبيق نفس الاختبار على نفس مجموعة الطلاب بفاصل زمنى قدره أربعة أسابيع (٢٨ يوماً) للتقليل من تأثير عامل التذكر على ثبات الاختبار، وقد بلغ معامل ثبات الاختبار باستخدام هذه الطريقة(٠,٨٧٦) وهو يدل على ثبات الاختبار.

(٢-٦) **تصحيح الاختبار(تقدير درجاته)** : تظهر مشكلة تصحيح الاختبارات المقالية بصورة أكثر وضوحاً من غيرها، لذلك اقترح البعض ضرورة أن يلتزم المصححون بقواعد

محددة للتغلب على هذه المشكلة، وبناءً على ذلك كان من الضرورى تحديد قواعد لتقدير درجة كل طالب فى هذا الاختبار يجب الالتزام بها عند تصحيح مواقف الاختبار. لذلك فقد أعطيت درجة واحدة لكل مهارة من المهارات السبع المستهدف قياسها السابق تحديدها فى بند(١-٢). ومن ثم فقد أصبحت درجة بعض المفردات(التى تحتاج إلى برهان مباشر مع توضيح بالرسم) هى(٧) درجات وعددها ثمانى مفردات، فى حين أصبحت درجة بعض المفردات(التى تحتاج إلى برهان غير مباشر ولا تتطلب توضيح بالرسم) هى(٦) درجات وعدها خمس مفردات، بينما أعطيت مفردة واحدة(٤) درجات لأنها تحتاج فى قياسها إلى أربع مهارات فقط من المهارات السبع. وبالتالى فقد أصبحت الدرجة النهائية للاختبار(٩٠) درجة. ويوضح ذلك الجدول الآتى :

**جدول(١)**

**توزيع درجات اختبار مهارات البرهان الرياضى**

| الدرجة | المفردات التى تحصل عليها | عدد المفردات | مجموع الدرجات |
|---|---|---|---|
| ٧ | ١٤،١٣،٦،٥،٤،٣،٢،١ | ٨ | ٥٦ = ٧×٨ |
| ٦ | ١٢،١٠،٩،٨،٧ | ٥ | ٣٠=٦×٥ |
| ٤ | ١١ | ١ | ٤ = ٤×١ |
| المجمـــــوع | | | ٩٠ |

وضماناً لحسن تقدير درجات الاختبار، وموضوعية تصحيحه(إلى حد معقول)، فقد أعد الباحث نموذجاً للإجابة عن أسئلة الاختبار يمكن أن يستخدمه أى باحث آخر كمحك فى تقدير اختبار مهارات البرهان الرياضى لدى الطلاب شعبة الرياضيات **(ملحق٣)**

**٣- إعداد اختبار التواصل الرياضى :**

تم تحديد مهارات التواصل الرياضى التى ينبغى توافرها لدى الطلاب المعلمين شعبة الرياضيات، والمهارات الفرعية المتضمنة بكل مهارة منها، وقد تكون الاختبار فى صورته النهائية من (١٧) مفردة اختبارية موزعة على ثلاثة محاور يمثل كل محور منها مهارة أساسية يتضمن عدة مهارات فرعية **(ملحق٤)**

ويوضح ذلك الجدول الآتى :

## جدول(٢)

### مواصفات اختبار التواصل الرياضى الكتابى لدى طلاب كليات التربية شعبة الرياضيات

| م | المهارة الأساسية | المهارات الفرعية | الأسئلة التى تقيسها | عدد الأسئلة | تقدير درجة المهارة |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | القدرة على تحليل المشكلة الرياضية المعطاة وتقديم حلول غير نمطية. | ١- حل مشكلات رياضية غير نمطية.<br>٢-توضيح النتائج المترتبة على خصائص العلاقات الرياضية. | الجزء الأول(أ)<br>الجزء الأول(ب) | ٣<br>٥ | ١٢=٤×٣<br>٥=١×٥<br>(١٧ درجة) |
| ٢ | القدرة على إعادة صياغة المواقف الرياضية بصورة أخرى. | ١-إعادة صياغة الموقف الرياضى من صورة لفظية إلى صورة رمزية.<br>٢-ترجمة المشكلة الرياضية من صورة لفظية إلى رسومات والتعبير عنها بصورة رمزية. | الجزء الثانى(أ)<br>الجزء الثانى(ب) | ٣<br>٣ | ٦=٢×٣ درجة<br>١٢ = ٣×٤<br>(١٨ درجة) |
| ٣ | تحليل ووصف عملية حل المشكلة الرياضية بدقة مع تقديم الأدلة والبراهين الرياضية المنطقية. | ١-إكمال سلسلة من خطوات البرهان.<br>٢-تحليل وتتابع خطوات حل مشكلة رياضية بدقة.<br>٣-اكتشاف أخطاء تؤدى إلى مغالطات(متناقضات) رياضية. | الجزء الثالث(أ)<br>الجزء الثالث(ب)<br>الجزء الثالث(ج) | ١<br>١<br>١ | ٥ = ٥×١ درجات<br>٤ = ٤×١<br>٦=٦×١<br>(١٥ درجة) |

وحيث إن الاختبار الحالى يهدف إلى قياس مهارات الأداء الكتابى(التحريرى) لدى الطلاب المعلمين مجموعة الدراسة، لذلك رأى الباحث ضرورة أن تكون جميع الأسئلة من نوع إنتاج الإجابة وليس مجرد اختيار إجابة من بين عدة إجابات لأن ذلك لا يتفق وطبيعة الاختبار والهدف منه، وإنما يعد نوع إنتاج الإجابة هو الأفضل لأنه يتيح الفرصة للمتعلم للتعبير عن رأيه والتواصل رياضياً تبعاً لمستوى فهمه للموقف المشكلة وقدرته على تحليله، وفى ضوء ذلك فقد تم وضع معيار لتصحيح كل مهارة وبالتالى مجموعة مهارات كل محور حسب التقديرات التى يوضحها الجدول الآتى :

## جدول(٣)

### تقدير مستويات أداء الطلاب المعلمين شعبة الرياضيات فى اختبار مهارات التواصل الرياضى

| مظاهر الأداء الدال على تحقيق مهارات كل محور | الحل صحيح ومكتمل | الحل صحيح ولكن غير مكتمل بدرجة الدقة | جزء من الحل صواب والآخر خطأ ولكن الصواب أكثر من الخطأ | جزء من الحل صواب والآخر خطأ ولكن الخطأ أكثر | الإجابة كلها خطأ أو متروكة |
|---|---|---|---|---|---|
| نسب الأداء فى كل محور | ١٠٠% | من ٨٠% أقل من ١٠٠% | من ٥٠% إلى أقل من ٨٠% | من ٢٠% إلى أقل من ٥٠% | أقل من ٢٠% |
| مستويات الأداء | ممتاز | جيد جداً | متوسطة | ضعيفة | ضعيفة جداً |

وقد تم استخدام هذا المعيار بناءً على نموذج إجابة أعده الباحث لاختبار مهارات التواصل الرياضى ضماناً لحسن تقدير الدرجة باعتبار الاختبار من نمط إنتاج الاستجابة ولا يخضع لنظام تقدير الدرجات: صفر أو واحد **(ملحق٥)**

(٣-١) **صدق الاختبار** : تم عرض الاختبار على مجموعة من المتخصصين فى مجال المناهج وكذلك بعض الزملاء المتخصصين فى الرياضيات البحتة وبعض موجهى مادة الرياضيات ومناقشتهم فى محتوى الاختبار وكذلك فى قائمة المهارات المستهدف قياسها وكيفية تصحيح الاختيار ونظام تقدير الدرجات، وقد أبدى المحكمون موافقتهم بشأن صدق ما تم عرضه عليهم مما يوحى بصدق الاختبار.

(٣-٢) **ثبات الاختبار** : لحساب ثبات الاختبار تم تطبيقه على عينة من طلاب السنة الرابعة تخصص رياضيات بكلية التربية بصور فى سلطنة عمان فى الأسبوع الثالث من شهر فبراير ٢٠٠٦م أثناء ساعات تدريس كفاية إتقان محتوى مناهج الرياضيات، وقد بلغ عدد الطلاب الملتزمين بتعليمات الاختبار(٥٧) طالباً وطالبة من أصل(٦٠) طالباً وطالبة هم جميع طلبة السنة الرابعة موزعين فى مجموعتين(٣٠ طالباً لكل مجموعة). وباستخدام طريقة ألفا Alpha، اتضح أن كل جزء(محور) من أجزاء الاختبار وكذلك الاختبار ككل يتمتع بمعامل ثبات مرتفع، مما يوحى بثبات الاختبار وأجزائه، ويوضح ذلك الجدول الآتى :

**جدول(٤)**

**معاملات ثبات اختبار التواصل الرياضى الكتابى**

| محاور المهارات | أجزاء الاختبار | | | الاختبار ككل | الاختبار ككل |
|---|---|---|---|---|---|
| | الأول | الثانى | الثالث | | |
| معاملات الثبات | ٠,٨٣ | ٠,٨٥ | ٠,٧٩ | ٠,٨١ | ٠,٨٧٦ |

وبهذا يمكن الاطمئنان إلى ثبات اختبار مهارات التواصل الرياضى وإمكانية تطبيقه على الطلاب المعلمين مجموعة الدراسة الحالية.

## ٤- إعداد مقياس قلق البرهان الرياضى :

(٤-١) **الهدف من المقياس** : تمثل الهدف من إعداد هذا المقياس فى التعرف على مستوى القلق من البرهان الرياضى لدى طلاب كليات التربية شعبة الرياضيات، ولما كان من أهداف الدراسة الحالية معرفة إلى أى حد يسهم تطبيق البرنامج المقترح فى خفض(اختزال) مستوى قلق البرهان لدى مجموعة الدراسة، فإن ذلك يتطلب قياس مستوى قلق البرهان لدى هؤلاء الطلاب قبل وبعد تطبيق تجربة الدراسة.

(٤-٢) **صياغة عبارات المقياس** : بمراجعة عدد من مقاييس قلق الرياضيات التى أوضحتها الدراسات السابقة فى المراحل التعليمية المختلفة (**شكرى سيد أحمد، ١٩٨٨**)، (**لطفى مخلوف، ١٩٩٠**)، (**رمضان صالح، ١٩٩١**)، (**عبدالعظيم زهران، وزين العابدين خضراوى، ١٩٩١**)، (**عماد سمعان، جمال حامد، ١٩٩٣**)، (**العزب زهران، ١٩٩٦**)، (**محمد عبدالسميع، ١٩٩٦**)، (**عادل الباز، وصلاح عبدالحفيظ، ١٩٩٧**)، (**حسن هاشم، وعلاء سعد، ٢٠٠٠**)،(**Sloan, T., 2000**) (**محمد سعد العرابى، ٢٠٠٤**)، فقد أمكن صياغة عبارات المقياس باستخدام أسلوب "ليكرت"، حيث تعطى للمستجيب فرصة لتحديد درجة موافقته على كل عبارة من بين عدة استجابات تتكون من خمسة أبعاد هى: أوافق بشدة، أوافق إلى حد ما، متردد، لا أوافق-أرفض بشدة.

وقد اشتمل المقياس فى صورته الأولية على(٣٨) عبارة تعبر كلها عن القلق والانزعاج الذى يصيب الطالب المعلم عند تعرضه لمواقف البرهنة الرياضية.

(٤-٣) **صدق المقياس** : تم عرض عبارات المقياس فى صورته الأولية على اثنين من الزملاء تخصص علم نفس وصحة نفسية للحكم على مدى مناسبة العبارات ومدى انتمائها للموقف(*)، وقد تم تعديل المقياس فى ضوء آرائهما حيث عدلت صياغة بعض العبارات تعديلاً طفيفاً لتؤدى المعنى بصورة أفضل، وتم حذف(٣) عبارات لأنها كانت تعبر عن اتجاهات سالبة نحو البرهان الرياضى وليس مظاهر القلق من البرهان، وبالتالى أصبح عدد عبارات المقياس فى صورته النهائية(٣٥) عبارة صيغت بحيث تعكس درجة قلق البرهان الرياضى عند الطلاب المعلمين (**ملحق٦**)

(٤-٤) **ثبات المقياس** : اتبع الباحث نفس الإجراء المشار إليه عند حساب ثبات اختيار التواصل الرياضى، فقد تم تطبيق مقياس قلق البرهان الرياضى على مجموعة من طلاب السنة الرابعة تخصص الرياضيات والذين طبق عليهم اختيار التواصل الرياضى فى الأسبوع الثانى من شهر فبراير٢٠٠٦م، كما أعيد تطبيق نفس المقياس على نفس مجموعة الطلاب بفاصل زمنى عن التطبيق الأول مقداره ثلاثة أسابيع(٢١ يوماً)، وتم حساب معامل الثبات بين نتائج التطبيقين حيث بلغ (٠,٨٤٥)، وهو معامل ثبات مناسب للحكم على ثبات مقياس قلق البرهان الرياضى وصلاحيته للتطبيق على مجموعة الدراسة الأصلية.

---

(*) الدكتور/ محمد عبدالعال الشيخ: أستاذ مساعد علم النفس التعليمى ورئيس قسم علم النفس، كلية التربية بالفيوم، جامعة القاهرة.

الدكتور/ عماد أحمد حسن: أستاذ مساعد علم النفس التعليمى، كلية التربية بأسيوط، جامعة أسيوط.

(٤-٥) **نظام تقدير درجات المقياس** : تم تقدير درجات كل الطلاب فى التطبيقين القبلى والبعدى للمقياس، وكذلك تحديد مستوى القلق من البرهان لدى كل طالب طبقاً للمعيار الذى يوضحه الجدول الآتى :

**جدول(٥)**

**نظام تقدير درجات الطلاب المعلمين شعبة الرياضيات**

**فى مقياس قلق البرهان الرياضى**

| الاستجابة | أوافق بشدة | موافق إلى حد ما | متردد | لا أوافق | أرفض بشدة |
|---|---|---|---|---|---|
| الدرجة | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | ٠ |
| مستوى القلق | مرتفع | متوسط | منخفض | منخفض جداً | معدوم |
| فئات الدرجات | محصور بين ١٠٤،١٠٥ | محصور بين ٧٠، ١٠٥ | محصور بين ٣٥، ٧٠ | محصور بين صفر، ٣٥ | صفر |

وقد تم تحديد فئات الدرجات بناء على أكبر درجة(الدرجة العظمى) للمقياس، حيث تبلغ الدرجة العظمى(الكلية) لمقياس قلق البرهان الرياضى(١٤٠) درجة وهى عبارة عن حاصل ضرب عدد عبارات المقياس(٣٥) فى درجة أعلى استجابة(٤)، وذلك لأن كل عبارات المقياس قد صيغت كلها بصورة تظهر ارتفاع مستوى القلق من البرهان الرياضى لدى الطلاب المعلمين.

## ٥- إعداد البرنامج المقترح لتنمية مهارات البرهان الرياضى لدى الطلاب المعلمين :

مرت عملية إعداد البرنامج المقترح لتدريب الطلاب المعلمين على استخدام مداخل البرهنة غير المباشرة المستخدم فى الدراسة الحالية بمجموعة من الخطوات هى: **(ملحق٧)**

أ- **الهدف العام من البرنامج** : تمثل الهدف العام من إعداد البرنامج الحالى فى تدريب الطلاب المعلمين بكليات التربية(طلاب السنة الثانية بكلية التربية بصور فى سلطنة عمان) على استخدام مداخل غير مباشرة للبرهنة الرياضية بهدف تمكينهم من مهارات البرهان الرياضى بصفة عامة، والتعرف على أثر ذلك فى خفض مستوى قلق البرهان لدى هؤلاء الطلاب وكذلك تحسين مقدرتهم على التواصل الرياضى.

ب- **الأهداف الخاصة للبرنامج** : من المتوقع بعد الانتهاء من تدريب الطلاب على موضوعات البرنامج الحالى(حسب عدد الساعات المحددة لهذا البرنامج) أن يكون الطلاب المعلمون شعبة الرياضيات قادرين على :

(١) التعرف على مفهوم البرهان الرياضى بطريقة سليمة.

(٢) التمييز بين البرهان الرياضى ومجرد وسائل الإقناع.

(٣) التعرف على طبيعة البرهنة الرياضية ومتطلباتها.

(٤) التعرف على نمطى البرهان الرياضى المباشر وغير المباشر.

(٥) التعرف على مداخل(أساليب) البرهنة الرياضية غير المباشرة.

(٦) التمكن من أساليب البرهنة الرياضية غير المباشرة واستخدامها بصورة صحيحة.

(٧) استخدام نمطى البرهان المباشر وغير المباشر فى البرهنة على صدق نفس المشكلة الرياضية(بعض النظريات والتمارين).

(٨) التمكن من برهنة النظريات وبعض التمارين بأكثر من أسلوب للبرهنة.

(٩) استخدام أكثر من مدخل(أسلوب) من مداخل البرهنة غير المباشرة فى إثبات صحة قضية ما.

(١٠) فهم الأساس المنطقى للبرهان الرياضى غير المباشر باستخدام استنفاذ كل الحالات، ويتضمن ذلك :

- القدرة على حصر جميع الحالات الممكنة لموقف رياضى ما.
- معرفة دلالة أن جميع الاحتمالات خطأ ماعدا احتمال واحد.

(١١) التمكن من أسلوب البرهان باستبعاد الإمكانات الأخرى(البرهان بالحذف).

(١٢) إدراك أهمية المنطق فى دراسة البرهان الرياضى.

(١٣) التمكن من التمييز بين المعطى والمطلوب وتحديد أفضل استراتيجية للوصول إلى التأكد من صحة المطلوب، سواء مباشرة أو بطريقة غير مباشرة.

(١٤) التمكن من استخدام مدخل(أسلوب) البرهان بالتناقض(التعارض) والمتطلبات اللازمة لتحقيقه.

ج- **مصادر بناء محتوى البرنامج** : أمكن للباحث مراجعة العديد من البحوث والدراسات العربية والأجنبية وكذلك الكتابات المتخصصة فى تربويات الرياضيات، وبصفة خاصة البرهان الرياضى، بما يتحقق معه الهدف العام من الدراسة الحالية وكذلك الأهداف الخاصة التى تسعى إلى تحقيقها (**وديع مكسيموس داود وآخرون، ١٩٨٢**)، (**نظلة خضر، ١٩٨٤**)، (**Hanna, G., 1990**)، (**وليم عبيد وآخرون، ١٩٩٦**)، (**محمود شوق، ١٩٩٦**)، (**Caruti, R. et al., 1996**)، (**De Villers, M., 1998**)، (**Epp, Susana, S., 1998**) (**Hanna, G.&**، (**Dodge, W, Goto, k., 1998**)، (**Jahnke, H., 1999**)، (**عبدالله عزب، ٢٠٠٠**)، (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**)، (**Vernon. T., 2005**)، (**Bruce, S., 2006-A**)، (**Bruce,S., 2006-B**).

وقد تضمن الجانب التطبيقى لمحتوى البرنامج الموضوعات الآتية :

- مفهوم البرهان الرياضى وأهميته.

- التمييز بين البرهان الرياضى ومجرد وسائل الإقناع.
- أساليب البرهان الرياضى مع التركيز على الأساليب غير المباشرة.
- نماذج وتطبيقات لبرهنة بعض المشكلات الرياضية بمقررات الرياضيات المدرسية.

د- **الأسس التى استند إليها البرنامج** : روعى فى إعداد البرنامج المقترح الأسس الآتية :

أ-وجود عدد كاف من الأمثلة والتدريبات المرتبطة بموضوع البرهان الرياضى وخاصة من مقررات الرياضيات بالمرحلتين الإعدادية والثانوية التى سيقوم الطالب المعلم المتدرب بتدريسها فيما بعد حتى يتأكد الطالب من جدوى الموضوعات التى يدرسها وأهميتها بالنسبة له وبالتالى تزيد دافعيته نحو المشاركة فى موضوعات البرنامج.

ب-الشرح والمناقشة لكل موضوع من موضوعات البرنامج فى ساعتين تدريسيتين، ثم إعطاء الفرصة للطلاب لعمل تطبيقات وحل تدريبات منتقاة بعناية فى ساعتين أخريين بواقع ٤ ساعات أسبوعياً.

ج- توجيه عناية الطلاب إلى أهمية تفعيل دورهم فى تنفيذ موضوعات البرنامج حيث إن ساعات تنفيذ هذه الموضوعات ضمن الساعات التدريسية لمقررات كفايات التربية العملية، وحثهم على المشاركة الفعالة من خلال الرجوع إلى العديد من مصادر التعلم وأهمها شبكة المعلومات الدولية-الإنترنت-enternet للحصول على مسائل وتمارين تتحدى تفكيرهم بما تتطلبه من برهان رياضى مباشر وغير مباشر.

د- مشاركة الطلاب وإسهاماتهم بأوراق بحثية وكتابة آرائهم عن البرهان الرياضى وأهميته فى حياتنا وفائدة تمكن معلمى الرياضيات من الأساليب المختلفة للبرهنة الرياضية.

هـ- تحديد تكليفات(تعيينات) للطلاب فى أثناء ساعتى الشرح والمناقشة للتفكير فى كيفية برهنتها ومناقشة الحلول معهم فى ساعتى التطبيقات وحل التدريبات والإشادة بأفضل أداء للطلاب الذين استخدموا أسلوب للبرهة وإعطائهم فرصة لعرض أعمالهم أمام زملائهم، إما على السبورة، أو من خلال ما قاموا به من عمل برامج تقديمية Power Point، وطلب طرق أخرى للبرهنة على نفس المشكلات من الطلاب الآخرين.

و- اختيار بعض المشكلات الرياضية المتدرجة من السهولة إلى الصعوبة عند التأكيد على مهارات البرهنة حتى لا يسبب ذلك إحباطاً وقلقاً لدى العديد من الطلاب، وخاصة فى بعض المشكلات الهندسية التى يعانون من صعوبتها، حيث اتضح ذلك للباحث بصورة كبيرة فى أثناء ساعات التدريس المصغر التى يؤديها هؤلاء الطلاب.

ز- الحرص على تزويد كل طلاب المجموعة التجريبية بنسخة من موضوعات البرنامج وأمثلته وتدريباته حتى يتسنى لهم العمل فى أوقات إضافية غير الساعات التدريسية

المعتمدة والتى ينفذ البرنامج من خلالها، وحتى يتسنى لهم كتابة أية ملاحظات أو تعليقات على أهداف البرنامج ومحتواه فى صورة تقارير يتم مناقشتها معهم.

ح- تخصيص جزء من الساعات المكتبية أو ساعات الإرشاد الأكاديمى لدى الباحث كوقت إضافى لمناقشة الطلاب مجموعة التجريب فى بعض الأمور التى تظهر أمامهم من خلال دراسة موضوعات البرنامج بأنفسهم(أسلوب التعلم الذاتى لموضوعات البرنامج والتدريب عليها) والرد على استفساراتهم بطريقة مقنعة مما يزيد من قناعتهم بأهمية التجربة وزيادة دافعيتهم لمزيد من التعلم.

هـ- أساليب تنفيذ البرنامج : استند البرنامج الحالى فى تنفيذه إلى مجموعة من الأساليب لدراسة محتويات البرنامج والتدريب عليها، تمثلت فى :

(١) **أسلوب الندوة** : حيث تم عقد لقاء تمهيدى مع الطلاب عينة المجموعة التجريبية بهدف تعريفهم بموضوعات البرنامج، وأهدافه وأهميته بالنسبة لهم لتمكينهم من مهارات البرهان الرياضى- لاسيما المهارات المتصلة باستخدام أساليب برهان غير مباشرة- وعلاقة ذلك بخفض مستوى القلق الذى ينتابهم نتيجة الاستعداد لتدريس مشكلات رياضية تحتاج إلى البرهان الرياضى وذلك فى أثناء حصص التدريس المصغر، وبالتالى رفع مستوى تمكنهم من مقررات الرياضيات المدرسية التى سيقومون بتدريسها فيما بعد. وقد أبدى الطلاب استجابة قوية ورغبة أكيدة فى دراسة موضوعات البرنامج والتعرف على المزيد من أساليب البرهان الرياضى. كما هدف أسلوب الندوة واللقاء المفتوح مع الطلاب إلى تعريف الطلاب مجموعة الدراسة بالمدة الزمنية التدريسية المخصصة لهذا البرنامج وهى ثلاثة أسابيع بواقع ٤ ساعات أسبوعياً أى مدة الدراسة الفعلية للبرنامج(١٢) ساعة تدريسية (ساعتان أثناء محاضرة استراتيجيات التدريس، وساعتان أثناء محاضرة إتقان المحتوى كل أسبوع).

(٢) **أسلوب المناقشة والحوار** : حيث استخدم هذا الأسلوب فى أثناء التنفيذ الفعلى للبرنامج للتعرف على مدى إدراك الطلاب لطبيعة الموضوعات، وتمكنهم من الأمثلة والتدريبات المتضمنة بالبرنامج، ومدى صحة التطبيقات التى يقومون بها، وتصحيح الأخطاء التى تظهر أولاً بأول، وتعزيز الأعمال المميزة والتى تظهر قدرات إبداعية فى البرهنة الرياضية، حتى أن بعض الطلاب (وخاصة الطالبات) قد أظهروا أكثر من طريقة للبرهنة(سواء المباشرة أو غير المباشرة) للنظرية الواحدة أو لبعض المشكلات الرياضية.

(٣) **أسلوب التعلم الذاتى**: حيث تم توزيع نسخة مصورة من موضوعات البرنامج متضمنة: الأمثلة والتدريبات والتطبيقات المطلوب القيام بها على جميع أفراد المجموعة التجريبية

كنوع من التدريب الذاتى على هذه المحتويات إما بهدف تأكيد فهمهم لبعض الأمور التى تم مناقشتها فى ساعات تدريسية سابقة أو تمهيداً لمناقشتها فى ساعات تدريسية لاحقة.

**ثالثاً: تطبيق تجربة الدراسة :** مرت عملية تطبيق الدراسة الحالية بالمراحل الآتية :

- **المرحلة الأولى :** بعد تحديد عينة الدراسة ممثلة فى جميع طلاب السنة الثالثة شعبة الرياضيات بكلية التربية بصور فى سلطنة عمان فى الفصل الدراسى الثانى٢٠٠٥/٢٠٠٦م، وبعد تقسيم هؤلاء الطلاب إلى مجموعتين تجريبية وضابطة، تمثلت المرحلة الأولى من مراحل تطبيق تجربة الدراسة الحالية فى التطبيق القبلى لأدوات الدراسة: اختبار مهارات البرهان الرياضى – مقياس قلق البرهان – اختبار مهارات التواصل الرياضى على طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة وذلك بهدف تحديد مستوياتهم القبلية فى كل متغير من المتغيرات التابعة الثلاثة وتحديد ما إذا كانت هناك فروق دالة بين طلاب المجموعتين فى كل متغير من متغيرات الدراسة. وقد تم تطبيق أدوات الدراسة قبلياً فى الأسبوع الأخير من شهر مارس٢٠٠٦م(من ٣/٢٥ إلى ٢٠٠٦/٣/٢٩م).
- **المرحلة الثانية:** فى ضوء نتائج التطبيق القبلى وتأكد الباحث من تدنى درجات الطلاب مجموعة الدراسة(التجريبية والضابطة) فيما يتعلق باكتسابهم لمهارات البرهان الرياضى، فقد تمثلت المرحلة الثانية من مراحل تنفيذ تجربة الدراسة الحالية فى تطبيق البرنامج التعليمى التدريبى المقترح على طلاب المجموعة التجريبية فى أثناء الساعات التدريسية المخصصة لتدريس استراتيجيات البرهان الرياضى(ضمن مقرر استراتيجيات التدريس) فى حين تم استخدام طريقة المحاضرة المعتادة مع طلاب المجموعة الضابطة دون تزويدهم بنسخ مطبوعة من موضوعات البرنامج، وقد استغرقت عملية تطبيق البرنامج المقترح على طلاب المجموعة التجريبية فترة زمنية قدرها ثلاثة أسابيع، وهى نفس الفترة المخصصة لتدريس نفس الموضوعات مع طلاب المجموعة الضابطة الأسابيع الثلاثة الأولى من شهر أبريل(الفترة من السبت٢٠٠٦/٤/١م وحتى الأربعاء٢٠٠٦/٤/١٩م).

وأثناء هذه المرحلة فقد راعى الباحث ضرورة متابعة أداء الطلاب ومناقشاتهم حول البرنامج والرد على تساؤلاتهم وذلك فى أثناء الساعات المكتبية أو ساعات الإرشاد الأكاديمى كساعات إضافية إلى مدة تنفيذ البرنامج.

- **المرحلة الثالثة:** بعد الانتهاء من تطبيق البرنامج المقترح فى المدة الزمنية المشار إليها فى المرحلة الثانية، كان لابد من التعرف على أثر دراسة هذا البرنامج كمتغير مستقل فى تعديل مستويات الطلاب بالنسبة للمتغيرات الثلاثة التابعة فى الدراسة الحالية: تنمية

مهارات البرهان الرياضى- خفض مستويات قلق البرهان-تحسين مهارات التواصل الرياضى، لذلك قام الباحث بتطبيق أدوات الدراسة المشار إليها تطبيقاً بعدياً فى الأسبوع الرابع من شهر أبريل(الفترة من السبت٢٢/٤/٢٠٠٦م وحتى الأربعاء ٢٦/٤/٢٠٠٦م) تمهيداً لاستخلاص نتائج الدراسة ومناقشتها وتفسيرها. وهذا ما يعرض له الباحث بشئ من التفصيل فى الجزء الآتى :

**رابعاً: مناقشة نتائج الدراسة وتفسيرها :**

**اختبار صحة فروض الدراسة والإجابة عن تساؤلاتها :**

للإجابة عن التساؤل الأول من تساؤلات الدراسة والذى على :

"ما أهم مهارات البرهان الرياضى(المباشر والغير مباشر) التى ينبغى أن يتمكن منها طلاب كليات التربية شعبة الرياضيات؟" فقد تم تحديد قائمة بأهم مهارات البرهان الرياضى من وجهة نظر مجموعة من المتخصصين فى مجال الرياضيات وكذلك مجموعة من موجهى مادة الرياضيات بالتعليم العام، وقد تضمنت قائمة المهارات(٣٩) مهارة من مهارات البرهان الرياضى اللازمة لطلاب كليات التربية تخصص الرياضيات تم إقرارها من قبل المحكمين **(ملحق١)**

- **التحقق من صحة الفروض المرتبطة بفاعلية البرنامج المقترح كمتغير مستقل فى تنمية مهارات البرهان الرياضى كمتغير تابع.**

١-التحقق من صحة الفرض الأول والذى ينص على: **"لا يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لاختبار مهارات البرهان الرياضى"**. تم استخدام اختبار"ت" لمتوسطين غير مرتبطين حيث ن١ ≠ ن٢، ويوضح ذلك الجدول الآتى :

**جدول(٦)**

**قيمة "ت" لدلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لاختبار مهارات البرهان الرياضى**

| المجموعة | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة"ت" | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|
| التجريبية | ٣٠ | ٤٥,٨٣ | ٣,٧ | ١,٦٢ | غير دالة |
| الضابطة | ٢٧ | ٤٢,٩٦ | ٧,٧٩ | | |

يتضح من جدول(٦) أن قيمة ت المحسوبة(١.٦٢)، وهى غير دالة عند أى مستوى، لأن قيمة(ت) الجدولية عند مستوى دلالة(٠,٠٥) هى (٢,٠١) وعند مستوى(٠,٠١) هى (٢,٦٨) (فؤاد البهى السيد، ١٩٧٩: ٣٤٠). مما يدل على تكافؤ مجموعتى الدراسة

(التجريبية والضابطة) فى تحصيلهم لمهارات البرهان الرياضى وذلك قبل بداية الدراسة التجريبية، وبالتالى يمكن قبول الفرض الصفرى الأول، كما يمكن إرجاع أية فروق قد تظهر بين المجموعتين فى التطبيق البعدى إلى تأثير المعالجة التجريبية.

كما يتضح من جدول(٦) السابق تدنى متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة إذ وجد أنهما على الترتيب(٤٥,٨٣)؛ (٤٢,٩٦) خاصة إذا علم أن الدرجة النهائية لاختبار مهارات البرهان الرياضى هى (٩٠) درجة، ولمعرفة مصدر هذا التدنى ودلالته، فقد قام الباحث بتحليل درجات الطلاب المعلمين فى التطبيق القبلى لاختبار مهارات البرهان الرياضى(درجات كل طالب على حده فى المجموعتين التجريبية والضابطة) واتضح وجود أخطاء عديدة لدى الطلاب مجموعة الدراسة سواء فى المجموعة التجريبية أو الضابطة، ويدل ذلك على تدنى مستوى الطلاب المعلمين فى الإلمام بمهارات البرهان الرياضى وخاصة المهارات المرتبطة باستخدام مداخل البرهنة غير المباشرة وعلى وجه الخصوص فيما يتعلق بإدراك طبيعة وإجراءات نمط البرهان الرياضى غير المباشر المستخدم فى البرهنة. وقد تمثلت أهم الأخطاء التى يقع فيها الطلاب المعلمون باعتبارها مظهراً من مظاهر صعوبات تعلم البرهان الرياضى لدى هؤلاء الطلاب فى :

- عدم القدرة على تحديد المعطى والمطلوب والتمييز بينهما وخاصة فى التمارين الرياضية التى تتضمن العبارة الشرطية الثنائية إذا وفقط إذا.
- ضعف قدرة الطلاب المعلمين مجموعة الدراسة فى تتابع تسلسل خطوات البرهان الرياضى من المعطيات ووصولاً إلى إثبات صحة المطلوب.
- عدم تمكن هؤلاء الطلاب من استخدام أسلوب(مدخل) البرهان الرياضى غير المباشر فى مكانه الصحيح، وعدم معرفة أى مدخل بالضبط سيستخدم فى حل هذا النمط من المسائل التى تحتاج إلى مهارات برهنة غير مباشرة.
- أظهر الطلاب ضعفاً واضحاً مصدره عدم تمكنهم من مكونات المادة الرياضية(نظريات- تعميمات-حقائق-مسلمات...) التى تساعدهم فى استمرارية حل المشكلة واستكمال خطوات البرهان الرياضى حتى فى تلك المسائل والمشكلات الرياضية التى تحتاج إلى ممارسة أسلوب البرهان المباشر.
- وجدت أخطاء كثيرة جداً فيما يختص بترجمة المسألة الرياضية من صورة لفظية إلى رسومات أو أشكال هندسية، وتمثلت هذه الأخطاء فى كتابة وتحديد بعض الأشياء على الرسم وهى من المطلوب إثبات صحتها أو عدم تحديد بعض الأشياء على الرسم وهى من المعطيات.

وبالتعرف على أنماط الأخطاء التى يقع فيها الطلاب المعلمـــون فـــى موضوعـــات البرهان الرياضى، والتى تمثل صعوبات تعلم لديهم فى هذه الموضوعـــات، يتضـــح تدنـــى مستوى الطلاب مجموعة الدراسة(التجريبية والضابطة) من خلال درجاتهم فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات البرهان الرياضى، وبذلك يكون الباحث قد أجاب عن التساؤل الثـــانى مـــن تساؤلات الدراسة والذى ينص على "**ما مستويات طلاب كليات التربية بشعبة الرياضيات فـــى الإلمام بمهارات البرهان الرياضى؟**".

وتتفق هذه النتيجة التى توصلت إليها الدراسة الحالية مع نتائج العديد من الدراســـات الســـابقة فـــى هـــذا المجـــــال ومنـــــها دراســـــة (**خليفـــــة عبدالســـــميع، ١٩٨٣**)، دراسة (**Almeida, D, 1995, In: Jones, k, 2000**)، دراســة (**Moore, R, 1994; In : Jones, K, 2000**)

حيث أشاروا إلى أن طلاب مرحلة الجامعة أثناء اكتســـابهم للمفـــاهيم والتصـــورات التقليدية للبرهان الرياضى، فإنهم ما زالوا عند المستوى ما قبل الرسمى، وأنه حتى الـــبراهين السطحية ما زالت تمثل تحديات كبيرة لعدد كبير من طلاب الجامعة الذين يدرسون مقـــررات فى الرياضيات، كما تتفق نتائج الدراسة الحالية مع نتائج دراسة كل من :

**(Gardiner, T., and Moreira, C, 1998), (Harel, G., and Sowder, L, 1998), (Healy, L., and Hoyles, C., 1998)**

وكذلك تتفق مع نتائج دراسة (**أحمد سيد أحمد، ٢٠٠٥**) حيث أشارت نتائج كل هـــذه الدراسات إلى وجود صعوبات تواجه طلاب الجامعة فـــى فـــهم وإدراك وإنتـــاج الـــبراهين الرياضية، وأن هناك نسبة دالة من الطلاب يقومون بتخمين حلول للمسائل مطابقـــة للمســـألة الأصلية، وقد اقترحت بعض هذه الدراسات مداخل تدريسية للتغلب علـــى الصعوبـــات التـــى تواجه طلاب الجامعة عند إعادة إنتاج البراهين التى تم تدريسها.

٢- التحقق من صحة الفرض الثانى والذى ينص على: "**يوجـــد فـــرق دال إحصائيـــاً بيـــن متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعـــدى لاختيـــار مهارات البرهان الرياضى وذلك لصالح درجات طلاب المجموعـــة التجريبيـــة**". فقـــد استخدم الباحث اختبار "ت" لمتوسطين غير مرتبطين حيث ن١ ≠ ن٢، ويوضـــح ذلـــك الجدول الآتى :

**جدول(٧)**

**قيمة "ت" لدلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات البرهان الرياضى**

| المجموعة | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة"ت" | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|
| التجريبية | ٣٠ | ٧٦,٥٧ | ١١,٦ | ٥,٧٣ | دالة عند مستوى(٠,٠١) |
| الضابطة | ٢٧ | ٦١,٦٢ | ٦,٩٩ | | |

ويتضح من جدول(٧) أن قيمة"ت" المحسوبة هى(٥,٧٣)، وبالكشف عنها وجد أنـــها دالة عند مستوى(٠,٠١)، مما يدل على وجود فرق له دلالته الإحصائية عند هذا المستوى بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات البرهان الرياضى، ويرجع هذا الفرق إلى تأثير المعالجة التجريبية المقترحة، إذ أن اســتخدام أساليب غير مباشرة للبرهنة الرياضية له تأثير فعال فى تحسين مهارات البرهان الريـــاضى لدى طلاب المجموعة التجريبية. إذ أن تعويد الطلاب المعلميـــن علـــى تحديـــد المعطيـــات والمطلوب فى كل مشكلة رياضية، وكذلك تحديد استراتيجية البرهان المستخدمة وأى مدخـــل من مداخل البرهنة غير المباشرة، والتتابع المنطقى لكل خطوة من خطوات البرهان الرياضى غير المباشر، كل ذلك من شأنه العمل على تنمية المهارات المرتبطة بأيـــة عمليـــة برهنـــة رياضية والتفكير فى البرهان الرياضى بأكثر من طريقة. كمـــا كـــان لاســـتخدام المعالجـــة التجريبية المقترحة متمثلة فى استخدام المداخل غير المباشرة للبرهنة الرياضية أكبر الأثر فى اكتساب الثقة بالنفس والقدرة على التعامل مع معظم المشكلات الرياضية بنجاح خاصة تلـــك المشكلات التى تحتاج إلى استخدام الأسلوب المباشر فى البرهان.

وبالتالى يمكن قبول الفرض الثانى من فروض الدراسة.

٣- التحقق من صحة الفرض الثالث والذى ينص على: **"يوجـــد فـــرق دال إحصائيـــاً بيـــن متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيقين القبلـــى والبعـــدى لاختبـــار مهارات البرهان الرياضى، وذلك لصالح درجات الطلاب فى التطبيق البعدى"** تم اســتخدام اختبار"ت" لدلالة الفروق بين متوسطي مرتبطين حيث ن١=ن٢ بل هى نفس المجموعـــة من الطلاب وطبق عليها الاختبار مرتين عند درجات حرية ٢٩(ن-١) حيث يوجد ن من أزواج الدرجات فى الاختبارين (**فؤاد البهى السيد، ١٩٧٩: ٣٤٢**)، كما تم حساب قـــوة للإحصاءات (قياس قوة الدلالة أو تأثير البرنامج) عن طريق حساب قيمـــة مربـــع إيتـــا وتحويلها إلى قيمة "د" (**سعد عبدالرحمن، ١٩٩٨: ١٣٦**).

جدول(٨)

**قيمة "ت" لدلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيقين القبلى والبعدى لاختبار مهارات البرهان الرياضى**

| التطبيق | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة ت | مستوى الدلالة | حجم التأثير | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مربع إيتا | د |
| القبلى | ٣٠ | ٤٥,٨٣ | ٣,٧ | ٢٢,٩٦ | دالة عند مستوى (٠,٠١) | ٠,٩٥ | ٨,٨٢ |
| البعدى | ٣٠ | ٧٦,٥٧ | ١١,٦ | | | | |

يتضح من جدول(٨) وجود دلالة إحصائية عند مستوى(٠,٠١) لقيمة ت المحسوبة وهى(٢٢,٩٦)، مما يدل على وجود فرق ذى دلالة إحصائية بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيق القبلى ودرجاتهم فى التطبيق البعدى فى نفس اختبار مهارات البرهان الرياضى لصالح التطبيق البعدى، كما يتضح من الجدول أن البرنامج التجريبى الذى اقترحته الدراسة الحالية ذو فعالية كمتغير مستقل فى تنمية مهارات البرهان الرياضى كمتغير تابع وذلك من خلال قيمة مربع إيتا(٠,٩٥) كما يدل على ذلك قيمة "د" المحسوبة(٨,٨٢) وهى قيمة عالية تدل على تأثير قوى للبرنامج المقترح، وهذا إن دل على شئ فإنما يدل على أثر استخدام المعالجة التجريبية التى تقترحها الدراسة الحالية(استخدام مداخل البرهنة الرياضية غير المباشرة) فى تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية الذين تعرضوا لدراسة البرنامج المقترح. وبالتالى يمكن قبول الفرض الثالث من فروض الدراسة.

وبالتأكد من صحة الفروض الثلاثة (١)،(٢)،(٣) المرتبطة بمهارات البرهان الرياضى، فقد أمكن الإجابة عن التساؤل الثالث من تساؤلات الدراسة الحالية والذى ينص على: **"ما فعالية برنامج مقترح قائم على استخدام بعض المداخل غير المباشرة للبرهنة الرياضية فى تنمية مهارات البرهان الرياضى (المباشر وغير المباشر) لدى طلاب عينة الدراسة؟"**.

وبذلك يتضح أن البرنامج المقترح قد أدى إلى تنمية مهارات البرهان الرياضى(المباشر وغير المباشر) لدى طلاب شعبة الرياضيات بكليات التربية بدرجة ملحوظة، وتتفق هذه النتيجة مع ما توصلت إليه نتائج البحوث والدراسات السابقة التى اهتمت بتوضيح أثر استخدام معالجات مختلفة على بعض المتغيرات لدى معلمى الرياضيات أو الطلاب المعلمين شعبة الرياضيات مثل دراسة كل من :

**(Alibert,D., and Thomas, M, 1991), (Finlow, K., et al, 1993), (I Zen, Stanley, P., 1998), (عبدالله عزب، ٢٠٠٠)**

ويُرجع الباحث دلالة هذا الأثر الواضح للبرنامج المقترح (للمعالجة التجريبية) إلى طبيعة البرنامج وتركيزه على العديد من الأمثلة والتدريبات التى توضح كيفية استخدام أساليب مباشرة وغير مباشرة فى البرهنة الرياضية، وليس الاقتصار على مجرد حفظ بعض البراهين الخاصة ببعض النظريات أو التمارين المشهورة، بل تعدى ذلك إلى التعرض لأنماط مواقف رياضية غير مألوفة ولم يتعود الطالب المعلم على دراستها فى مراحل التعليم قبل الجامعى، أو حتى فى أثناء تعليمه بمرحلة البكالوريوس بكلية التربية، فقد يضطر الطالب إلى أن يحفظ بعض البراهين غير المباشرة التى تعرض عليه فى مقرر التحليل العددى أو التحليل الدالى أو الجبر المجرد أو الطرق الرياضية بهدف عبور مشكلة الامتحان فى المقرر الدراسى وليس

بهدف التمكن من هذه البراهين لتدريسها لتلاميذه فيما بعد. أما فى البرنامج المقترح فقد كان الطالب أكثر ألفة بهذا النوع من الأمثلة والتدريبات وكان لدى معظم الطلاب الرغبة فى معرفة المزيد من الأمثلة والتعرض لتدريبات مشابهة بصورة أكثر، وقد ظهر ذلك بصورة واضحة فى محاولاتهم الحصول على المزيد من الأمثلة التى تحتاج إلى ممارسة نمط البرهنة غير المباشرة وذلك من خلال مراجعتهم للعديد من المواقع المهتمة بتدريس الرياضيات فى شبكة المعلومات الدولية.

- **التحقق من صحة الفروض المرتبطة بفاعلية البرنامج المقترح كمتغير مستقل فى خفض قلق البرهان الرياضى كمتغير تابع.**

٤- التحقق من صحة الفرض الرابع والذى ينص على: **"لا يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لمقياس قلق البرهان الرياضى"**. فقد تم استخدام اختبار"ت" لتوضيح دلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب مجموعة الدراسة فى التطبيق القبلى لمقياس قلق البرهان الرياضى، وذلك لمتوسطين غير مرتبطين، ويوضح ذلك الجدول الآتى :

**جدول(٩)**

**قيمة "ت" لدلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لمقياس قلق البرهان الرياضى**

| المجموعة | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة"ت" | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|
| التجريبية | ٣٠ | ١٠٢,٦٧ | ٩,٠٣ | ٠,٣٢ | غير دالة عند مستوى(٠,٠٥) |
| الضابطة | ٢٧ | ١٠١,٨١ | ١٠,٩٣ | | |

ويتضح من جدول(٩) أن الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لمقياس قلق البرهان الرياضى هو فرق غير دال عند أى مستوى(حيث لم تثبت دلالته الإحصائية عند مستوى٠,٠٥)، مما يدل على تجانس المجموعتين فى هذا المتغير قبل بداية تجربة الدراسة وبالتالى يمكن قبول الفرض الرابع من فروض الدراسة.

٥- التحقق من صحة الفرض الخامس والذى ينص على : **"يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لمقياس قلق البرهان الرياضى وذلك لصالح درجات طلاب المجموعة الضابطة"**. وقد تم استخدام اختبار"ت" لتوضيح هذه الدلالة لمتوسطين غير مرتبطين، ويوضح ذلك الجدول الآتى :

جدول(١٠)

**قيمة "ت" لدلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدى لمقياس قلق البرهان الرياضي**

| المجموعة | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة"ت" | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|
| التجريبية | ٣٠ | ٤٩,٤ | ١٢,٤٩ | ٩,٧٦ | دالة عند مستوى(٠,٠١) |
| الضابطة | ٢٧ | ٧٤,٤٨ | ٤,٣٢ | | |

تشير نتائج جدول(١٠) إلى وجود فرق ذى دلالة إحصائية عند مستوى(٠,٠١) بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لمقياس قلق البرهان الرياضى، وهذا الفرق يدل على ارتفاع مستوى القلق لدى الطلاب ذوى متوسط الدرجات الأعلى (طلاب المجموعة الضابطة)، وإن كان كلا المتوسطين هو أقل من متوسطى درجاتهم فى التطبيق القبلى، مما يدل على انخفاض مستوى القلق لدى طلاب كلا المجموعتين إلا أن الانخفاض كان لصالح طلاب المجموعة التجريبية، حيث إن البرنامج المقترح الذى تستند إليه الدراسة الحالية قد أسهم فى خفض(اختزال) مستوى قلق البرهان الرياضى لدى طلاب مجموعتى الدراسة(التجريبية والضابطة)، إلا أنه أسهم بشكل فعال له دلالته فى خفض مستوى قلق البرهان الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية. وتتفق هذه النتيجة مع ما ذهب إليه دراسة كل من (**محمد عبدالسميع، ١٩٩٦**)، (**على عبدالرحيم، ١٩٩٩**)، (**محمد سعد العرابى، ٢٠٠٤**) حيث أكدت نتائج كل منهما على أثر استخدام المعالجة المستخدمة فى خفض مستوى القلق الرياضى، سواء القلق من التحصيل فى الرياضيات أو القلق من تدريس البرهان الهندسى.

٦- التحقق من صحة الفرض السادس والذى ينص على: "**يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيقين القبلى والبعدى لمقياس قلق البرهان الرياضى وذلك لصالح درجات الطلاب فى التطبيق القبلى**". لذلك تم حساب قيمة ت لمتوسطين مرتبطين كما تم حساب قوة الإحصاءات(قياس قوة الدلالة أو تأثير البرنامج) عن طريق حساب قيمة مربع إيتا ويوضح ذلك الجدول الآتى :

جدول (١١)

**حجم تأثير البرنامج المقترح فى خفض مستوى قلق البرهان الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية**

| التطبيق | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة ت | مستوى الدلالة | حجم التأثير | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مربع إيتا | د |
| القبلى | ٣٠ | ١٠٢,٦٧ | ٩,٠٣ | ١٦,٤٦ | دالة عند مستوى (٠,٠١) | ٠,٩٠٣ | ٦,١٢ |
| البعدى | ٣٠ | ٤٩,٤ | ١٢,٤٩ | | | | |

ويتضح من هذا الجدول وجود فرق ذى دلالة إحصائية عند مستوى (٠,٠١) بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية قبل وبعد التجريب فى خفض مستوى قلق البرهان الرياضى ككل، وبذلك يمكن قبول الفرض السادس من فروض الدراسة.

كما يتضح أن البرنامج التجريبى المقترح ذو تأثير كبير، مما يدل على وجود فعالية للبرنامج المقترح كمتغير مستقل له أثره الواضح فى خفض مستوى قلق البرهان الرياضى حيث اتضح أن قيمة مربع إيتا = ٠,٩٠٣، وأن قيمة د المحسوبة هى(٦,١٢) وهى قيمة عالية تدل على تأثير قوى للمعالجة المستخدمة بهدف خفض مستوى قلق البرهان الرياضى لدى طلاب شعبة الرياضيات بكليات التربية.

وبالتحقق من صحة فروض الدراسة(٤)، (٥)،(٦) تتم الإجابة عن التساؤل الرابع من تساؤلات الدراسة والذى ينص على: **"ما فعالية البرنامج المقترح فى خفض مستوى قلق البرهان لدى الطلاب المعلمين عينة الدراسة"**.

- **التحقق من صحة الفروض المرتبطة بفاعلية البرنامج المقترح كمتغير مستقل فى تحسين مهارات التواصل الرياضى كمتغير تابع.**

٧- التحقق من صحة الفرض السابع والذى ينص على: **"لا يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لاختبار مهارات التواصل الرياضى"**. لذلك تم حساب قيمة ت لمتوسطين غير مرتبطين، ويوضح ذلك الجدول الآتى :

**جدول(١٢)**

**قيمة "ت" لدلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق القبلى لاختبار مهارات التواصل الرياضى**

| المجموعة | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة"ت" | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|
| التجريبية | ٣٠ | ٢٥,٩ | ٥,٠٠٢ | ٠,٥١ | غير دالة |
| الضابطة | ٢٧ | ٢٥,١٩ | ٥,٣٩ | | |

يتضح من جدول(١٢) أن قيمة ت المحسوبة هى (٠,٥١)، وبالكشف عن دلالتها عند مستوى(٠,٠٥) وجد أنها غير دالة عند هذا المستوى، مما يدل على تكافؤ مجموعتى الدراسة (التجريبية والضابطة) فى مهارات التواصل الرياضى وذلك قبل بداية التجربة. وبالتالى يمكن قبول الفرض السابع من فرض الدراسة، مما يعنى إمكانية إرجاع أية فروق قد تظهر بين

المجموعتين فى التطبيق البعدى فى اختبار مهارات التواصل الرياضى إلى تـــأثير المعالجـــة التجريبية المستخدمة فى الدراسة الحالية.

٨- التحقق من صحة الفرض الثامن والذى ينص على: **"يوجـــد فـــرق دال إحصائيـــاً بيـــن متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لاختبـــار مهارات التواصل الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات طلاب المجموعة التجريبية".**

ولذلك تم حساب قيمة"ت" لدلالة الفروق بين متوسطين غير مرتبطين، ويوضـــح ذلـــك الجدول الآتى:

**جدول(١٣)**

**قيمة "ت" لدلالة الفرق بين متوسطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات التواصل الرياضى**

| المجموعة | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة"ت" | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|
| التجريبية | ٣٠ | ٤٢,٤٣ | ٤,٠٧ | ٢,٨٧ | دالة عند مستوى(٠,٠١) |
| الضابطة | ٢٧ | ٣٨ | ٧,١٣ | | |

ويتضح من جدول(١٣) أن قيمة ت المحسوبة = ٢,٨٧، وهى دالـــة عنـــد مســـتوى (٠,٠١)، مما يدل على وجود فرق له دلالته الإحصائية عند هذا المســـتوى بيـــن متوســـطى درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات التواصل الرياضى فى المهارات ككل.

٩- التحقق من صحة الفرض التاسع والذى ينص على : **"يوجد فـــرق دال إحصائيـــاً بيـــن متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيقين القبلـــى والبعـــدى لاختبـــار مهارات التواصل الرياضى، وذلك لصالح متوسط درجات التطبيق البعدى"**، فقد تم حساب قيمة"ت" لمتوسطين مرتبطين كما سبقت الإشارة إلى ذلك كما تم قيـــاس قـــوة الدلالـــة أو التأثير لقيمة "ت" المحسوبة عن طريق حساب قيمة مربع إيتا، تحويلها إلـــى القيمـــة "د"، والجدول الآتى يوضح البيانات الإحصائية المستخدمة فى حساب هذه القيم.

**جدول(١٤)**

**حجم تأثير البرنامج المقترح فى تحسين مهارات التواصل الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية**

| التطبيق | العدد(ن) | المتوسط(م) | الانحراف المعيارى(ع) | قيمة ت | مستوى الدلالة | حجم التأثير | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | مربع إيتا | د |
| القبلى | ٣٠ | ٢٥,٩ | ٥,٠٠٢ | ٣٢,٦٩ | دالة عند مستوى (٠,٠١) | ٠,٩٧٣ | ١٢,٣١ |
| البعدى | ٣٠ | ٤٢,٤٣ | ٤,٠٧ | | | | |

ويتضح من هذا الجدول وجود فرق له دلالته الإحصائية بين متوسطى درجات طلاب المجموعة التجريبية قبل وبعد التجريبية عند مستوى(٠,٠١) وذلك لصالح التطبيق البعدى لاختبار مهارات التواصل الرياضى ككل. وبذلك يمكن قبول الفرض التاسع من فروض الدراسة.

كما يتضح من الجدول أن قيمة "مربع إيتا" = ٠,٩٧٣ وهى قيمة عالية ويدل على ذلك قيمة "د" المحسوبة وهى١٢,٣١ حيث تشير إلى نسبة مرتفعة، مما يؤكد وجود أثر كبير له دلالته الإحصائية للمعالجة التجريبية المستخدمة، وبالتالى يمكن الحكم على فعالية البرنامج التجريبى المقترح كمتغير مستقل فى تنمية مهارات التواصل الرياضى لدى طلاب كليات التربية شعبة الرياضيات.

ومن خلال التحقق من فروض الدراسة(٧)،(٨)،(٩) تتم الإجابة عن التساؤل الخامس من تساؤلات الدراسة والذى ينص على: **"ما فعالية البرنامج المقترح فى تحسين مهارات التواصل الرياضى لدى الطلاب المعلمين عينة الدراسة؟"**.

- **التحقق من صحة الفروض المرتبطة بالعلاقات بين متغيرات الدراسة.**

١٠- التحقق من صحة الفرض العاشر والذى ينص على: **"توجد علاقة ارتباطية موجبة بين تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية وبين انخفاض مستوى قلقهم من البرهان الرياضى"**. لذلك تم حساب معامل الارتباط بين درجات أفراد المجموعة التجريبية فى التطبيق البعدى لكل من اختبار مهارات البرهان الرياضى ومقياس قلق البرهان الرياضى باستخدام الصورة العامة لمعامل الارتباط(**فؤاد البهى السيد، ١٩٧٩: ٣٨٤**)، وقد بلغ معامل الارتباط بهذه الطريقة(٠,٨١٦) وهى قيمة دالة إحصائياً عند مستوى دلالة(٠,٠٥)، مما يشير إلى وجود علاقة ارتباطية موجبة بين درجات طلاب المجموعة التجريبية فى اختبار مهارات البرهان الرياضى ودرجاتهم المناظرة فى مقياس قلق البرهان الرياضى فى التطبيق البعدى لكل منهما، مما يدل على وجود علاقة قوية بين تمكن هؤلاء الطلاب من مهارات البرهان الرياضى وانخفاض مستوى قلق البرهان الرياضى، أى أن ارتفاع مستوى تحصيل طلاب المجموعة التجريبية فى مهارات البرهان الرياضى أدى إلى انخفاض مستوى قلق البرهان الرياضى لدى هؤلاء الطلاب والعكس صحيح مما يمكن معه قبول الفرض العاشر. وتتفق هذه النتيجة مع النتائج التى توصلت إليها دراسة كل من (**محمد عبدالسميع، ١٩٩٦**)، (**على عبدالرحيم، ١٩٩٩**)، (**حسن هاشم، علاء سعد، ٢٠٠٠**)، (**محمد سعد العرابى، ٢٠٠٤**).

وبالتحقق من صحة الفرض العاشر تتم الإجابة عن التساؤل السادس من تساؤلات الدراسة والذى ينص على: "**ما نوع العلاقة بين مستوى إلمام طلاب المجموعة التجريبية لمهارات البرهان الرياضى ومستوى قلقهم من البرهان الرياضى**".

١١- التحقق من صحة الفرض الحادى عشر والذى ينص على: "**توجد علاقة ارتباطية موجبة بين تحسين مهارات التواصل الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية وبين انخفاض مستوى قلقهم من البرهان الرياضى**". لذلك فقد تم حساب معامل الارتباط بين درجات طلاب المجموعة التجريبية فى اختبار التواصل الرياضى، ودرجاتهم المناظرة فى مقياس قلق البرهان الرياضى فى التطبيق البعدى لكل منهما بنفس الأسلوب السابق.

واتضح وجود علاقة ارتباطية موجبة ذات دلالة إحصائية عند مستوى(٠,٠١) بين درجات طلاب المجموعة التجريبية فى اختبار مهارات التواصل الرياضى ودرجاتهم المناظرة فى مقياس قلق البرهان الرياضى، حيث بلغ معامل الارتباط(٠,٧٨٩) بين قدرة هؤلاء الطلاب على التواصل الرياضى وانخفاض مستوى قلق البرهان الرياضى لديهم. مما يؤكد صحة الفرض الحادى عشر وبالتالى قبول هذا الفرض. وتتفق هذه النتيجة مع نتيجة دراسة(**محمد سعد العرابى، ٢٠٠٤**)

وبالتحقق من صحة الفرض الحادى عشر، تتم الإجابة عن التساؤل السابع من تساؤلات الدراسة والذى ينص على "**ما نوع العلاقة بين قدرة طلاب المجموعة التجريبية على التواصل الرياضى ومستوى قلقهم من البرهان الرياضى؟**".

١٢- التحقق من صحة الفرض الثانى عشر والذى ينص على "**توجد علاقة ارتباطية موجبة بين تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب المجموعة التجريبية وتحسين مهاراتهم فى التواصل الرياضى**"، لذلك تم حساب معامل الارتباط بين درجات طلاب المجموعة التجريبية فى التطبيق البعدى لاختبار مهارات البرهان الرياضى ودرجاتهم فى اختبار مهارات التواصل الرياضى.

واتضح وجود علاقة ارتباطية موجبة ذات دلالة إحصائية عند مستوى(٠,٠١) بين درجات طلاب المجموعة التجريبية فى اختبار مهارات البرهان الرياضى ودرجاتهم المناظرة فى اختيار مهارات التواصل الرياضى، حيث بلغ معامل الارتباط(٠,٩١٧)، وهو معامل ارتباط مرتفع يوحى بوجود علاقة طردية موجبة وقوية بين ارتفاع مستوى تمكن الطلاب من مهارات البرهان الرياضى، وتحسين قدرتهم على التواصل فى الرياضيات، مما يمكن معه قبول الفرض الثانى عشر والتأكد من صحته، وتتفق هذه النتيجة مع ما توصلت إليه نتائج بعض الدراسات السابقة مثل دراسة(**محمود الإبيارى، ٢٠٠٢**)، دراسة(**محمد سعد العرابى، ٢٠٠٤**)، حيث أوضحت نتائج كل منهما وجود علاقة موجبة بين التحصيل والتواصل

الرياضى. وبالتحقق من صحة الفرض الثانى عشر، تتم الإجابة عن التساؤل الثامن من تساؤلات الدراسة والذى ينص على: **"ما نوع العلاقة بين مستوى إلمام طلاب المجموعة التجريبية لمهارات البرهان الرياضى وقدرتهم على التواصل الرياضى؟"**.

وبهذا يتضح من خلال التحقق من صحة الفروض (١٠)،(١١)،(١٢) أن البرنامج التجريبى الذى اقترحته الدراسة الحالية قد أسهم فى إيجاد علاقات ارتباطية موجبة بين كل متغيرين من متغيرات الدراسة الثلاثة التابعة وذلك فى اتجاه المعالجة التجريبية، أى لصالح نتائج التطبيق البعدى لأدوات الدراسة، حيث اتضح أن ارتفاع مستوى الطلاب المعلمين فى تحصيل المهارات اللازمة للبرهان الرياضى أدى إلى انخفاض مستوى قلقهم من البرهان وبالتالى ازدادت ثقتهم بأنفسهم فأدى ذلك إلى ارتباط كلا المتغيرين بارتفاع مستوى قدرتهم على التواصل فى الرياضيات -بمهاراته الثلاثة- كمتغير ثالث من متغيرات الدراسة التابعة للبرنامج التدريبى المقترح كمتغير مستقل.

## توصيات الدراسة ومقترحاتها

**توصيات الدراسة :**

فى ضوء ما أظهرته نتائج التطبيق القبلى لأدوات الدراسة من تدنى واضح فى مستوى الطلاب المعلمين فيما يتعلق باكتسابهم لمهارات البرهان الرياضى وقدرتهم على عمل تواصل رياضى فى مواقف رياضية مختلفة، وكذلك فى ضوء ما أظهرته المعالجة التجريبية المقترحة من أثر فى تحسين هذه المهارات وبالتالى خفض مستوى القلق من البرهان الرياضى، وما يتصل به، توصى الدراسة الحالية بالآتى :

١-تفعيل دور مقررات طرق تدريس الرياضيات فى مرحلة البكالوريوس فى التركيز على الموضوعات التى تتناول الطبيعة الاستدلالية للرياضيات وبنائها المنطقى، وأنماط البرهان الرياضى ومهارات البرهنة سواء باستخدام المدخل المباشر أو المداخل غير المباشرة، وتوضيح دور البرهان الرياضى كأداة فى غاية الأهمية لبناء وتطوير بنية رياضية، ومبررات الاهتمام بالبرهان الرياضى، والفرق بين البرهان ومجرد وسائل الإقناع،... إذ يمكن القول بأن الرياضيات هى حل مشكلات عن طريق استخدام سلسلة من الخطوات المنطقية للبرهنة على صدق القضية التى تعرضها المشكلة.

٢-مسايرة ما يدرس فى كليات التربية وبعض الجامعات العربية من استحداث مقررات لكفايات التربية العملية داخل كليات التربية مثل(كفاية التدريس المصغر-كفاية استراتيجيات تدريس مادة التخصص-كفاية إتقان محتوى مناهج مقررات التخصص

بالمرحلتين الإعدادية والثانوية)، فهذا من شأنه تنمية مهارات الطالب المعلم بصفة عامة ومهاراته فى استخدام أساليب البرهان الرياضى بصفة خاصة.

٣-الاهتمام بما جاء فى موضوعات البرنامج التدريبى(التعليمى) الذى قدمته الدراسة الحالية من أنشطة وتكليفات فردية وجماعية للطلاب المعلمين والموجهة نحو تنمية المهارات الرياضية بصفة عامة ومهارات البرهان (المباشر وغير المباشر) بصفة خاصة من خلال أوراق العمل التى أعدت لهذا الغرض وكذلك إرشاد الطلاب وتوجيههم نحو المشاركة الفعالة أثناء عملية التدريس إلى مصادر تعلم أخرى مثل الإنترنت للحصول على المعلومات اللازمة.

٤-تضمين مقررات الرياضيات المدرسية لأمثلة محلولة أو مشكلات رياضية تحتوى على أكثر من أسلوب للبرهان أو يتم برهنتها بأكثر من طريقة. فهذا من شأنه العمل على تنمية إدراك الطالب للمعارف الرياضية وتعميق فهمه عن طبيعة البرهان وكيفية استخدامه والقدرة على تقييم أنسب أسلوب للبرهان يمكن استخدامه فى البرهنة على صحة المطلوب فى موقف رياضى ما.

٥-محاولة تضمين بعض المقررات المدرسية لمادة الرياضيات وخاصة فى مراحل التعليم الأولى(الابتدائى-الإعدادى) لبعض الألغاز والمتناقضات والمسابقات الرياضية التى تحتاج فى حلولها إلى فرض الفروض واختبار صحتها والتدليل على صحتها باستخدام أحد أساليب البرهان الرياضى الصحيحة.

٦-حرص معلمى الرياضيات بمراحل التعليم العام على أن يكتب الطالب تفسيراً(تبريراً) لكل خطوة يقوم بها أثناء عملية البرهان الرياضى، فذلك يظهر مدى فهمه واستيعابه للمعلومات والمعارف والحقائق والتعميمات الرياضية المستخدمة فى تبرير خطوات البرهان، ومن شأنه العمل على تنمية التواصل الرياضى لديه مستقبلاً.

**دراسات مقترحة :**

فى ضوء ما تم التوصل إليه من نتائج تقترح الدراسة الحالية إجراء المزيد من البحوث والدراسات حول :

١-إعداد برنامج لعلاج أوجه القصور فى مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب المرحلة الإعدادية منخفضى التحصيل.

٢-مدى استخدام معلمى الرياضيات بالمرحلة الإعدادية لمداخل البرهنة الرياضية غير المباشرة وأثرها على تحصيل تلاميذهم وتحسين اتجاهاتهم نحو دراسة الرياضيات.

٣-فاعلية تدريب معلمى الرياضيات فى أثناء الخدمة على استخدام المداخل المختلفة للبرهان الرياضى المباشر وغير المباشر وأثره فى تنمية مهاراتهم التدريسية وخفض قلق تدريس البرهان.

٤-دراسة تتبعية(طولية) لنمو مفهوم البرهان الرياضى ومتطلبات البرهنة الرياضية لدى طلاب مراحل التعليم العام.

٥-أثر استخدام بعض مداخل البرهان الرياضى غير المباشر على تنمية مهارة حل المشكلة الرياضية لدى طلاب المرحلة الثانوية.

# المراجـــع العربيـــة


١-**إبراهيم محمد رشوان عشوش(١٩٩٦)**: تنمية مستويات التفكير الهندسى وعلاقتها ببعض المتغيرات المعرفية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، رسالة دكتوراه غير منشـــورة، كليـــة التربية، جامعة طنطا.

٢-**أحمد محمد سيد أحمد(١٩٨٩)**: تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طـــلاب الصـــف الأول الثانوى بالتعليم العام، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية، جامعـــة عيـــن شمس.

٣-**أحمد محمد سيد أحمد(٢٠٠٥)**: مهارات البرهان الرياضى لدى الطلاب المعلمين بشـعب الرياضيات فى كليات التربية"دراسة تشخيصية" المؤتمر العلمى الخامس للجمعية المصرية لتربويات الرياضيات: التغيرات العالمية والتربوية وتعليم الرياضيات، نادى أعضاء هيئـة التدريس ببنها، ٢٠-٢١ يوليو.

٤-**العزب محمد العزب زهران(١٩٩٦)**: فعالية اســتخدام التعلـم التعـاونى فـى تدريـس الرياضيات فى خفض مستوى قلق الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، مجلة كليـة التربية ببنها، عدد يوليو.

٥-**المملكة العربية السعودية(٢٠٠٥)**: برنامج اختبار الكفايات الأساســـية للعـاملين فـى التعليم(اختبارات المعلمين)، كفايات معلمى الرياضيات، وزارة التربية والتعليـم، مركـز التطوير التربوى، الإدارة العامة للقياس والتقويم.

٦-**إلياس يوسف أبو يونس(٢٠٠٠)**: فاعلية برنامج حاسوبى متعـــدد الوســائط لتدريـس الهندسة فى الصف الثانى الإعدادى، رسالة دكتوراه غير منشورة، كلية التربية، جامعـــة دمشق.

٧-**إيمان مصطفى مصطفى عبدالقادر(١٩٩٧)**: فهم الأشكال الهندســـية وخواصـــها لـــدى الطلاب معلمى الرياضيات وعلاقته بمستويات "فان هيلى" للتفكـــير الهندســـى، رســـالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية، جامعة الإسكندرية.

٨-**تشارلز سبيلبرجر(١٩٨٧)**: مقياس قلق الامتحان، ترجمة: محمـــد عبدالعـــال الشـــيخ، القاهرة، مكتبة دار العلم للنشر والتوزيع.

٩-حسن هاشم بلطية، علاء الدين سعد متولى(٢٠٠٠): فاعلية نموذج الألعاب التعليمية التنافسية فى علاج صعوبات تعلم الرياضيات واختزال القلق الرياضى المصاحب لها لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية ذوى صعوبات التعلم. مجلة تربويات الرياضيات،الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، كلية التربية ببنها، العدد الأول.

١٠- حمزة عبدالحكيم الرياشى، وعادل إبراهيم البلز(٢٠٠٠): استراتيجية مقترحة فى التعلم حتى التمكن لتنمية الإبداع الهندسى واختزال قلق حل المشكلة الهندسية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات،كلية التربية ببنها، المجلد الثالث، يوليو.

١١- خالد محمد الجوهرى(١٩٩٤): تحسين تدريس أساليب البرهنة فى الهندسة بالحلقة الثانية من التعليم الأساسى، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية بالفيوم، جامعة القاهرة.

١٢- خليفة عبدالسميع خليفة(١٩٨٧): البحث عن البرهان، بحوث فى تدريس الرياضيات، المجلد الثانى، القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية.

١٣- رضا مسعد السعيد(١٩٨٤): مدى فهم طلاب كليات التربية لطبيعة البرهان الرياضى، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية، جامعة المنوفية.

١٤- رمضان صالح عبدالله(١٩٩١): مدى فاعلية استخدام أسئلة التحضير فى تحصيل الهندسة وخفض قلق الاختبار لدى طالبات الصفين الأول والثانى بالمرحلة الإعدادية، مجلة كلية التربية بالمنصورة، العدد السابع عشر، سبتمبر.

١٥- سعد عبدالرحمن(١٩٩٨): القياس النفسى، النظرية والتطبيق، الطبعة الثالثة، القاهرة، دار الفكر العربى.

١٦- شكرى سيد أحمد(١٩٨٨): قلق التحصيل فى الرياضيات وعلاقته ببعض السمات النفسية والشخصية والمعرفية لدى عينة من الطلاب الخليجيين الجدد، مجلة دراسات الخليج، العدد(٣٢)، المجلد(٨).

١٧- صلاح عبدالحفيظ محمد عبدالدايم(٢٠٠٣): القدرة على التفكير المنطقى(القائم على قواعد المنطق الرياضى) وعلاقتها بالبرهان وحل المشكلات الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية "دراسة تحليلية"، مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، كلية التربية ببنها، المجلد السادس، العدد الأول، يوليو.

١٨- **عادل إبراهيم الباز، صلاح عبدالحفيظ محمد(١٩٩٧):** التفاعل بين الأسلوب المعرفى لكل من المعلم والطالب وبعض استراتيجيات تدريس المفاهيم وأثره على اكتساب المفاهيم الهندسية واختزال القلق الهندسى لدى طلاب الصف الأول الإعدادى، مجلة كلية التربية بالزقازيق، العدد(٢٩)، مايو.

١٩- **عبدالعظيم محمد زهران، زين العابدين شحاته خضراوى(١٩٩١):** أثر تدريس مهارات الترجمة الرياضية الأساسية على أداء تلاميذ الصف الثانى الثانوى العام فى مهارات الترجمة المتضمنة فى مقرر الرياضيات وعلى تخفيف قلقهم الرياضى، مجلة كلية التربية بسوهاج، جامعة أسيوط، العدد الخامس، الجزء الثانى، يوليو.

٢٠- **عبدالله السيد عزب سلامة(٢٠٠٠):** تنمية مهارات البرهان الرياضى لدى معلمى الرياضيات حديثى التخرج، مجلة كلية التربية ببنها، المجلد العاشر، العدد٤٢ يناير ٢٠٠٠.

٢١- **عزة إسماعيل عفانة(٢٠٠١):** تنمية مهارات البرهان الهندسى لدى طلاب الصف السابع الأساسى بغزة فى ضوء مدخل "فان هايل". مجلة دراسات فى المناهج وطرق التدريس. العدد السبعون، مايو ٢٠٠١.

٢٢- **على عبدالرحيم على حسانين(١٩٩٩):** تجريب استخدام استراتيجى خرائط المفاهيم وخريطة الشكل "V" فى تعليم الرياضيات على تنمية التفكير الرياضى وخفض القلق لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، المجلد الثانى، أبريل.

٢٣- **عماد ثابت سمعان، جمال حامد محمد(١٩٩٣):** مدى مساهمة نموذج منظم الخبرة المتقدم فى بقاء تعلم الهندسة الفراغية وتخفيف مستوى القلق الرياضى لدى طلاب التعليم الثانوى الصناعى، مجلة كلية التربية بأسيوط، العدد التاسع، المجلد الأول، يناير.

٢٤- **فايز مراد مينا(١٩٩٤):** قضايا فى تعليم وتعلم الرياضيات مع إشارة خاصة للعالم العربى، الطبعة الثانية، القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية.

٢٥- **فريدريك، هـ. بل، (١٩٨٧):** طرق تدريس الرياضيات، ترجمة: محمد أمين المفتى، وممدوح محمد سليمان، الجزء الأول، الطبعة الثالثة، القاهرة، الدار العربية للنشر.

٢٦- **فؤاد البهى السيد(١٩٧٩):** علم النفس الإحصائى وقياس العقل البشرى، الطبعة الثالثة، القاهرة، دار الفكر العربى.

٢٧- **لطفى عمارة مخلوف(١٩٩٠)**: أثر استخدام بعض استراتيجيات إلقاء الأسئلة على حل طلاب المدرسة الإعدادية للمشكلات الهندسية واختزال قلقهم الرياضى، مجلة دراسات تربوية، رابطة التربية الحديثة، القاهرة، المجلد الخامس، الجزء(٢٧).

٢٨- **محمد أحمد محمد الكرش(١٩٩٩)**: أثر تدريس وحدة هندسية بمساعدة الكمبيوتر فى التحصيل وتنمية مهارات البرهان الرياضى لدى طلاب الصف الأول الثانوى، رسالة الخليج العربى، العدد السبعون، السنة التاسعة عشر.

٢٩- **محمد سعد إبراهيم العرابى(٢٠٠٤)**: فعالية التقويم البديل على التحصيل والتواصل وخفض قلق الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية، المؤتمر العلمى الرابع للجمعية المصرية لتربويات الرياضيات: رياضيات التعليم العام فى مجتمع المعرفة، نادى أعضاء هيئة التدريس ببنها، ٧-٨ يوليو.

٣٠- **محمد عبدالسميع حسن على(١٩٩١)**: مهارات البرهان الرياضى لدى معلمى الرياضيات بالحلقة الثانية من التعليم الأساسى(دراسة تجريبية)، مجلة كلية التربية بالزقازيق، العدد(١٥)، السنة(٦)، مايو ١٩٩١.

٣١- **محمد عبدالسميع حسن على(١٩٩٦)**: فعالية تدريس وحدة مقترحة فى الهندسة المحايدة باستخدام خرائط الشكل "V" والتعلم التعاونى فى خفض قلق البرهان الهندسى بالمرحلة الإعدادية، مجلة كلية التربية بالزقازيق، العدد(٢٦)، مايو.

٣٢- **محمد عيد حسن عوض الله(٢٠٠٣)**: التمثيلات الرياضية من خلال بعض طرق التدريس المتكاملة مدخل لتدريس أساسيات الجبر لتلاميذ المرحلة الابتدائية وعلاقة ذلك بتفكيرهم الاستدلالى وتحصيلهم الفورى والمؤجل، مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، كلية التربية ببنها، المجلد السادس، العدد الأول، يوليو، ص ص ٩٩-١٤٣.

٣٣- **محمد محمود مصطفى(١٩٨٧)**: البرهان الكتابى فى الهندسة. المجلة العربية للبحوث التربوية، المجلد السابع-العدد الثانى-يوليو.

٣٤- **محمد مسعد نوح(١٩٩٢)**: العلاقة بين تحصيل كتابة البراهين فى الهندسة والإنشاءات الهندسية ومفهوم التلاميذ عن طبيعة البرهان الهندسى. مجلة دراسات فى المناهج وطرق التدريس، العدد الخامس عشر، مايو، ص ص ٦٠-٩٣.

٣٥- **محمود أحمد الإبيارى(١٩٩٨)**: فاعلية بعض الأنشطة التعليمية المقترحة فى تنمية مهارات التواصل الرياضى الكتابى لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادى، مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، كلية التربية ببنها، المجلد الأول، ديسمبر.

٣٦- **محمود أحمد الإبيارى(٢٠٠٢)**: فاعلية استخدام مدخل كتابة المشكلة فى تحسين أداء حل المسألة اللفظية الحسابية والاتجاه نحو حل المسألة لدى تلاميذ الصف الثالث الابتدائى. مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، كلية التربية ببنها، المجلد(٥)، يوليو.

٣٧- **محمود أحمد شوق(١٩٩٧)**: الاتجاهات الحديثة فى تدريس الرياضيات، الطبعة الثانية، الرياض، دار المريخ.

٣٨- **مكة عبدالمنعم البنا(١٩٨٨)**: دراسة تجريبية لتنمية المهارات التدريسية لتلاميذ الحلقة الثانية من مرحلة التعليم الأساسى فى ضوء مسارات تفكير التلاميذ والمعلمين، رسالة ماجستير غير منشورة، القاهرة، جامعة عين شمس، كلية البنات.

٣٩- **نبيل محمد عبدالحميد متولى(١٩٩٥)**: فاعلية برنامج بمساعدة الكمبيوتر فى تنمية أساليب البرهان الرياضى ومهارات تدريسه والاتجاه نحو التعليم الذاتى لدى طلاب كلية التربية جامعة الإسكندرية، رسالة دكتوراه غير منشورة، كلية التربية، جامعة الإسكندرية.

٤٠- **نظلة حسن أحمد خضر(١٩٨٤)**: أصول تدريس الرياضيات، الطبعة الثالثة، القاهرة، عالم الكتب.

٤١- **وديع مكسيموس داود، فايز مراد مينا، محمد أمين المفتى(١٩٨١)**: تعليم وتعلم الرياضيات، القاهرة، دار الثقافة للطباعة والنشر.

٤٢- **وليم عبيد، محمد المفتى، سمير إيليا(١٩٩٦)**: تربويات الرياضيات، الطبعة الثالثة، القاهرة.

٤٣- **وليم عبيد(١٩٩٩)**: طرق تدريس الرياضيات بالمرحلة الإعدادية، مشروع تدريب المعلمين الجدد غير التربويين، برنامج تحسين التعليم الأساسى، القاهرة، وزارة التربية والتعليم.

٤٤- **يحيى حامد هندام(١٩٨٢)**: تدريس الهندسة النظرية ومقومات البرهان المنطقى، الطبعة الثانية، القاهرة، دار النهضة العربية.

45- ***Alibert, D., and Thomas, M. (1991):*** Advanced mathematical thinking, In: Jones, Keith (2000): The student experience of mathematical proof at university level. Journal of mathematical education in science and technology, 31/1.

46- ***Almeida, Dennis (2003):*** Engedering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? International journal of Mathematical Education in science and Technology, July August Vol., 34, Issue, 4.

47- ***Balacheff, N. (1988 Apirl):*** A study of pupils' proving processes at the junior high school level. Paper presented at the joint International Conference 66th NCTM and UCSMP project, Chicago. IL.

48- ***Bruce Simmons (2006-A):*** Proof by contradiction: Indirect proof (http://www.mathwords.com/i/indirect proof.htm).

49- ***Bruce, Simmons (2006-B):*** Proof by contradiction: Introductory exercises(http://math.usask-ca/emr/exercises/indr_dir/i1st.htmL).

50- ***Bruns M, (1985):*** The role of questioning. Arithmetic teacher, 32 (6).

51- ***Carole, Greenes, (1992):*** Stimulating communication in mathematics, Arithmetic teacher, October.

52- ***Caruti R, Boero, P., and Mariotti, M.A. (1996):*** Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures in proceedings of th 20th PME conference, Valencia, Vol (2).

53- ***Caruti R, Boer., P., and Lemut, E, (1998):*** Cognitive unity of theorems and difficulties of proof in: proceedings of the 22th PME conference, Stellenbosch, South Africa, Vol. (2).

54- ***De Villiers, Michael. (1997):*** Why proof in Dynamic Geometry? "In: proceedings of the topic group on proof at the Eight international congress on mathematics education, edited by Michael de Villers and Fulvia Furinghetti, 24-42. centrahil: Association for mathematics education of South Africa.

55- ***De Villers, Michael (1998):*** Conjecturing as initial introduction to proofs. Mathematics teacher, Nov. 1998, Vol. 91 Issue 8.

56- ***Dodge, Walter, Goto, Kathleen; and Mallinson, Philip (1988):*** "I would consider the following to be a proof..." Mathematics teacher, No. 98, Vol. 91. Issue 8.

57- ***Durand-Guerrier, V, and Arsac G, (2005):*** An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. Educational studie in mathematics. Vol., 60 (2).

58- ***Epp, Susanna, S. (1998):*** A unified framework for proof and disproof. Mathematics Teacher Vol. (91), No. (8).

59- ***Epp Susanna, S. (2005):*** The role of logic in teaching proof. http://condor.depawl.edu/sepp/monthy886-899.pdf.

60- ***Finlow, K., Lerman S; and Morgan, C. (1993):*** Proceedings of the 17th conference of the international group for the psychology of mathematics education, edited by hirabayashi, I., Nohda, N., Shigematsu, K., and Lin F-L., university of Tsukuba, Japan, Vol., I.

61- ***Gardiner , T., and Moreira C. (1998):*** Perceptions of proof and abilities to reconstruct/ Criticise simple proofs among specialist mathematicians about to graduate from two universities in England and Portugal. Available from the authors.

62- ***Hanna, G., (1990):*** Some pedagogical aspects of proof. Interchange, Vol. (21).

63- ***Hanna. G., and Jahnke, H.N. (1999):*** Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In: O. Zaslavsky (Ed), Proceedings of the twenty third conference of the International group for the psychology of mathematics education, vol. 3.

64- ***Harel, Guershon (2002):*** The development of mathematical induction as a proof scheme. In: Learning and Teaching number theory: Research in cognition and instruction, Campbell, Stephen R. (Ed): Zazkis, Rina (Ed), Ablex publishing.

65- ***Harel, G., and Sowder, L. (1998):*** Researcher collegiate mathematics education III, edited by AH Schoenfeld, J Kaput, and E. Dubinsky (providence, R.I: American Mathematical society).

66- ***Healy, L., and Hoyles, C. (1998):*** Justifing and proving in school mathematics: report on ESRC project (London: Institute of Education).

67- ***Herbst, P. (2002):*** Establishing a custom of proving in American school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. Educational studies in mathematics, volume 49, Number 3, March.

68- ***Herbst, P., Brach, C. (2006):*** Proving and doing proofs in high school geometry classes: what is it that is going on for students? Cognition and instruction, 24 (1).

69- ***Housman, David. (2003):*** Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. Educational studies in mathematics. Vol. (53), Issue (2).

70- ***Hoyles, Gelia., and Kijchmann, Dietmar (2002):*** Student's understandings of logical implication. Educational studies in mathematics, volume 51, number 3, November.

71- ***Izen, Stanley P. (1998):*** Proof in modern geometry. Mathematics teacher, vol. 91. No. 8, pp: 718-721. (A full- text article no. 1242303 on Academic Search Elite database).

72- ***Jones, Keith (2000):*** The students experience of mathematical proof at university level. International Journal of Mathematic education in Science and technology, 31/1, pp: 53-60 (A full text artiçale no. 2767755 on Academic search Elite Data base).

73- ***Jones, K., Grutierrez, A., and Mariotti M, (2000):*** The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in Dynamic geometry environments. Educational studies in mathematics, Volume 44, number, 1-3, Decembers.

74- ***Kenneth A, Ross (1984):*** Elementary analysis: the theory of calculus; undergraduate texts in mathematics, springer-verlarg, new York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

75- ***Klymuchuk, S. (2005):*** Counter –examples in teaching/learning of Calculus: Student's performance. The New Zealand Mathematics Magazine. ISSN: 0549-0510. Vol. 42, No. 1, pp. 31-38.

76- ***Knuth, Eric J, and Elliott, Rebekah L, (1998):*** Characterizing student's understanding of mathematical proof. Mathematics Teacher, Vol., 91, No. 8. (A full-text article no. 1242302 on Academic Search Elite Database).

77- ***Knuth, Eric J. (2000):*** The nature of secondary school mathematics teacher's conceptions of proof. Dissertation abstracts international, Vol., 60, no. 7, January, p. 2417-A.

78- ***Knuth, Eric J, (2002-A):*** Proof as a tool for learning mathematics, mathematics teacher, October, vol. (95), Issue (7).

79- ***Knuth, Erich. J, (2002-B):*** Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Journal for research in mathematics education, November, vol. (33), Issue (5).

80- ***Knuth, Eric J. (2002-C):*** Teachers' conceptions of proof in the context of secondary' school Mathematics. Journal of Mathematics teacher education, vol. (5), No. (1).

81- ***Laborde,C. (2000):*** Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. Educational studies in mathematics, volume 44, numbers 1-3.

82- ***Lee Kyung Hwa. (2005):*** Mathematically gifted students geometrical reasoning and informal proof, In: H.L. chick and JL. Vincent (Eds.), proceedings of the 29th conference of the International group for the psychology of mathematics education, Melbourne, Australia, July, 10-15, 2005.

83- ***Lee Wan-I (2000):*** The relationship between students proof-writing ability and Van Hiele levels of Geometric thought in a college geometry course. Dissertation abstracts International, Vol. 60, no. 7 January.

84- Leron, U. (1985): A direct approach to indirect proofs. Educational studies in mathematics. Vol. (16). (3). Pp: 321-325.

85- ***Lin, Fou-Lai, (2005):*** Modeling students' learning on mathematical proof and refutation, In: H.L. chick & J.L Vincent (Eds.). proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education. Melbourne, Australia, July, 10-15, 2005. pp: 3-18.

86- ***Lithner, Johan. (2000):*** Mathematical reasoning in school tasks, Educational studies in mathematics, volume, 41, number 2, February, 165-190.

87- ***Luengo, Vanda., and Leibniz, laboratoire(1999) :*** Cooperative agents to learn mathematical proof. World conference on educational multimedia, Hypermedia and telecommunications (EDMEDIA). (http://www.ediliborg/index.cfm?fuseaction=Reader. View abstract & Paper id= 7283).

88- ***Maher, Carolyn A, (1996):*** The development of the idea of mathematical proof. A5-year case study. Journal for research in mathematics educations., vol., 27 No. 2. pp: 194-214.

89- ***Maher Carolyn. A. (1988):*** The teacher as designer, implementer, and evaluator of children's mathematical learning environmentals. The Journal of Mathematical Behavior, vol., 6, pp: 295-303.

90- ***Maher C.A. Martino, A.M., and Alston A, (1993):*** Children's construction of mathematical ideas. In B. Aweh, C. Kases, M. Carss, and G. Booker (Eds.), Proceedings of the sixteenth Annual Conference of the mathematical education Research Group of Australia.

91- ***Mariotti, Maria Alessandra, (2000):*** Introduction to proof: the mediation of Dynamic software environment. Educational studies in Mathematics, volume 44, Numbers 1-3, December, 25-53.

92- ***Mariotti, M.A., (2005):*** Proof and proving in Algebra, proceedings of the 1st Conference of the Greek Ass. for research in mathematics education. (GARME) (Athens 9-11 Dec. 2005).

93- ***Marrades, Ramon and Guterrez, Angel: (2000):*** Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational studies in mathematics, volume 44. Numbers 1-3, December, 87-125.

94- ***Martland, David. (2004):*** Using Annotated animation to illustrate mathematical proofs. World conference on Elementary in corporate, government, health care, and higher education (ELEARN).(http://www.ediliborg/index.cfm?fuseaction=reader.view abstract & paper id 7283).

95- ***Martin, T.S., Soucy Mc Crone, S.M., Wallace Bower, M.L, Dindyal, J. (2005):*** The interplay of teacher and students actions in the teaching and learning of geometric proof. Educational studies in mathematics, Vol., 60 (1).

96- ***Martino, A.M., and Maher C.A., (1994, April):*** Teacher questioning to stimulate justification and generalization in mathematics. Paper presented at the annual meeting of the American educational research association, new Orleans, LA.

97- ***Miyazaki, Mikio. (2000):*** Levels of proof in lower secondary school mathematics. Educational Studies in Mathematics, Volume 41, Number 1, January, 47-68.

98- ***Moyer Patricia S., and Bolyard, Johnna.J, (2003):*** Classify and capture: using Venn diagrams and tangrams to develop Apilities in Mathematical Reasoning and proof. Mathematics teaching in the middle School, Vol. (8), No. (6), pp, 325-330.

99- ***National Council of Teachers of Matematics (NCTM), (1989):*** Curriculum and evaluation Standards for School mathematics, Reston Va.: The Council.

100- ***National counvl of teachers of Mathematics (NCVM), (2000):*** Principles and standards for school mathematics.

101- ***Peterson, I. (2004):*** Proof by Computer: science news online (Oct. 2). Available at: http://www. Science news.org/articles/2004 1002/mathrek.asp.

102- ***Prince, Amy A, (1998):*** Prove It; Mathematics teacher, Nov. 1998 vol. 91 Issue 8.

103- ***Redmond, Charles., Federici, Michacl P., and Platte, Donald M, (1998):*** Proof by contradiction and the Electoral College. Mathematics Teacher, Nov, Vol., 91, Issue 8, pp: 655-659.

104- ***Reid DavidA, (1998):*** Sharing Ideas about teaching proving. Mathematics teacher, Nov. 1998, Vol. 91, Issue 8, pp: 704- 706.

105- ***Reid D, and Dobbin J. (1998):*** Why is proof by contradication difficult? Proceedings of th22th PME conference, stellenbosch, South Africa, Vol (4).

106- ***Rongjin Huang (2005):*** Verification or proof. Justification of pythagoras' theoremin Chinese mathematics classroom, In: H.L. chick & J.L. Vincent (Eds.). Proceedings, of the 29th conference of the International group for the psychology of mathematics education, Melbourne, Australia, July, 10-15, 2005. Vol. 3.

107- ***Schmidt, P. (1999):*** Exercising and Discussing mathematical proofs. in the domain of school mathematics calculus. in proceedings of International Conference on Mathematics/ Science Education and technology (pp. 332-337). AACE.

108- ***Senn –Fennell, Christiane (1995):*** Oral and written communication for promoting mathematical understanding : teaching examples from Grade 3. Journal of curriculum studies, Jan. Feb.

109- ***Shipley, William, J, (2000):*** An investigation of college student's understanding of proof construction When doing mathematical analysis proofs. Dissertation abstracts international, vol., 60, no. 7. January, p. 2417-A.

110- ***Simon, Marti., and Glenn Blume, (1996):*** Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. Journal of Mathematical behavior, 15 January.

111- **Sloan, Tina. Rye, (2000):** Mathematics anxiety and its relationship to learning styles among preservice elementary teachers, Dissertation abstracts international, Vol. 60 No. 11, May, p: 3912-A.

112- ***Sommer. R., and Nuckols, G, (2004):*** A proof environmental for teaching mathematics. Journal of automated Reasoning. Vol., (32), no. (3).

113- ***Sowder Larry Harel, Guershon, (1998):*** Types of student's justifications. Mathematics teacher. Nov. Vol. 91; Issue 8.

114- ***Sowder, Larry, (2003):*** Case studies of mathematics majors proofs understanding, production, and appreciation. Canadian Journal of science, Mathematics, and technology education; April; vol (3), Issue (2), pp: 249-266.

115- ***Stylianides, Andreas J., Styliandes, Gabriel J., and Philippou. George N, (2005):*** prospective teachers' understanding of proof: what if the truth set of an open sentence is Broader than that covered by the proof? In : H,L. Chick and J.L. Vincent (Eds.), proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education, melhoume, Australia.

116- Sun-Tao –Human Shyang Lin, (2005): Using argumentation to investigate teachers' teaching practices: the perspective of instructional decisions and justifications. International Journal of Science and mathematics education 3 (3).

117- ***Thompson, Denisse, R. (1996):*** Learning and teaching indirect proof, the mathematics teacher, Sept Vol. 89 (6).

118- ***Valentime, Carrie., Carpenter, Thomas P., and Pligge, Margaret, (2005):*** Developing concepts of justification and proof in a sixth grade classroom. Everyday matters in science and mathematics: studies of complex classroom events. In: Nemirovsky, richardo (Ed); Rosebery, Anns (Eds): Solomon, Jesse (Ed); Warren, Beth (Ed). Mahwah, NJ, US, Lawrence, Erlbaum Associates, publishers.

119- ***Vernon T. Sarver, JR, (2005):*** The hapless frog and the evil wizard: an introduction to indirect proof. Teaching Mathematics and its Applications. Volume 24 number 4, December.

120- ***Waldlington E, (1992):*** Have a problem? Make the writing mathematics connections. Arithmetic. Teacher, December.

121- ***Watson, J. M, (2002):*** Inferential reasoning and the influence of cognitive conflict. Educational studies Mathematics, Volume, 51, Number 3, November.

122- ***Winicke-Landman, Greisy, (1998):*** On proofs and their performance as works of Art. Mathematics teacher, Nov., Vol. 91 Issue 8.

123- ***Yackel, Erna and Paul Cobb, (1996):*** Sociomethematical norms. Argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for research in mathematics education, July.

124- ***Yuli Tatag. Siswono(2005):*** Students thinking strategies in reconstructing theorems, In: H.L. Chick and J.L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th conference of the International group for the psychology of mathematics education, Melbourne, Australia, July 10-15, 2005, vol. 4.