

المنطق الرياضي وآليات الاستنباط الدقيق

أ. هبة السيد الجنائني (*)

مقدمة:

الإنسان بوصفه كائناً بشرياً متسائلاً، يعيش في حركة دائمة لا تنتهي. تجعله مُحاطاً بسلسلة لا متناهية من التساؤلات العميقة حول كافة ما يوجد في الكون، فيدعو تفكيره إلى الإجابة عن تلك التساؤلات؛ مما يضيف عليه سمة التغيير والتطوير والاكتشاف. كذلك المنطق بوصفه علماً، بل باعتباره آلية كافة العلوم، فهو لا يخلو من الحركة والسيروية الدائمة القابلة للتغيير والتجديد والتطوير. وفي لب هذا التصور، واكب المنطق تطور هائل وفَعَّال، تم التمهيد له بتغيير عميق عندما ثار فلاسفة وعلماء المنطق المحدثون على المنطق الأرسطي؛ الذي جعل من القياس النموذج الوحيد الذي يُحتذى به في كافة العلوم- الاستنباط الصوري- والذي اقتصر على تحليل القضايا في افتراضه لها، إما أن تكون صادقة أو كاذبة؛ ومن هنا نشأ ما يسمى بالمنطق الرياضي Mathematical

(*) أ. هبة الجنائني: حاصلة على ماجستير في الآداب- كلية البنات- جامعة عين شمس- قسم الفلسفة- تخصص منطق رياضي (رمزي). وباحثة دكتوراه في المنطق الرياضي. **تعمل حالياً:** المدير التنفيذي لمجلة وادي النيل للدراسات والبحوث الإنسانية والاجتماعية والتربوية الصادرة عن كلية الآداب- جامعة القاهرة- فرع الخرطوم، وللتواصل مع الباحثة إلكترونياً: heba.alganainy@yahoo.com (***) سمي المنطق الرياضي بعدة مسميات أهمها: المنطق الرمزي Symbolic Logic، أو اللوجستيكا Logistic، أو جبر المنطق Algebra of Logic.

Logic (**). وامتد هذا المنطق؛ ليشمل آفاقاً واسعة أكثر مما شمله منطق أرسطو.

وقد اقتصر المنطق التقليدي منذ أرسطو على القياس وحده، وجعل القياس هو الاستنباط الوحيد في العلوم، في حين أن المنطق الجديد يتوسع في الاستنباط وقوانينه حيث يتبعه في أوسع العلوم الاستنباطية أعني الرياضيات، وبذلك يتجاوز المنطق المعاصر حدود القياس الأرسطي الضيقة والمرتبطة بألفاظ اللغة⁽¹⁾. ومن أبرز علماء المنطق الرياضي ليبنتز Leibnitz (1646-1716) وكان العالم الرياضي الأول الذي اتجه نحو الاعتماد على التفكير الرياضي، مما جعله المنهج الملائم لجميع الفروع العلمية. كما أنه أضاف اللغة العالمية^(*)، التي تتخذ من الرموز الركيزة الأساسية، بدلاً من الاعتماد على ألفاظ اللغة العادية، فضلاً عن أنه صاغ مبدأ الذاتية في قالب من الرمزية، حيث أسند هذا المبدأ لكافة المعارف⁽²⁾.

ونشأ المنطق الرياضي حوالى منتصف القرن التاسع عشر، وواصل تقدمه في القرن الحالي لا بفضل مجهود الفلاسفة، وإنما بفضل علماء الرياضة، ومرجع السبب في ذلك هو أنه خلال القرن الماضي ازداد إدراك علماء الرياضة بضرورة إعادة فحص الجانب الأعظم من أسس الرياضيات، وإعادة بنائها على أسس جديدة، فاكتشف علماء الرياضة أن المنطق التقليدي (منطق أرسطو وأتباعه) لا

(1) محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، لوجستيقا، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1972، ص47.

(*) اللغة العالمية: هي لغة تصويرية يشير كل حرف فيها مباشرة لمفهوم بسيط. وتكون مثل هذه الحروف- التي يُطلق عليها اسم الحروف الحقيقية- مفهومة عند جميع الناس مهما تكن اللغة التي يتكلمون بها، وتُعد بمثابة حساب عقلي مثل الجبر، حيث تشكل حروفها "أبجدية الفكر البشري". انظر (حسين علي: مبادئ المنطق الرمزي، دار قباء، القاهرة، د.ت.، ص32).

(2) المرجع سابق: ص32.

يصلح لتحقيق هذا الغرض. ومن ثمَّ شرع الرياضيون في تطوير نسق من المنطق كان أكثر تخصصاً وأكثر دقة⁽³⁾.

ومن أمثال هؤلاء الذين بذلوا مجهودات واضحة المعالم في مجال المنطق الرياضي: جورج بول George Bool وفريجه Frege، ووايتهد Whithead، ورسل Russell وهلبرت Hilbert، وكارنب Carnap... وغيرهم ممن ساهموا في التطورات المنطقية⁽⁴⁾.

ولقد كان لجورج بول (1815-1864) الفضل الأول في وضع بذور التطورات المنطقية، وذلك حينما ساهم بكتابه "التحليل الرياضي" عام (1847). ويُعد هذا الكتاب بمثابة نقطة الانطلاق نحو سلسلة متوالية من التطورات المنطقية، مما أسفر عن تلاحم وتضافر جهود علماء المنطق والرياضيات⁽⁵⁾.

أما فريجه كان أول من وضع المنطق في قالب النسق الاستنباطي بشكل مكتمل، فضلاً عن أنه وضع أصول نظرية حساب القضايا بجميع عناصرها، وكذلك كافة النظريات المنطقية الأخرى، وجمعهم وضَعُوا في قالب النسق الاستنباطي. حيث يبدأ هذا النسق من الأفكار الأولية، والتعريفات، والمصادرات، ثم النظريات؛ وذلك بالاعتماد على آليات الاستدلال المنطقي⁽⁶⁾.

وقد بلغت التطورات المنطقية أوج ازدهارها في نهاية النصف الثاني من القرن التاسع عشر؛ حينما امتزجت الرياضيات بالمنطق. ومن هنا جاء "رسل"

(3) المرجع السابق: ص 33.

(4) Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic, Oxford, at The Clarendon Press, England, 1966, P. 327.

(5) Ibid : pp. 327 – 328.

(6) محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي نشأته وتطوره، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 1989، ص 152-153.

بكتابه الأول "أصول الرياضيات" Principles of Mathematics، بعد أن قرأ مؤلفات "بيانو" ووقف على دقائق تفصيلاتها، فتمكن من استنباط أداة جيدة للتحليل المنطقي. ومن هنا تعاون مع هوايته لتأسيس المنطق الرياضي كنسق استنباطي، حيث أثمر جهدهما المشترك كتاب "برنكيبيا ماتيماتكا" Principia Mathematica والذي توالى نشر أجزائه الثلاثة خلال الأعوام (1910-1913)⁽⁷⁾.

ويُعد هذا العمل بمثابة المرحلة الأولى الحاسمة والرئيسية في التطورات اللاحقة، التي واكبت الرياضيات والمنطق في القرن العشرين وما لاحقه في القرن الحادي والعشرين. وبناءً على ذلك، توحد عمل الرياضيين والمناطق، مما كشف عن أنساق استدلالية أخرى كالنسق الثلاثي والغائم والنيوتروسوفي.

وفي هذا الصدد، لابد أن نشير إلى أن المنطق الرياضي في بدايته هو امتداد للمنطق الأرسطي، ومن هنا يمكننا توضيح أبرز ما يميزه عن المنطق الأرسطي وذلك في إطارين رئيسيين: يكمن الإطار الأول في مدى صلة المنطق بالرياضيات، بينما الإطار الثاني يتبلور في استخدامه لأسلوب التدوين الرمزي Symbolization، فضلاً عن أنه منطق قضايا وليس منطق حدود كما آل إليه المنطق الأرسطي.

بالإضافة إلى أن أنماط الاستدلالات التي يوفرها المنطق الرياضي ضرورية للرياضيات، فضلاً عن أنها ذات أهمية كبرى لكافة العلوم الطبيعية والاجتماعية، وبالتالي فإن القوانين المنطقية المتنوعة والتي بواسطتها يتم الانتقال من المقدمات إلى النتائج بدون تناقضات، هي القوانين التي لا يستغني عنها أي

(7) ماهر عبدالقادر محمد: نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 2000، ص ص 98-99.

فرع من العلوم، فيستخدم الاستدلال لاستنتاج النتائج الصحيحة من مقدمات مفروضة⁽⁸⁾.

وقد عمل المنطق الرياضي بكافة تطوراته على زعزعة قوانين المنطق الكلاسيكي^(*) مما طرأ عليه تغيير كلي. فقام بهدم أحد قوانينه- قانون عدم التناقض.

الأمر الذي أدى إلى أن المفهوم العام للمنطق الرياضي أصبح ذو طبيعة ديناميكية؛ أي أنه يتصف بالتغيير والتجديد، ولا يقف على حالة بذاتها؛ أي أنه علم متجدد دائم التغيير بما يواكب العلم المعاصر ويلاحقه⁽⁹⁾. وطغى هذا المفهوم على مناهج العلوم أيضاً، ومن ثم تميز المنطق الرياضي بالضرورة الدائمة.

ويشتمل المنطق الرياضي على عدّة نظريات أساسية، وهي نظرية حساب القضايا Propositional Calculus، وحساب المحمول Propositional Theory of function Calculus، ونظرية دالة القضية، ونظرية الفئات Theory of Classes، ونظرية العلاقات Theory of Relations⁽¹⁰⁾. وكشف هذا المنطق عن مجموعة كبيرة من العلاقات وحللها ووضع لها رموزاً محددة، وحساباً تحليلياً دقيقاً. بالإضافة إلى أنه أكثر خصوبة في نتائج الاستدلال، وذلك لاستخدامه كم

(8) ياسين خليل: محاضرات في المنطق الرياضي، دار الوفاء، الإسكندرية، ط1، 2007، ص23.

(*) تتمثل قوانين المنطق الكلاسيكي في ثلاثة قوانين وهي: قانون الذاتية Law of Identity، وقانون عدم التناقض Law of Traditioniction، وقانون الوسط الممتنع Law of Exculde (9) سهام النويهي: أسس المنطق الرياضي، رؤية حديثة، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة، 1988، ص ب.

(10) محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي نشأته وتطوره، ص13.

المحمول وحسابه، مما يوسع من قاعدة الاستدلال، وكذلك تحليل العلاقات، مما يوسع من مجال الاستدلال ونطاقه⁽¹¹⁾.

ويرى رسل: "أن المنطق الرياضي يختص أساساً بالاستدلال بوجه عام، ومن ثم فإن ما يبحث فيه هو القواعد العامة التي يُجرى الاستدلال عليها"⁽¹²⁾.

ويؤكد بعض المناطق أن الاستدلال هو قلب النظرية المنطقية، والتبرير النهائي لكل عمل في الاستدلال يعتمد على طبيعة الأشياء التي يشتمل عليها. ويتم الاستدلال بين القضايا سواء كانت رياضية أو منطقية، حيث تعتمد العلاقة بين القضايا على قواعد منطقية معينة فتصبح متلازمة منطقياً، وهذا التلازم يعني أن النتيجة تلزم عن المقدمات بالضرورة.

ووفقاً لرؤية رسل، فإن المنطق يعتمد على الاستنباط الذي يعتمد علاقة اللزوم، والتي تضيء على النسق الاستنباطي مشروعته⁽¹³⁾. وقبل أن نتطرق إلى آليات النسق الاستنباطي في ضوء المنطق الرياضي، علينا أولاً أن نشير إلى فكرة اللزوم Implication باعتبارها خاصية النسق الاستنباطي في المنطق.

أولاً- اللزوم خاصة النسق الاستنباطي:

تعتبر فكرة اللزوم قديمة قدم المنطق ذاته؛ لأن أرسطو أسس نظرية القياس في منطقته على منتها. وتمكن "رسل" في القرن العشرين من الوصول إلى أن النسق المنطقي ككل يتطور من خلال فكرة اللزوم. وأشار رسل إلى التمييز بين اللزوم المادي Material Implication واللزوم الصوري Formal Implication

(11) عزمي إسلام: أسس المنطق الرمزي، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1970، ص21.

(12) المرجع السابق: ص ص16-17.

(13) ماهر عبد القادر محمد: نظريات المنطق الرياضي، ص100.

باعتبارهما أساسين للاستنباط الذي يعرفه: "بأنه عملية ننتقل فيها من العلم بقضية معينة هي المقدمة، إلى قضية أخرى معينة هي النتيجة. لكن لن نضع في اعتبارنا أن هذه العملية استنباط منطقي ما لم تكن صحيحة، أي إذا لم توجد هناك علاقة بين المقدمة والنتيجة، تتيح لنا الاعتقاد في صحة النتيجة إذا أدركنا أن المقدمة صحيحة. وهذه العلاقة هي محور الاهتمام في النظرية المنطقية للاستنباط"، وهي ما نطلق عليها علاقة اللزوم Implication Relation⁽¹⁴⁾.

وهناك اتصال بين الفعل العقلي للاستدلال وبين علاقة اللزوم، حيث تشبه تلك العلاقة بين القضية والتأكيد Assertion. فإذا كانت القضية هي ما يحتمل أن تكون تأكيدية، فإن علاقة اللزوم بين قضيتين شرط ضروري لإنتاج واحدة من الأخرى؛ كما أنه من المستحيل تحديد القضية في النهاية إلا في حدود التأكيد، بينما علاقة اللزوم تستطيع تحديد ذلك في حدود الاستدلال⁽¹⁵⁾.

إذن علاقة اللزوم هي الأساس المنطقي للاستنباط ومحور النظرية ككل، وبدونها لا يُعد الاستدلال صحيحاً. فإذا وجدت علاقة اللزوم ضمن خطوات الاستنباط، فإن المقدمة تتضمن النتيجة، وبالتالي تلزم النتيجة عن مقدمتها⁽¹⁶⁾.

وننظر الآن إلى بعض الأمثلة التي توضح علاقة اللزوم:

- 1- إذا كان هذا أحمر، فإنه ملون.
- 2- إذا كان أ والد ب، فإن ب ابن أ.
- 3- إذا كان ج ، ب لهما نفس الوالدين، ج ذكر، فإن ج أخ ب⁽¹⁷⁾.

(14) المرجع السابق: ص ص 100-101.

- Johnson, W. E. : Logic, Part II, Cambridge, at University Press, (15) 1922, P. 1.

(16) ماهر عبدالقادر: مرجع سابق، ص 101.

(17) المرجع السابق: ص 102.

تُعد تلك الأمثلة بمثابة قضايا استدلالية، تعتمد في استنتاجها على الاستنباط. وتتكون تلك القضايا من جزأين: الأول هو ما نطلق عليه المقدم Antecedent، أما الثاني فهو ما يعرف بالتالي Consequent ويلزم لزوماً منطقياً عن المقدم⁽¹⁸⁾.

ويمكننا صياغة تلك القضايا في المنطق الرياضي على النحو التالي:

"If p Then q"

حيث q يشير إلى رمز النتيجة، بينما p يشير إلى المقدمات. ومن المعتاد أن المقدمات عبارة عن قضايا تقدم فكرة أولاً، ومن ثم فإن الانتقال من تلك الأفكار للنتيجة هو الخطوة الأخيرة في تلك العملية العقلية؛ أي الاستدلال. بينما (If... Then...) يسمى بسور القضية، حيث تشير به إلى علاقة اللزوم⁽¹⁹⁾. ولا بد من الإشارة إلى أنه يمكن استبدال السور (If...Then...) بعبارة (Would Imply). إذن (P Would Imply q) هو التعبير الأصح لعلاقة اللزوم المنطقي، بينما (P Implies q) هو التعبير المكمل للاستدلال⁽²⁰⁾. ووضع المنطق الرياضي رمز للزوم، وهو ما يسمى بالثابت المنطقي بين المتغيرات p , q وهذا الرمز يتخذ العلامة (\supset) ، فيكون كالاتي:

$$p \supset q$$

أو $q \supset p$

ويسمى هذا باللزوم المادي في المنطق الرياضي، بالإضافة إلى أنه يدل على أن الاستدلال لا يُعرف في حدود اللزوم، لكن اللزوم يجب أن يُعرف في حدود الاستدلال. ففي عملية الاستنباط لا ننتقل فقط من تأكيد المقدمات إلى تأكيد

(18) المرجع السابق: نفس الموضوع.

– Johnson, W. E. : Logic, P. 2. (19)

– Loc. Cit. (20)

النتيجة، ولكن أيضاً نؤكد ضمناً على أن تأكيد المقدمات يستخدم لتبرير تأكيد النتيجة⁽²¹⁾.

ثانياً- آليات النسق الاستدلالي الرياضي:

لم يصُغ أرسطو منطق صياغة استنباطية واضحة. وكانت تلك الآليات التي اعتمد فيها على تصوره، أقرب إلى طبيعة البرهان الهندسي منها إلى البرهان المنطقي. وبناءً على ذلك، لم يقد أرسطو نسقاً استنباطياً لأي من نظرياته المنطقية⁽²²⁾.

فقد اقتصر أرسطو في منطقته على آليات الاستدلال المباشر والاستدلال القياسي، واستنباط النظريات من التعريفات والمبادئ التي حددها لكل نظرية، وهذا بخلاف ما جاء به المنطق الرياضي.

وفي هذا الإطار، لا يمكننا القول بأن المنطق الرياضي نشأ من تلقاء ذاته، ولكنه هو المنطق السوري الذي خضع لتأثير التطورات العلمية للعصر في صور متنوعة دقيقة. وكما يقول الدكتور عبدالحميد صبره- حينما عرض تلك النقطة في ترجمة كتاب- نظرية القياس الأرسطية، من وجهة نظر المنطق السوري الحديث: "والذين يعارضون بين منطق أرسطو والمنطق الرياضي، إنما يسيئون فهم العلاقة بينهما. فالمنطق الرياضي ليس جنساً آخر عن المنطق الأرسطي، وإنما هو منطق سوري في ثوب جديد"⁽²³⁾.

(21) - Ibid: P. 2.

(22) محمد محمد قاسم: نظريات المنطق الرمزي، ص132.

(23) عبدالحميد صبره: مقدمة لترجمة كتاب: يان لوكاشيفيتش، نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق السوري الحديث، منشأة المعارف، الإسكندرية، 1961، ص7.

ويعني هذا القول بأن المنطق الأرسطي هو نقطة الانطلاق لنشوء المنطق الحديث والمعاصر، ولذا سنجد أن المنطق الرياضي - حديثاً كان أو معاصراً - قد تجاوز حدود الاستدلال القياسي ومجالاته. ولكن المنطق الرياضي في بدايته منطق ثنائي القيم، وبعد ذلك وصل بتطوراته إلى قيم أخرى غير الثنائية، وسوف نتناولها بصورة جلية خلال هذا البحث.

إذن يرتدي المنطق الرياضي ثوب النسق الاستنباطي، الذي يتكون من وضع قوائم بالحروف والعلامات المستخدمة في النسق، باعتبارها تمثل الثوابت والمتغيرات. ثم توضع تلك القواعد التي طبقاً لها يتم تكوين الجمل من تلك العلامات، وهى ما تسمى بقواعد التكوين. بالإضافة إلى وضع قائمة بالقضايا الأولية والتعريفات، فضلاً عن قائمة بقواعد الاستنباط التي يتم طبقاً لها اشتقاق النظريات من الجمل الأولية⁽²⁴⁾.

ويرتكز النسق الرياضي على أربع قواعد:

Rules of Formation	- قواعد التكوين
Definitions	- التعريفات
Axioms	- البديهيات
Rules of Transformation	- قواعد التحويل ⁽²⁵⁾

قواعد التكوين:

تهتم قواعد التكوين بتحديد الرموز الأولية التي تتكون منها القضايا وتنقسم هذه الرموز إلى نوعين وهما: الروابط المنطقية الأولية، والمتغيرات الأولية. وروابط النسق المنطقي هى روابط ثابتة في كينونتها. وحددها المنطق الرياضي في خمسة

(24) سهام النويهي: أسس المنطق الرياضي، ص12.

(25) المرجع السابق: نفس الموضوع.

أنواع وهي رابط النفي، والعطف، والفصل، واللزوم، والتكافؤ، ويرمز لهما بـ $(\sim, 0)$ ، (\exists, \subset, V) على التوالي، هذا من جهة⁽²⁶⁾.

ومن جهة أخرى، يتم التعبير عن المتغيرات الأولية بواسطة الحروف الهجائية، مثل (ق، ك، ل، م، ن، ... إلخ) ومن ثم يتم تكوين القضايا من المتغيرات المتعددة، والتي يتم الربط بينها من خلال الثوابت أو الروابط المنطقية. ومن هنا يُمكننا القول بأن الثوابت المنطقية والمتغيرات^(*) في النسق الاستنباطي تُستخدم بوصفها أدوات لصنع الاستدلال.

التعريفات:

وتعني أن يتخذ الرمز الجديد نفس ما تعنيه مجموعة رموز سبق وعُرف معناها. وقد عرضنا سابقاً أن هناك ما يسمى باللامعرفات، وهي لا تعريف لها، وتسمى بالرموز الأولية. وتكمن أهمية التعريف في توضيحه لمدى تكافؤ الصياغات المنطقية، وكمثال على التعريفات نجد في نسق "رسل ووايتهد" التعريف الآتي⁽²⁷⁾:

$$(ق \subset ل) = تع^{(*)} (\sim ق \vee ل)$$

(26) اختلف المناطق حول تحديد المصطلحات المنطقية، فتارة كان يُطلق على الروابط مصطلح Connective، وتارة أخرى الثابت المنطقي Logical Constance، وأحياناً العمليات القضائية. وهذه الروابط معناها ثابت لا يتغير بتغير الجمل، حيث تقوم بربط المتغيرات في القضايا. انظر : (Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, The Machmillan Company, New York, p. 23.)

(*) هناك أنواع من المتغيرات، متغيرات قضائية Propositional Variable، وهي التي تقوم مقام القضية، بحيث تكون قيمة المتغير قضية مثل (إما ق أو ك)، وهناك متغيرات حرة أو حقيقية Free Or Real Variable، وهي المتغيرات التي تظهر في دالة القضية ولا يحددها أي سور، وهناك متغيرات ظاهرية أو مقيدة Bound Or Apparent Variable، وهي التي تظهر في دالة القضية ويحددها سور مثل (س).

(27) المرجع السابق: ص14.

البديهيات أو الجمل الأولية:

تُعد هذه الجمل الأولية بمثابة نقطة الانطلاق للبرهنة داخل النسق الاستنباطي، وهي الجمل التي تعرض صدقها بدون إقامة برهان عليها، ومن شروطها أن تكون متوافقة فيما بينها، وأن تكون ضرورية بصورة قاطعة، بالإضافة إلى كونها تامة⁽²⁸⁾.

قواعد التحويل:

تُسمى بقاعدة الاستدلال، وهي تختص بالإجراءات التي تُتخذ إزاء التعبيرات المنطقية، بحيث يمكن اشتقاق عبارات غير مبرهنة من عبارات مبرهنة. وتعتمد على قاعدتي الإبدال والوضع بالوضع⁽²⁹⁾. والآن سيتطرق الباحث إلى دور الاستنباط في إحدى نظريات المنطق الرياضي- وهي حساب القضايا- ولكن علينا أولاً أن نلقى نظرة سريعة حول نظرية القضايا في المنطق الرياضي.

ثالثاً- الحساب التحليلي للقضايا في المنطق الرياضي:

عندما ننظر إلى القضية في الحساب التحليلي للقضايا، فإننا ننظر إليها ككل. وكل ما يعنينا هنا هو العلاقات المنطقية ذاتها. وتُستخدم المتغيرات (ق، ك، ل، ...) للإشارة إلى حدود القضايا، مع وجود الثوابت للربط بين المتغيرات⁽³⁰⁾، وهي كالاتي:

(**) تع: يقصد بها تعريف.

(28) ألفرد تارسكي: مقدمة للمنطق ولمنهج البحث في العلوم الاستدلالية، ص152.

وانظر أيضاً: أ.ه. بيسون، د. ج. أوكونر: مقدمة في المنطق الرمزي، ترجمة: عبدالفتاح

الديدي، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، 1987، ص122.

(29) سهام النويهي: أسس المنطق الرياضي، ص15.

(30) المرجع سابق: ص27.

رابطة النفي : \sim ق ، وتقرأ ليس ق.

رابطة الفصل: ق \vee ل ، وتقرأ القضية ق أو القضية ل.

رابطة العطف: ق . ل ، وتقرأ ق و ل.

رابطة اللزوم : ق \supset ل ، وتقرأ إذا كانت القضية ق كانت القضية ل.

رابطة التكافؤ: ق \equiv ل ، وتقرأ أن عناصر القضية ق تكافؤ عناصر القضية

ل.

وتنتج الثوابت المنطقية علاقة قيمة صدق القضية المركبة، وقيمة صدق القضايا الذرية. فلكل قضية قيم صدق Values - Truth ، وهما الصدق Truth ويرمز له بالرمز (ص)، والكذب Falsity ويرمز له بالرمز (ك). ويتم صياغة قواعد صدق كل دالة من الدوال؛ بواسطة ما يطلق عليه قوائم الصدق⁽³¹⁾.

Truth Tables

رابعاً- قوائم الصدق:

تمثل قائمة الصدق طريقة فنية تستخدم في المنطق الرياضي؛ للتعبير عن قيم صدق القضايا المركبة. ويمكن عن طريق هذا الجدول إثبات صحة أو بطلان الاستدلالات المنطقية، فضلاً عن التمييز بين قضايا تحصيل الحاصل، والقضايا التركيبية والمتناقضة⁽³²⁾.

⁽³¹⁾ المرجع السابق: ص 45.

⁽³²⁾ حسين علي: مبادئ المنطق الرمزي، ص 93.

ويمكننا الآن تمثيل ذلك من خلال جدول الصدق الآتي:
جدول رقم (1):

ق	ل	ق . ل	ق V ل	ق C ل	ق E ل	ق ~ ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ك
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص
ك	ك	ك	ك	ص	ص	ص

خامساً- قواعد الاستدلال الاستنباطي في حساب القضايا:

لابد أن نشير في بادئ الأمر إلى أن الاستنباط إما أن يكون اشتقاقاً Derivation، أو برهاناً Proof. والاشتقاق في مضمونه استنباط من مقدمات بعينها؛ أي متسلسلة من الجمل وتكون كل جملة فيها إما واحدة من المقدمات أو جملة أولية، أو جملة تعريف أو مشتقة مباشرة من جملة تسبقها في المتسلسلة⁽³³⁾. أما البرهان هو الاستنباط بدون مقدمات، أي أنه متسلسلة من الجمل، بحيث تكون كل جملة فيها إما جملة أولية أو جملة تعريف أو مشتقة مباشرة من جملة تسبقها في المتسلسلة⁽³⁴⁾.

ويعتمد الاستنباط على مجموعة من القواعد:

1. قاعدة التعويض Substitution
2. قاعدة الإبدال Replacement
3. قاعدة الاستدلال Inference

(33) سهام النويهي: مرجع سابق، ص66.

(34) المرجع السابق: ص67.

قاعدة التعويض: تعتبر هذه القاعدة قاعدة استدلالية إرشادية؛ لأنها تقوم بإدخال صيغ جديدة في القضايا؛ بمعنى أنه يتم تغيير المتغيرات الحرة في قضايا تحصيل الحاصل. فيمكن وضع المتغيرات القضائية بدلاً من المتغيرات الحرة⁽³⁵⁾، فعلى سبيل المثال:

$$ق \vee (ل \cdot م) \equiv (ق \vee ل) \cdot (ق \vee م).$$

وهنا يمكننا وضع (ك) بدلاً من (ق) في كافة مواضعها، فتكون كالاتي:

$$ك \vee (ل \cdot م) \equiv (ك \vee ل) \cdot (ك \vee م).$$

قاعدة الإبدال: تقوم تلك القاعدة بإدخال تغييرات وصيغ جديدة، بدلاً من التعبيرات المركبة، ومن ثم يكون هناك تكافؤ بين التعبير الجديد والأصلي، فإذا كان لدينا الصياغة التالية⁽³⁶⁾:

$$ق \supset (\sim ق \vee ل).$$

ويمكن عن طريق قاعدة الإبدال والتعويض أن نحصل على الآتي:

$$ق \supset ل \equiv (\sim ق \vee ل).$$

$$ق \supset (ق \supset ل).$$

أي أننا وضعنا (ق \supset ل) بدلاً من ($\sim ق \vee ل$) لأنهما متكافئتان.

قاعدة الاستدلال: تعتبر هذه القاعدة الركيزة الأساسية للاستنباط. وتقوم هذه القاعدة على أنه إذا كانت قضية اللزوم (ق \supset ل) صادقة، وكانت (ق) صادقة، فإنه يمكن تأكيد (ل). وتتخذ هذه القاعدة الصيغة التالية⁽³⁷⁾:

$$ق \supset ل$$

$$\frac{ق}{ق}$$

$$ق$$

(35) المرجع السابق: نفس الموضوع.

(36) المرجع السابق: ص 68.

(37) سهام النوبهي: مرجع سابق، ص 70.

وتشتمل هذه القاعدة على عدّة قواعد أهمها: قاعدة الإثبات بالوضع، والإنكار أو الرفع بالرفع، والقياس الشرطي، والقياس الفعلي، والإحراج المركب، والاستغراق، والتبسيط، والعطف، والإضافة والجمع. وسنتناول فيما يلي أهم قواعد الاستدلال المستخدمة في المنطق الرياضي، كما هو موضح في الجدول الآتي:

جدول رقم (2)

قاعدة الإثبات بالوضع	قاعدة الرفع بالرفع	
تشير تلك القاعدة إلى أنه على افتراض صدق اللزوم (ق ل) في ظل إثبات (ق) يلزم عن ذلك التسليم بصدق التالي (ل).	تشير تلك القاعدة إلى أنه على افتراض صدق اللزوم (ق ل) في ظل نفي (ل) يلزم عن ذلك التسليم بنفي المقدم (ق).	التعريف العام
$\frac{((\text{ق ل}) \wedge (\text{ق})) \supset \text{ل}}{\text{ق ل}} \quad \text{أو} \quad \frac{((\text{ق ل}) \wedge (\text{ل})) \supset \text{ق}}{\text{ق ل}}$	$\frac{((\text{ق ل}) \wedge (\text{ق})) \supset \text{ل}}{\text{ق}} \quad \text{أو} \quad \frac{((\text{ق ل}) \wedge (\text{ل})) \supset \text{ق}}{\text{ق ل}}$	الصيغة العامة
إذا كان س هو ص، فإن ع هي ل لكن س هي ص ∴ ع هي ل	إذا كان س هو ص، فإن ع هي ل لكن ع ليس ل ∴ س ليست ص	مثال
إذا كان العالم غامضاً، فإنه يكون محيراً لكن العالم غامض ∴ العالم محيرٌ.	إذا كان العالم غامضاً، فإنه يكون محيراً لكن العالم ليس محيراً ∴ العالم ليس غامضاً.	

وبمقتضى ما ورد فى الجدول رقم (2) و(3) يمكننا ملاحظة ما يلي:

- أن المنطق الرياضي يتعامل مع الصدق التام، حيث يمكنه استنباط النتائج- وإن بدأت بشكل ضمنى فى ظل وجود المقدمات- ومن ثم فهو لا يتعامل مع الصدق الجزئى، ولا يستطيع أن يقدم الدليل الذى يؤكد على مقدماته، لذا فهو مقيد.

- يقرر المنطق الرياضى المثالية القاطعة شأنه فى ذلك شأن المنطق الأرسطى، فكليهما نمط منطقي ثنائي القيم، حيث يعتمدان على التفكير الاستدلالي الدقيق، الذى يقوم باستنباط النتائج، فيقرر ما هو صادق، وما هو كاذب، ويبرهن على النظريات المنطقية وهذا ما يقوم به الاستدلال من وظيفة، ومن ثم فإن المنطق بأكمله نظرية فى الاستدلال.

- لا يمكنه التعامل مع اللاتيين الذى يكتنف العالم، ومن هنا بدأ تطوير التفكير الاستدلالي بتطور المنطق عبر تاريخه.

وعلاوة على ما قدمه الاستدلال الاستنباطي من دور فى المنطق الكلاسيكي- أرسطياً كان أو رمزياً- باعتباره منهجاً فى البرهان، فهناك تصور آخر قدمه بعض المناطق فى المنطق المعاصر، ولذا فمن الضروري أن نشير إلى هذا التصور المعاصر.

سادساً- التحليل أحد التصورات المعاصرة للاستنباط:

أشار كثير من علماء المنطق الرياضى إلى أن التحليل هو أحد عمليات الاستنباط. حيث يقوم بتحليل وحدة القضايا إلى قضايا أخرى، فضلاً عن أنه يستخلص النتائج من القضية فى حدود المكونات المتنوعة لها، والتي تؤخذ عادة فى وقت واحد⁽³⁹⁾. فعلى سبيل المثال:

- Smart, H . R. : What is Deduction? P. 39.

(39)

يمكننا من تلك القضية "هذا الجدول بني" استنتاج عدّة نتائج مثل:

- هذا الجدول هو اللون.
- هناك ما لا يقل عن جدول واحد بني.
- هناك على الأقل أشياء مادية ملونة.

وهلّمّ جراً، ومن ثمّ يقودنا هذا الاستنباط إلى أنه يمكننا استخلاص النتائج من القضية الأصلية، بواسطة العقل وحده وبدون إضافة أي معرفة تجريبية⁽⁴⁰⁾.

وفي هذا المضمار، يقول لويس Lewis, C. I.: "يفسر المنطق الجديد الإجراء الاستنباطي على أنه منهج في التحليل، وليس منهجاً في البرهان... فبدلاً من تطبيقه في حقل العلوم الحسابية... بوصفه مقدمات أساسية تقودنا إلى النتائج غير المؤكدة أو المجهولة بواسطة عمليات البرهان... فالأجدر بنا أن نأخذ الحقائق المسلم بها عموماً من علم المنطق أو علم الحساب... كمسألة التحليل والترتيب المنظم... لنصل إلى الحقائق الممنهجة الكلية والتي تجعل التطور الاستنباطي لهذه الحقائق في خدمة العلوم الأخرى كعلم الاقتصاد؛ حتى يزودنا بأفضل طريقة لفهم طبيعته وإدراكه"⁽⁴¹⁾.

ووفقاً للمنطق الجديد، يرى لويس وبعض أتباعه الذين بذلوا جهوداً كثيرة واضحة مما لا تدع مجالاً للشك، بأن الاستنباط ليس الدليل وليس البرهان، وليس عملية التوصل إلى الحقائق المجهولة أو النتائج. ولكنه منهج مقتصد بطريقة منظمة؛ لعرض وإعادة ترتيب وتحليل للحقائق المسلم بها بالفعل^(*).

وعموماً، إن كلاً من علم المنطق والرياضيات هما في حقيقتهما "أنساق استنباطية بحتة". والقضايا الرياضية تشبه قضايا المنطق الكلاسيكي، فهما

- Ibid : pp. 39 - 40. (40)

- Ibid : p. 40. (41)

بديهيان بالمعنى العقلاني للكلمة. وهذا هو ثمرة تحليل علماء المنطق الرياضي، فهم يؤكدون أيضاً على أن الممارسة العملية للنسق الاستنباطي ليس فقط من علماء الرياضة، ولكن أيضاً من علماء المنطق الرياضي أو الرمزي⁽⁴²⁾.

الخاتمة والنتائج:

لقد عرضنا خلال هذا البحث التصور الرياضي للاستدلال، ووجدنا أن الاستدلال عامة هو فعل ذهني، حيث يمثل الجزء الرئيس من الأعمال المناسبة للعقل، والذي يجعل من نفسه طريقة للتعرف على العالم الذي يمتلك الوجود؛ وتتنوع تلك الطريقة بتنوع الحقل المعرفي الذي يتم استخدامه فيه. ووجدنا أن الحقل المنطقي الأرسطي والرياضي ككل يعتمدان على الطريقة الاستنباطية، حيث يتم تطبيق قواعدها في كافة النظريات التي تختص بهذا الحقل. وبدأ التفكير الاستدلالي المنهجي في البحث العلمي في التاريخ اليوناني، حينما قدم أرسطو القياس المنطقي؛ وذلك للحد من التلاعب بالألفاظ التي كان يلجأ إليها السفسطائيون. فاتجه نحو البحث عن التفكير المنطقي، حتى وصل إلى القياس باعتباره أحد الطرق الاستدلالية، وأيضاً بوصفه أداة فكرية. ووقف أرسطو عند القياس وهو أكثر الطرق الاستدلالية إثماراً في منطقته، حيث كان يقوم باستنتاج النتائج الضرورية من بعض المقدمات العامة التي يسلم المرء بصدقها-

(*) ومع ذلك هناك بعض الخلط أو اللبس في هذا الشأن، حتى بين علماء المنطق أنفسهم. وهو عادة يكمن في طريقة تناول لأوجه التشابه بين المصطلحات والأخطاء غير المقصودة، حتى الذين يميزون بين الاستنباط والبرهان، أدركوا في كثير من الأحيان، أن الاستنباط هو مجرد: "تخمين للإجابة؛ أي أننا قد نتوقع أو نعرف الإجابة قبل الكشف عن أدلة فعلية تحليلية".

انظر : (Ibid : p. 40)

- Loc.Cit.

(42)

والتي قد تكون مفهومة لنا ضمناً- ولذا فقد حد هذا النمط- الذي ينتقل من العام إلى الخاص في صورة الاستنباط- من الإبداع والتجديد في التاريخ اليوناني. وبدأ التفكير الاستدلالي ينتقل رويداً رويداً، ومن مرحلة إلى أخرى، حتى جاء التفكير المنطقي الرياضي عبر الهجوم على المنطق الأرسطي، فجاء ليوضح ما أخفق فيه وأضاف ما لم يصل إليه، بالإضافة إلى تلاحمه مع الرياضيات. ويعتبر امتداداً طبيعياً للمنطق الأرسطي، لذا فهو (أعني المنطق الأرسطي) يُعد نقطة الانطلاق نحو ما أصاب المنطق الرياضي من تقدم هائل، باعتباره منطق قضايا- على خلاف المنطق الأرسطي باعتباره منطق حدود- يعتمد على نسق رمزي متكامل، بالإضافة إلى آلياته الاستدلالية، والتي تطورت فيما بعد. واعتمد المنطق الرياضي على التفكير الاستدلالي الدقيق (أعني الاستنباط الدقيق) الذي يعتمد على إجراءات معينة منظمة بصورة دقيقة، تربط بين القضايا في إطار ما يسمى بالمقدمات المنطقية التي يلزم عنها نتيجة معينة بالضرورة؛ ومن ثم فإن منظور المنطق الأرسطي هو نفس منظور المنطق الرياضي، ولكن الفارق يكمن في النسق الرمزي الرياضي المتكامل الذي اعتمد عليه المنطق الرياضي وقواعده. وبناءً على ذلك فكلاهما منطق كلاسيكي ثنائي القيمة، حيث يقر إما بالصدق أو الكذب.

إذن لعب الاستدلال دوراً رئيساً في المنطق، حيث تكمن وظيفته الأولى في طلب الدليل سواء كان صادقاً، أو كاذباً لقضية مسبقة. فهو يحاول أولاً إثبات قضية ما عن طريق قضايا أخرى. معتمداً في دقته هنا على الضرورة المنطقية التي تربط النتيجة بالمقدمات بحيث يقرر صدق النتيجة بالضرورة إذا كانت المقدمات صادقة؛ أي أنه يقوم بتوليد معرفة جديدة (أعني النتيجة) باستخدام بعض الإجراءات المعينة لقضايا متوافرة لدينا، هذا من جانب. ومن جانب آخر، فهو يكشف عن كذب قضية ما، وهذا يعتبر تمييزاً للاستدلال المحكوم بمقدمات

معينة. وهذا ما نسميه بعمل الاستدلال؛ أي الانتقال من الحقيقة المعروفة إلى الحقيقة المجهولة، وبالتالي سيُقدم هذا الانتقال في ضوء بعض الشروط المعينة التي ينبغي التحقق منها في المجال الذي يتم تطبيق قواعده فيه⁽⁴³⁾. ولم يُعد المنطق مجرد آلية نظرية، بل أصبح آلية تطبيقية، حتى تتناغم مع الواقع العملي ومستجدات العصر؛ وذلك بفضل تطوير آلياته الاستدلالية الممنهجة، والتي سوف نتناولها في الفصول القادمة. وهذا التطور الذي لاحق المنطق الرياضي، قدم لنا أنماطاً منطقية لم تكن معروفة لنا من قبل، فلم تعد الانساق المنطقية مقتصرة على تحليل القضايا إلى ثنائية القيم، بل تجاوزت حدود تلك الثنائية، طبقاً لتجاوز القوانين الفكرية التي وضعها أرسطو؛ مما أظهر على الساحة المنطقية ما يسمى بالمنطق المتعدد القيم.

قائمة المراجع الأجنبية:

- 1- Chen, G. & Pham, T.: Introduction To Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control System.
- 2- Johnson, W. E. : Logic, Part II, Cambridge, at University Press, 1922.
- 3- Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic, Oxford, at The Clarendon Press, England, 1966.
- 4- Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, The Machmillan Company, New York.
- 5- Smart, H. R. : What is Deduction? Philosophy and Phenomenological Research, Vol. 5 No. 1 (sep., 1944).

(43) روبرت بلانشي: الاستدلال، ص ص 61-64.

قائمة المراجع العربية:

(أ) - المراجع العربية المؤلفة:

- 1- سهام النويهي: أسس المنطق الرياضي، رؤية حديثة، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة، 1998.
- 2- حسين علي: مبادئ المنطق الرمزي، دار قباء، القاهرة، د.ت.
- 3- عزمي إسلام: أسس المنطق الرمزي، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1970.
- 4- ماهر عبد القادر محمد: التطور المعاصر لنظرية المنطق، دار النهضة العربية، بيروت، 1988.
- 5- ماهر عبد القادر: نظريات المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 2000.
- 6- محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، لوجستيقا، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1972.
- 7- محمد محمد قاسم: نظريات المنطق الرمزي، بحث في الحساب التحليلي والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1991.
- 8- محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي نشأته وتطوره، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 1989.
- 9- ياسين خليل: محاضرات في المنطق الرياضي، دار الوفاء، الإسكندرية، ط1، 2007.

(ب) - المراجع العربية المترجمة:

- 10- ألفرد تارسكي: مقدمة للمنطق ولمنهج البحث في العلوم الاستدلالية، ترجمة: عزمي إسلام، مراجعة: فؤاد زكريا، الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر، القاهرة، 1970.
- 11- أ.ه. بيسون، د. ج. أوكونر: مقدمة في المنطق الرمزي، ترجمة: عبدالفتاح الديدي، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، 1987.
- 12- يان لوكاشيفيتش: نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق السوري الحديث، الترجمة العربية، منشأة المعارف، الإسكندرية، 1961.